A2

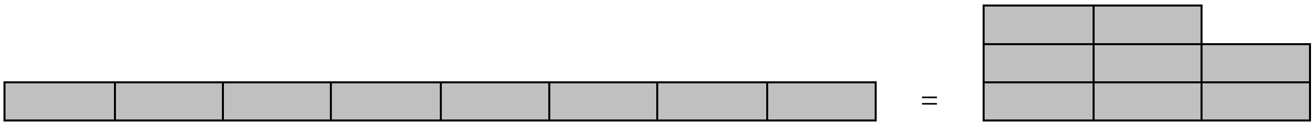
Sammenlægning af per-tal

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

Per-tal opstår ved optælling og fremkommer som højden af en stak.

Ved optælling spørges f.eks. '8 = ?3ere = ?*3', hvortil svares 8 = (8/3)*3 hvor 8/3 er et per-tal.



8 = ? 3ere = ?*3 = (8/3)*3

1.1 Sammenlægning af stakke

En stak kan forhøjes eller forlænges ved at få tillagt en anden stak:

1.1.1 Forhøje en stak

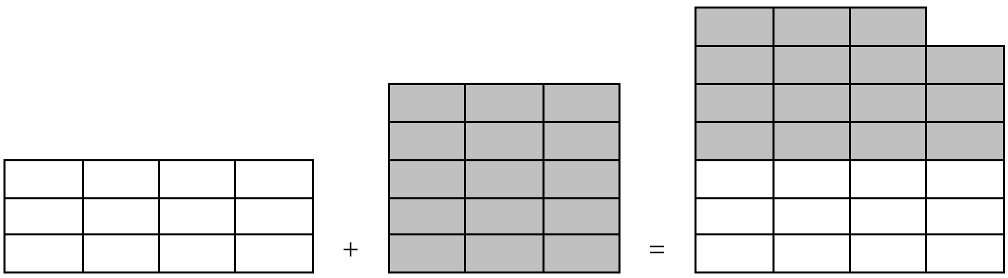
T1 = 3*4 og T2 = 5*3, T = T1 + T2 = 3*4 + 5*3 = ?*4

Svar: T = T1 + T2 = 3*4 + 5*3 = 3*4 + (5*3)/4*4 = 3*4 + 3 3/4*4 = (3 + 3 ¾)*4 = 6 ¾*4

Eksempel: 4 dage á 3 kr/dag + 3 dage á 5 kr/dag = 4 dage á 3 kr/dag + 4 dage á 3 3/4*4 kr/dag = 4 dage á 6 ¾ kr/dag

for med omvekslingen fra 3 dage til 4 dage (3 dage = (3/4)*4 dage) bliver

3 dage á 5 kr/dag = 3*5 kr = 15 kr = (15/4)*4 kr = 4 dage á 3 3/4*4 kr/dag



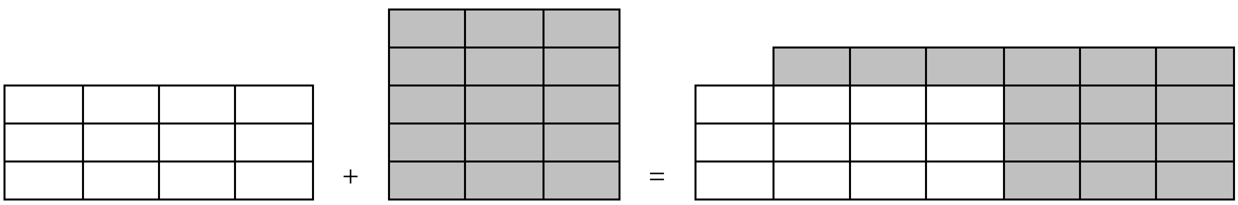
1.1.2 Forlænge en stak

T1 = 3*4 og T2 = 5*3, T = T1 + T2 = 3*4 + 5*3 = ?*7

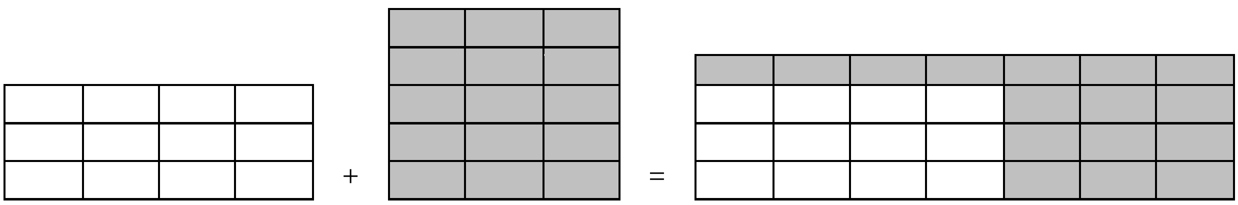
Svar: T = T1 + T2 = 3*4 + 5*3 = (3*4 + 5*3)/7*7 = (27/7)*7 = 3 6/7 * 7, hvor 3 6/7 kaldes det vægtede gennemsnit af 3 og 5

Eksempel 1: 4 kg á 3 kr/kg + 3 kg á 5 kr/kg = 7 kg a 3 6/7 kr/kg

Eksempel 2: 4 sekunder á 3 m/s + 3 sekunder á 5 m/s = 7 sekunder a 3 6/7 m/s



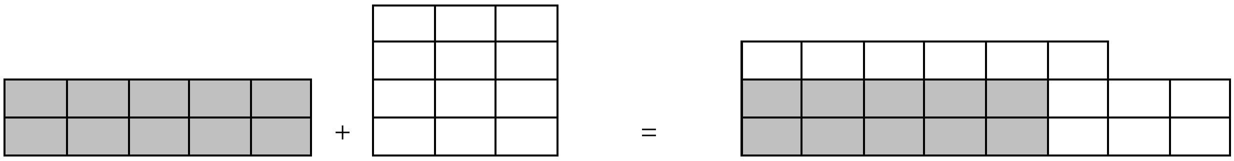
Eller med decimaltal: T = T1 + T2 = 3*4 + 5*3 = (3*4 + 5*3)/7*7 = (27/7)*7 = 3.86 * 7



1.2 Sammenlægning af Per-tal I

To per-tal sammenlægges ved at lægge deres stakke i forlængelse af hinanden. Hreved ses at per-tal sammenlægges ved først at lægge deres tilhørende staktal eller totaler sammen

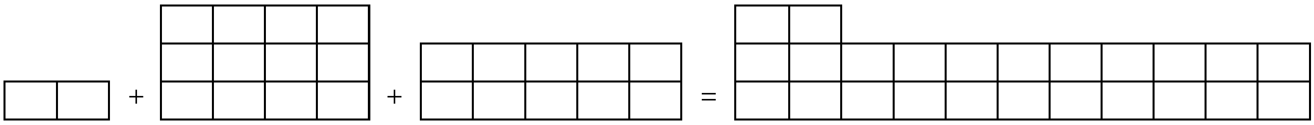
Eksempel: T = 2 5ere + 4 3ere = ? 8ere. T = 2 5ere + 4 3ere = 2*5 + 4*3 = (2*5 + 4*3)/8*8 = 2 6/8 *8



1.2.1 Gentaget sammenlægning af per-tal, integration

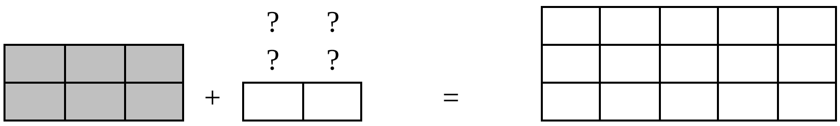
Sammenlægning af mange per-tal svarer til sammenlægning af mange stakke til en samlet stak, hvilket senere kaldes integration.

T = 1 2s + 3 4s + 2 5s = 1*2 + 3*4 + 2*5 = (1*2 + 3*4 + 2*5)/11*11 = 2 2/11*11

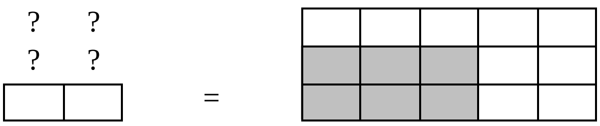


1.2.2 Tilbageregnet sammenlægning af per-tal, differentiation

En sammenlægningsproces kan vendes om ved at spørge: 2 3s+? 2s = 3 5s:



Svaret fås ved at fjerne 2 3ere fra de 3 5ere og så optælle de resterende 9 i 2ere som (9/2)*2 = 4 1/2 * 2. Dvs. ? = 4 ½. Denne proces kaldes senere for differentiation

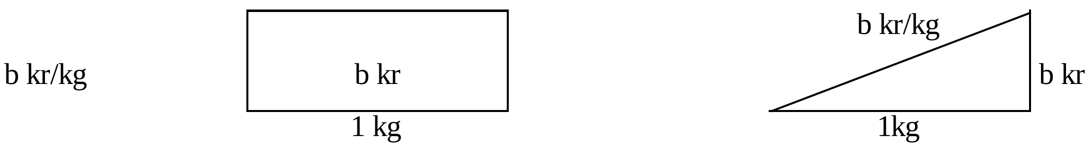


Svaret kan også fås ved tilbageregning (ligningsløsning):

2 3s	+ ? 2s	=	3 5s	Spørgsmålet
2*3	+ x*2	=	3*5	Ligningen
	x*2	=	3*5-2*3 = 9	De 2 3ere fjernes fra de 3 5ere og levner 9
	x*2	=	(9/2)*2 = 4 1/2 * 2	De 9 optælles som 2ere
	x	=	1 1/5	Svaret

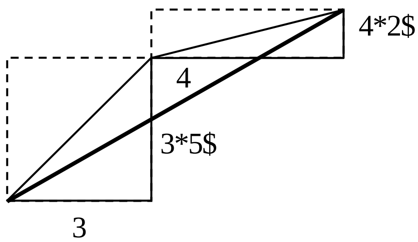
1.3 Sammenlægning af Per-tal II

Per-tal optræder også med enheder som f.eks. priser 4 kr/kg eller leje 4 kr/dag. Også disse per-tal kan repræsenteres som højde på stakke eller som stigning på en diagonal i en tilvækst-trekant.



Sammenlægning af sådanne per-tal kan ske i en tabel eller ved at sammenlægge stigninger i trekanter:

a kg @	*b $/kg =*	*a*b $*
3 kg @ 4 kg @ 7 kg @	5 $/kg = 2 $/kg = x $/kg = x =	3 * 5 = 15 $ 4 * 2 = 8 $ 7 * x = ∑a*b = 23 $ 23/7= 3 2/7 $



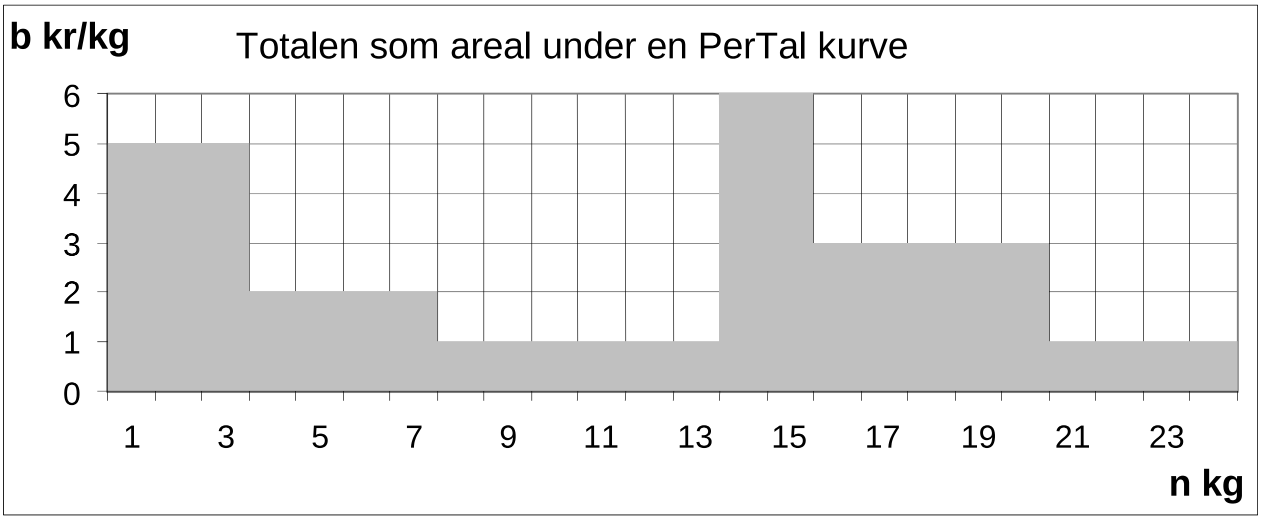
Dvs. per-tal sammenlægges igen gennem deres stakke eller totaler::

3 kg @ 5 kr/ kg + 4 kg @ 2 kr/ kg = (3+4) kg @ (∑a*b)/(3+4) kr/ kg

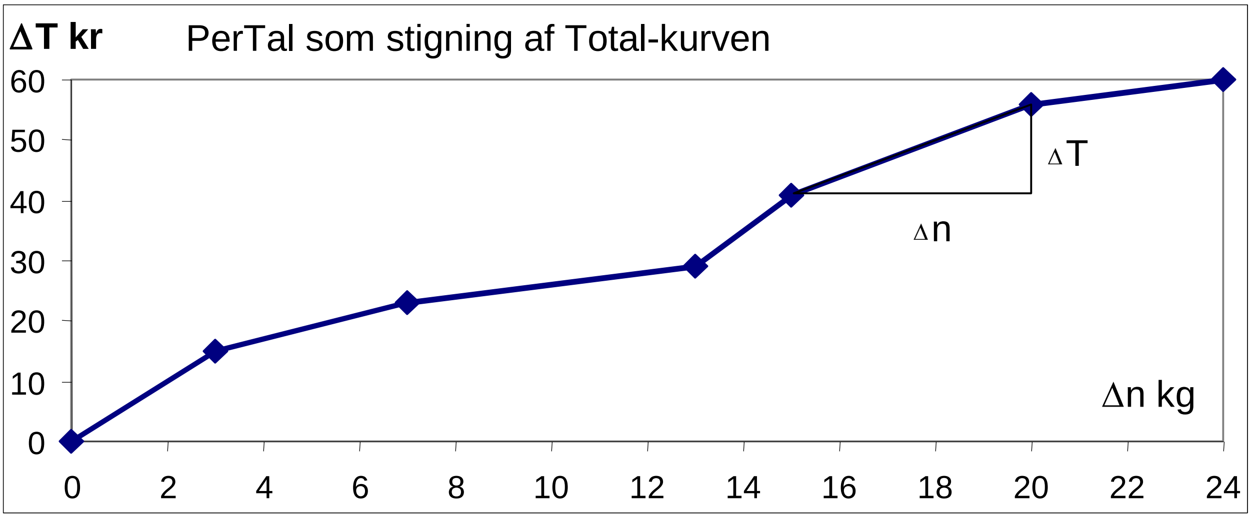
Tabellen kan supplementers med to kolonner der viser den samlede kg-tal Δn, det samlede kr-tal ΔT og det samlede per-tal Σ b som i nedenstående eksempel, hvor en te-forretning blander forskellige typer te til en samlet blanding.

Δn kg	*b kr/kg*	*Δn*b = ΔT*		*Σ Δn = Δn*	*Σ ΔT = ΔT*	*Σ b kr/kg = ΔT/Δn*
3 kg @	5kr/kg =	3 * 5 = 15		3	15kr	15/3 = 5.0
4 kg @	2kr/kg =	4 * 2 = 8		7	23kr	23/7 = 3.3
6 kg @	1kr/kg =	6 * 1 = 6		13	29kr	29/13 = 2.2
2 kg @	6kr/kg =	2 * 6 = 12		15	41kr	41/15 = 2.7
5 kg @	3kr/kg =	5 * 3 = 15		20	56kr	56/20 = 2.8
4 kg @	1kr/kg =	4 * 1 = 4		24	60kr	60/24 = 2.5

Plottes per-tallet b kr/kg mod Δn kg i et koordinatsystem vil det totale kr-tal være arealet under kurven som svarer til summen af stakke.



Plottes ΔT mod Δn i et koordinatsystem vil kurven vise både den samlede kg-tal Δn, den samlede total ΔT og de enkelte per-tal som stigninger på kurvestykkerne.



Så vi lærer både integralregning og differentialregning af at blande te:

Totalen er arealet under PerTal-kurven og kan forudsiges af beregningen T = ∑ $/kg*kg = ∑ b*a.

PerTal er stigninger på Total-kurven og kan forudsiges af beregningen b = Δ$/Δkg = ΔT/Δb

1.4 Sammenlægning af foudsigelige per-tal

Indtil nu har de enkelte per-tal været uforudsigelige. De kan imidlertid også være forudsigelige:

Eksempel 1. Ved et indkøb ydes følgende rabat: Prisen er 10 kr/kg for det første kg. Så reduceres prisen med ½ kr for hvert ekstra kg indtil 11 kg. Herefter er prisen konstant. Den samlede totale pris for 11 kg kan de forudsiges af beregningen:

S = 10 + 9.5 + 9 + 8.5 + ... + 5 = ?

Denne sum kan beregnes i et regneark eller den kan forudsiges af en beregning, hvilket leder til at interessere sig for hvad kaldes 'aritmetisk vækst' som giver resultatet

S = n*(an + a1)/2 = 11*(5+10)/2 = 82.5

Eksempel 2. Ved et indkøb ydes følgende rabat: Prisen er 10 kr/kg for det første kg. Så reduceres prisen med 10% for hvert ekstra kg indtil 11 kg. Herefter er prisen konstant. Den samlede totale pris for 11 kg kan de forudsiges af beregningen:

S = 10 + 10*0.9 + 10*0.9^2 + 10*0.9^3 + ... + 10*0.9^10 = ?

Denne sum kan beregnes i et regneark eller den kan forudsiges af en beregning, hvilket leder til at interessere sig for hvad kaldes 'geometrisk vækst' som giver resultatet

S = 10*(1-a^n)/(1-a) = 10*(1-0.9^11)/(1-0.9) = 68.6

1.5 Sammenlægning af konstante Per-tal

Ved rentetilskrivning er renten ofte konstant, f.eks. 5%, som tillægges ved at tage 105% af begyndelsesværdien:

385 kr + 5%: 385 kr = 100%, 100%+5% = 105%, 105% = (105/100)*100% = 1.05 * 385

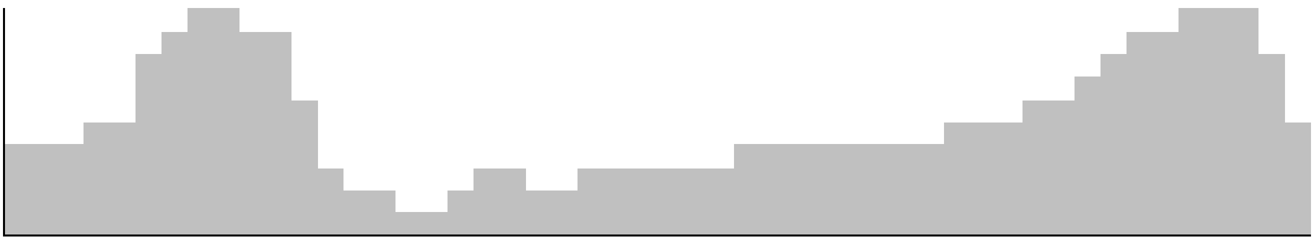
Derfor er 4 dage @ 5 % /dag = 21.6% da 105%*105%*105%*105% = 105%^4 = 121,6%

Dvs. sammenhængen mellem enkelt-rente r og samlet rente R er: (1+r)^n = 1 + R = 1 + n*r + RR

Vi kan nu se størrelsen af rentes rente RR: n*r + RR = R

1.6 Sammenlægning af lokalt konstante Per-tal

Per-tal kan også være stykkevis konstante. Hvis stykkerne er meget små siger vi at per-tallet er lokalt konstant eller kontinuert. I alle tilfælde gælder at totalen er arealet under per-tal kurven.



Vi kan definere de forskellige former for konstans på følgende måde:

En variabel y er globalt konstant c	$\forall\varepsilon>0$:	$\lvert y-c \rvert < \varepsilon$ overalt
En variabel y er stykkevis konstant c	$\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0$:	$\lvert y-c \rvert < \varepsilon$ in the interval δ
En variabel y er lokalt konstant c (kontinuert)	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:	$\lvert y-c \rvert < \varepsilon$ in the interval δ

Enhver krum kurve vil være lokalt konstant og kan derfor approksimeres med en række stake som kan sammenlægges ved integration: $\int y*dx \approx \sum y*\Delta x$. Og hvis $y*\Delta x$ kan skrives som en tilvækst af en anden vaiable z ($y*\Delta x = \Delta z$, or $y = \Delta z/\Delta x$) så kan summen forudsiges af en beregningen integration da

Summen af enkelt-tilvækster = den samlede tilvækst = Slut-tal minus Begyndelses-tal:

$\sum y*\Delta x = \sum \Delta z = \Delta z = z2 - z1.$

Dette gælder uafhængigt af tilvækstens størrelse, dvs. også for små tilvækster hvor vi skriver d i stedet for Δ:

$\int y*dx = \int dz = z2 - z1$, hvor $y = dz/dx$ = det lokalt konstante per-tal som beregnes ved differentialregning.

2.1. Talforhold, brøker

At sige ”3 kr. for 4 styk” svarer til at sige, at prisen er ”3kr. pr. 4 styk”, eller ”3kr./4styk”, eller ”3/4 kr./styk”. vi kan også sige, at kronetallet er 3/4 af styktallet. Talforholdet 3/4 kaldes også et ”pr.tal”, en brøk, en kvotient, et forhold, en ratio, en proportion osv.

En brøk er altså ikke ét tal, men et forhold mellem to tal. I middelalderen skrev vi både 2og 2/3. Den lodrette skråstreg adskiller plustal fra minustal, og bruges i dag kun i bogføring. Den skrå eller vandrette skråstreg adskiller gangetal fra divisionstal. I dag skriver vi –1 i stedet for 2, men stadig 2/3 for 2/3. Herved skjules desværre at 2/3 er et regnestykke og ikke et tal. I den moderne matematik skrives 23 = 2 + (-3), og 2/3 = 2*(3^-1), hvor tallet 3^-1 kaldes ”reciprok3”.

I stedet for at sige, at ”3 kr. pr. 4 styk” svarer til ”75 pr. 100 styk”, kan vi sige, at 3 per 4 svarer til 75 per 100 (75 per cent, procent), eller at ¾ svarer til 75/100 eller 75%.

I stedet for at sige ”? kr. for 24 styk” kan vi sige ”24 styk á ¾ kr./styk er ? kr.” Dobbeltbundtning kaldes også handelsregning eller ”á-regning” eller proportionalitet. Dobbeltbundtning giver senere anledning til det abstrakte funktionsbegreb, som sammenknytter f.eks. kg.tal og kr.tal.

2.2 Forlænge og forkorte brøker

”3 kr. pr. 4 styk” svarer til ”18 kr. pr. 24 styk” og til ”21 kr. pr. 28 styk”.

Eller kortere: ¾ kr./styk svarer til 18/24 kr./styk og 21/28 kr./styk. Eller ¾ = 18/24 = 21/28.

Tilsvarende ses ved at tage 2, 3 eller 4 gange så meget, at

3 kr. for 4styk = 6 kr. for 8 styk = 9 kr. for 12 styk = 12 kr. for 16 styk, eller at

3/4 = 6/8 = 9/12 = 12/16 = (n*3)/(n*4)

Eksempel: 3/4 = (5*3)/(5*4) = 15/20.

Læst mod højre: Brøken 3/4 forlænges med 5.

Læst mod venstre: Brøken 15/20 forkortes med 5.

Om en brøk kan forkortes afhænger af om dens tal er faktoriserbare (foldtal) eller ikke (primtal).

2.3 Primtal og foldtal

Foldtal (staktal) er foldede (stakkede) tal, altså tal som er et fold/multiplum af et andet tal (en række af bundter). Pythagoræerne brugte ordet ”aflange tal” for foldtal. Foldtal kan derfor optælles i andre tal end sig selv og et. Og foldtal kan altid omstakkes og faktoriseres eller faktoropløses:

T = 12 = 2*6 (to fold seks) = 3*4 = 4*3 = 6*2 (et trefoldigt hurra, en mangfoldig hærskare, osv.)

Eksempel: 4 mand kan grave en grøft på 6 dage, hvad kan 3 mand?

4 mand i 6 dage = 4*6 MandDage = 24 MandDage = (24/3)*3 MandDage = 8*3 MandDage = 3*8 MandDage = 3 mand i 8 dage.

Primtal er ikke-foldtal (ikke-staktal). Primtal kan hverken stakkes eller omstakkes. Primtal kan ikke optælles eller faktoriseres i andre tal end sig selv og 1: T = 13 = 13*1 = 1*13

Ethvert foldtal (staktal) kan udfoldes (omstakkes) i primtal (primfaktoriseres) på entydig måde (aritmetikkens fundamentalsætning): T = 12 = 2*2*3.

Lodret opstilling

T = 72 =	72/2	*2
	36/2	*2
	18/2	*2
	9/3	*3
	3/3	*3
	1/1	*1
T = 72 =		(2^3) * (3^2) * 1

Vandret opstilling

$$72 \rightarrow \frac{72}{2} \rightarrow \frac{36}{2} \rightarrow \frac{18}{2} \rightarrow \frac{9}{3} \rightarrow \frac{3}{3} \rightarrow 1$$

72 = 2 * 2 * 2 * 3 * 3 = (2^3) * (3^2) * 1

Eksempel. Anvendelse af primtal til opbygning af varekoder.

En varepakke kan indeholde en eller flere af varetyperne A, B, C og D, som hver kodes med et tal. Bruges primtal kan pakken kodes med produktet og derved fortælle entydigt om sit indhold.

Hvis A=2, B=3, C=5 og D=7. Kan spørgsmålet "er der C i pakke 70?" afgøres, enten ved at se om 5 går op i 70, eller ved at afsløre pakken indhold ved en primtalsfaktorisering 70 = 2*5*7 = A&C&D.

<u>Mindste fælles fold MFF</u> af to tal er det mindste tal, som begge kan foldes til:

MFF(10,4) = MFF(2*5,2*2) = 2*5*2 = 20; MFF(24,36)=MFF(2*2*2*3,2*2*3*3)=2*2*2*3*3=72

<u>Største fælles mål SFM</u> for to foldtal er det største tal, som begge kan optælles i. SFM fortæller om det fælles indhold i to varekoder. Euklids algoritme kan bruges til at finde SFM.

SFM(10,4) = SFM(2*5,2*2) = 2;   SFM(24,36) = SFM(2*2*2*3,2*2*3*3) = 2*2*3 = 12

Eratosthenes si kan også bruges til at frembringe alle primtal mindre end et givet tal.

2.4 Brøker og brøker

Brøker 1: Optælling

Første gang brøker opstår er i forbindelse med ombundtning/optælling. Optælles 1 som 2'er, 3'er, osv. fås T = 1 = (1/2)*2 = (1/3)*3 osv. Tilsvarende med T = 2 = (2/3)*3 = (2/4)*4 osv.

Her opstår decimaltal: T = 7 = (7/10)*10 = 0,7*10. Og procenttal: T = 7 = (7/100)*100 = 0,07*100 = 7%*100. Og blandede tal T = 17 = (17/10)*10 = 1 7/10 = 1.7

Her kan brøker ganges: T = 2 = (2/3)*3 = (2/3)*(3/5)*5 = (2/5)*5: 2 optælles som 3'er, der igen optælles som 5'er. Dvs. 2/3*3/5 = 2/5.

Har kan vi dividere med en brøk: T = 5 = (5/½)* ½ = (5*2)* ½ : 5 optælles i halve. Dvs. 5/(½) = 5*2

T = 6 = (6/(2/3))*(2/3) = ((6*3)/2)*(2/3): 6 optælles først i tredjedele, så i 2'ere. Dvs. 6/(2/3) = 6*(3/2)

Denne brøkform genfindes inden for statistik: "3 af 5 stemmer ja".

Brøker 2: Pr.tal

Anden gang brøker optræder er som pr.tal: 3kr. pr 4 styk = 3/4 kr./styk.

Pr.tal kan forlænges og forkortes, og omskrives til og fra per-hundrede eller procent.

Pr.tal kan sammenlægges: Ved salg skal kongen have 3 pr. 8 kr., og bispen 1 pr. 10 kr. Den Totale afgift er derfor T = 3/8 + 1/10. Ved forlængning og forkortning fås T = 3/8 + 1/10 = 30/80 + 8/80 = 38/80 = 19/40. Ved bestemmelse af mindste fælles fold gennem primfaktoropløsning fås T = 3/8 + 1/10 = 15/40 + 4/40 = 19/40, da MMF(8,10) = MMF(2*2*2,2*5) = 2*5*2*2 = 40.

Pr.tal kan ikke sammenganges eller deles

Brøker 3: Anpartsdeling

Tredje gang vi møder brøker er ved deling af en mangfoldighed, typisk en formue eller en gevinst: "A fik halvparten, B tredjeparten, og C resten. Hvor meget fik C: Fjerdeparten, 2 femteparter eller en sjettepart?"

Eksempel 1. A og B indskyder hhv. 2 kr. og 3 kr. og køber et lod til 5 kr. Gevinsten på 80 kr. skal nu deles, så A får sin part, dvs. 2 kr. pr 5 kr. eller 2/5 af 80 kr.: T = 80 kr = (80/5)*5kr = 16*5kr giver A 16*2kr = 32kr.

Altså T = 2/5 af 80 = (80/5)*2 = 16*2 = 32. Eller hurtigere: T = 2/5 af 80 = 2/5*80 = 16

Eksempel 2. A og B bidrager med hhv. 2 kr. og 3 kr. til et indskud på 5 kr. C og D bidrager med hhv. 7 kr. og 8 kr. til et indskud på 15 kr. Gevinsten på 80 kr. skal nu deles, så A&B og C&D får hver deres part, dvs. 5 kr. pr. 20 kr. og 15 pr. 20 kr.

A får 2/5 af 5/20, dvs. 2/20	80 = (80/20)*20 giver 80/20*2 = 8 kr.	T = 2/20*80 = 8
B får 3/5 af 5/20, dvs. 3/20	80 = (80/20)*20 giver 80/20*3 = 12 kr.	T = 3/20*80 = 12
C får 7/15 af 15/20, dvs. 7/20	80 = (80/20)*20 giver 80/20*7 = 28 kr.	T = 7/20*80 = 28
D får 8/15 af 15/20, dvs. 8/20	80 = (80/20)*20 giver 80/20*8 = 32 kr.	T = 8/20*80 = 32

Anparter kan sammenlægges, men resultatet afhænger af sammenhængen:

Eksempel 3. Deling af arv

En arv deles mellem A, B og C i forholdet 1:2:3.
A får således 1/6, B 2/6 og C 3/6. A og B får tilsammen 1/6 + 2/6 = 3/6

Eksempel 4. Vejet gennemsnit, blandingsregning

A får en del både af D's og E's formue.
A får 1/2 af D's 200 kr. og 1/3 af E's 300 kr. I alt 100 + 100 = 200 af 500 kr., dvs. ½ + 2/3 = 2/5
A får 1/2 af D's 200 kr. og 1/3 af E's 600 kr. I alt 100 + 200 = 300 af 800 kr., dvs. ½ + 2/3 = 3/8
Altså: ½ af 200 + 1/3 af 600 = ? af 800. Svar: ? = (½*200+1/3*600)/800 = 3/8

Brøker 4: Geometri

I geometrien optræder forholdstal f.eks. ved liniers hældning , hvor hældningstallet eller stigningstallet a beregnes som forholdet mellem y-tilvæksten og x-tilvæksten: a = Δy/Δx, og hvor vinklen A mellem linien og vandret beregnes af ligningen tan A = a/b.

Brøker 5: Sandsynlighedsregning

Et kast med to mønter har fire udfald: PP, PK, KP og KK. Sandsynligheden for at få udfaldet PP er ¼.
Sandsynligheden for at få PP ved 3 gentagne kast er da ¼ * ¼ * ¼ = 1/64.

Brøker 6: Tilvækstforhold, differenskvotient, differentialkvotient (hvis y=x^2 så er dy/dx = 2*x)

Hvis T = a*b, så er tilvæksten ΔT = Δa*b + a*Δb + Δa*Δb ≈ Δa*b + a*Δb ved små tilvækster dT
Hvis T = a*b, så er dT = da*b + a*db, eller dT/T = (da*b)/(a*b) + (a*db)/(a*b) = da/a + db/b.
Hvis T = y = x^2 = x*x, så er dT/T = dx/x + dx/x = 2*dx/x, eller dy = 2*dx/x*(x^2) = 2*x*dx.
Hvis y = x^2, så er dy/dx = 2*x, eller d/dx(x^2) = (x^2)' = 2*x (x^2 differentieret)

Vis på samme måde at (x)' = 1, (x^3)' = 3*x^2, (x^n)' = n*x^(n-1)

2.5 Tilbageregning ved stak-regning (første- og andengradspolynomier)

*(x+a)(x-a) = x^2-a^2: To tals sum * samme to tals differens = første tals kvadrat minus andet tals kvadrat)*

Fremadregning	Tilbageregning
(x + 6)(x - 6) = x^2 – 6^2 = x^2 – 36	x^2 – 36 = x^2 – 6^2 = (x + 6)(x - 6)
(x + √20)(x - √20) = x^2 – (√20)^2 = x^2 – 20	x^2 – 20 = x^2 – (√20)^2 = (x + √20)(x - √20)

*(x±a)^2 = x^2+a^2±2*a*x: Kvadratet på to tals sum/differens = summen af deres kvadrater ± deres dobbelte produkt*

Fremadregning	Tilbageregning
(x + 6)^2 = x^2 + 6^2 + 2*6*x = x^2 + 36 + 12x	x^2 + 36 + 12x = x^2 + 6^2 + 2*6*x = (x + 6)^2
(x - 6)^2 = x^2 + 6^2 - 2*6*x = x^2 + 36 - 12x	x^2 + 36 - 12x = x^2 + 6^2 - 2*6*x = (x - 6)^2

2.6 Plusning af regnestykker

Brøken 2/3 og roden √8 er ikke tal, men regnestykker.

Skal de plusses kan det ske ved at plusse dem som regnestykker eller som udregnede tal.

Da tal i princippet er polynomier (mangestakke), kan vi også ved polynomier tale om faktoriserbare polynomier og prim-polynomier.

Da polynomier ganges ved FYIS metoden, foregår faktorisering af polynomier ved "omvendt FYIS", eller ved at sætte en fælles faktor uden for en parentes.

Polynomier

FYIS ->		<- omvendt FYIS	Prim	Prim	Sammensat
(x+2)*(x+3)	=	x^2 + 5x + 6	x+2	x+3	x^2 + 5x + 6
(x+3)*(x+3)	=	x^2 + 6x + 9	x+3	x+3	x^2 + 6x + 9
(x+2)*(x-2)	=	x^2 – 4	x+2	x-2	x^2 - 4
x*(x+3)	=	x^2 + 3x	x	x+3	x^2 + 3x

Eksempel 1, plusning af regnestykker, brøker

$\frac{3}{4}$	=	$\frac{9}{12}$	4 -> $\frac{4}{2}$ -> $\frac{2}{2}$ -> 1	4 = 2*2*1
$\frac{5}{6}$	=	$\frac{10}{12}$	6 -> $\frac{6}{2}$ -> $\frac{3}{3}$ -> 1	6 = 2*3*1
$\mathbf{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}$	=	$\mathbf{\frac{19}{12} = 1\,\frac{7}{12}}$		*MFF = 2*2*3*1 = 12*

Eksempel 2

$\frac{3}{5}$	=	$\frac{18}{30}$	5 -> $\frac{5}{5}$ -> 1	5 = 5*1
$\frac{5}{6}$	=	$\frac{25}{30}$	6 -> $\frac{6}{2}$ -> $\frac{3}{3}$ -> 1	6 = 2*3*1
$\mathbf{\frac{3}{5} + \frac{5}{6}}$	=	$\mathbf{\frac{43}{30} = 1\,\frac{13}{30}}$		*MFF = 5*2*3*1 = 30*

Eksempel 3

$\frac{3}{x^2+5x+6}$		x^2+5x+6 -> $\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ -> $\frac{x+3}{x+3}$ -> 1	x^2+5x+6 = (x+2)*(x+3)*1
$\frac{4}{x^2+7x+10}$		x^2+7x+10 -> $\frac{x^2+7x+10}{x+2}$ -> $\frac{x+5}{x+5}$ -> 1	x^2+7x+10 =(x+2)*(x+5)*1
$\mathbf{\frac{3}{x^2+5x+6} + \frac{4}{x^2+7x+10}}$	=	$\mathbf{\frac{3*(x+5)}{MFF} + \frac{4*(x+3)}{MFF} = \frac{8*x+27}{(x+2)*(x+3)*(x+5)}}$	*MFF=(x+2)*(x+3)*(x+5)*

Eksempel 4

$\frac{3}{5x+6}$		5x+6 -> $\frac{5x+6}{5x+6}$ -> 1	5x+6 = (5x+6)*1
$\frac{4}{7x-10}$		7x-10 -> $\frac{7x-10}{7x-10}$ -> 1	7x-10 = (7x-10)*1
$\mathbf{\frac{3}{5x+6} + \frac{4}{7x-10}}$	=	$\frac{3*(7x-10)}{MFF} + \frac{4*(5x+6)}{MFF} = \mathbf{\frac{41x-6}{(5x+6)*(7x-10)}}$	*MFF = (5x+6)*(7x-10)*

Eksempel 5

√8 = √(2*2*2) = √ (2^2) * √2 = 2*√2

√72 = √(2*2*2*3*3) = √ (2^2) * √2 * √ (3^2) = 2*√2*3 = 6*√2

√8 + √72 = 2*√2 + 6*√2 = 8*√2.

5*√3 = √(5^2)*√3 = √25*√3 = √(25*3) = √75

Eksempel 6, plusning af brøk og rod, ikke som regnestykker, men som udregnede regnestykker

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ = 0.750 + 0.833 = 1.583

√8 + √72 = 2.828 + 8.485 = 11.313. Bemærk at √8 + √72 ≠ √ (8+72) = √80, da √80 = 8.944

2.7 Andengradsligninger

Beviset for løsningen på en andengradsligning kan føres på mange forskellige måder.

2.7.1 Stakregning

Også andengradsligninger kan løses ved tilbageregning

Fremadregning	Tilbageregning	Sammenfatning
T = (x + k)^2 = x^2 + k^2 + 2*k*x	(x + k)^2 = T	a*x^2 + b*x + c = 0
0 = x^2 + (2*k)*x + (k^2 – T)	x + k = ± √T	x^2 + (b/a)*x + (c/a) = 0
0 = x^2 + p*x + q	x = -k ± √T	x^2 + p*x + q = 0
p = 2*k og q = k^2 – T		p = b/a og q = c/a
p/2 = k og T = k^2 – q = (p/2)^2 – q	**x = - p/2 ± √((p/2)^2 – q)**	**x = - b/(2a) ± √((b/(2a))^2 – c/a)**
		x = (-b ± √(b^2 – 4*a*c))/(2*a)

2.7.2 Regneark

Ligningen $x^2 = 25$ kan løses ved tegning, afprøvning eller beregning $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

Ligningen $x^2 + 3 = 28$ kan omformes til ligningen $x^2 = 25$, som har løsningen $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

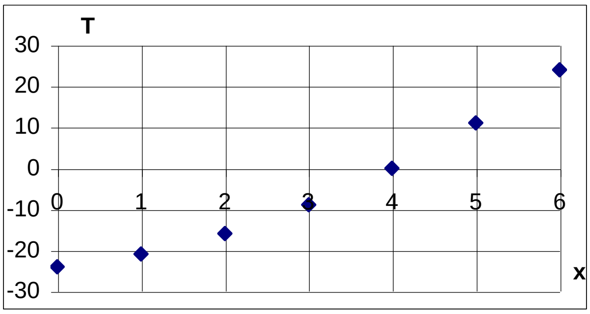
Ligningen $x^2 + 2*x + 5 = 29$ kan omformes til $x^2 + 2*x - 24 = 0$, som evt. kan løses i et regneark.

$x^2 + b*x + c = 0$

$b = 2$

$c = -24$

x	T=x^2+2*x-24
0	-24
1	-21
2	-16
3	-9
4	0
5	11
6	24



dobbeltklik og rediger

2.7.3 Kvadrat-komplementering I

Traditionelt løses andengradsligninger ved tilbageregningsmetoden <u>kvadrat-komplementering</u>:

$T = x^2 + 8x + 15$ $= (x^2 + 2*8/2*x) + (4^2 - 4^2) + 15$ $= (x^2 + 2*4*x + 4^2) - 16 + 15$ $= (x + 4)^2 - 1$ $= (x + 4)^2 - 1^2$ $= ((x + 4) + 1)((x + 4) - 1)$ $= (x + 5)(x + 3)$	$T = x^2 - 6x + 7$ $= (x^2 - 2*3*x) + (3^2 - 3^2) + 7$ $= (x^2 - 2*3*x + 3^2) - 9 + 7$ $= (x - 3)^2 - 2$ $= (x - 3)^2 - (\sqrt{2})^2$ $= (x - 3 + \sqrt{2})(x - 3 - \sqrt{2})$

Eller med bogstaver:

$$
\begin{aligned}
T &= x^2 + bx + c \\
&= (x^2 + 2*b/2*x + (b/2)^2) - (b/2)^2 + c \\
&= (x + b/2)^2 - (b^2 - 4c)/4 \\
&= (x + b/2)^2 - (\sqrt{(b^2 - 4c)}/2)^2 \\
&= (x + b/2 + \sqrt{(b^2 - 4c)}/2)*(x + b/2 - \sqrt{(b^2 - 4c)}/2) \\
&= (x + (b + \sqrt{D})/2)*(x + (b - \sqrt{D})/2), \quad \text{hvor diskriminanten } D = b^2 - 4c
\end{aligned}
$$

Nulreglen siger: $T = p*q = 0$, hvis $p = 0$ eller $q = 0$.

Dvs. $T = 0$ hvis $x + (b + \sqrt{D})/2 = 0$, eller hvis $x + (b - \sqrt{D})/2 = 0$, dvs. hvis $x = (-b \pm \sqrt{D})/2$.

$$
\begin{aligned}
T &= a*x^2 + bx + c \\
&= a*[x^2 + b/a*x + c/a] \\
&= a*[(x^2 + 2*b/(2a)*x + (b/(2a))^2) - (b/(2a))^2 + c/a] \\
&= a*[(x + b/(2a))^2 - (b^2/(4a^2) + 4ac/(4a^2)] \\
&= a*[(x + b/(2a))^2 - (b^2 - 4ac)/(4a^2)] \\
&= a*[(x + b/(2a))^2 - D/(4a^2)] \\
&= a*[(x + b/(2a))^2 - (\sqrt{D}/(2a)^2)] \quad (\text{hvor diskriminanten } D = b^2 - 4ac) \\
&= a*[(x + (b + \sqrt{D})/(2a))*(x + (b - \sqrt{D})/(2a))]
\end{aligned}
$$

Nulreglen siger: $T = p*q = 0$, hvis $p = 0$ eller $q = 0$.

Dvs. $T = 0$ hvis $x + (b + \sqrt{D})/(2a) = 0$, eller hvis $x + (b - \sqrt{D})/(2a) = 0$, dvs. hvis $x = (- b \pm \sqrt{D})/(2a)$.

Regel: Andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningen $x = (- b \pm \sqrt{D})/(2a)$. Hvis $D<0$ er løsningerne komplekse tal (som f.eks $2 + 3i$).

2.7.4 Kvadrat-komplementering II

En anden måde at udnytte kvadratkomplementering er den følgende:

Sætning. En andengradspolynomium kan omskrives ved hjælp af kvadratkomplementering:

T = x^2 + b*x + c = (x+b/2)^2 – d/4, hvor d = b^2 - 4*c kaldes diskriminanten

Bevis: T = x^2 + b*x + c
= x^2 + 2*(b/2)*x + c
= x^2 + 2*(b/2)*x + (b/2)^2 – (b/2)^2 + c
= (x+b/2)^2 - (b^2)/4 + 4*c/4
= (x+b/2)^2 – (b^2-4*c)/4
= (x+b/2)^2 – d/4, hvor d = b^2-4*c

Sætning. En andengradsligning x^2 + b*x + c = 0 har løsningen x = (-b ±√d)/2, hvor d = b^2-4*c

Bevis: T = x^2 + b*x + c = (x+b/2)^2 – d/4 = 0
(x+b/2)^2 = d/4
x+b/2 = ±√(d/4)
x = -b/2 ±(√d)/2
x = (-b±√d)/2

Eksempel 1. Ligningen x^2 + 2x + 1 = 16 har formen x^2 + 2x – 15 = 0 og dermed diskriminanten

d = b^2-4*c = 2^2-4*(-15) = 64

x = (-b±√d)/2 = (-2±√64)/2 = (-2±8)/2 = 3 eller –5

Eksempel 2. Ligningen x^2 + 2x + 1 = -9 har formen x^2 + 2x +10 = 0 og dermed diskriminanten

d = b^2-4*c = 2^2-4*10 = -36

x = (-b±√d)/2 = (-2±√-36)/2 = (-2±6*i)/2 = -1+3*i eller –1-3*i, hvor det komplekse tal i er betemt ved at i = √-1 eller i^2 = -1.

Bemærkning. Grafisk kan andengradsligningens løsninger aflæses som dens parabels skæring med x-aksen i et koordinatsystem. De komplekse løsninger kan aflæses som skæringspunkterne for den imaginære tvillingeparabel, som fremkommer ved at parallelforskyde parablen så toppunktet bliver parablens toppunkt spejlet i x-aksen.

2.8 Roduddragning ved kvadrat-komplementering

Kvadrat-komplementering kan også anvendes ved roduddragning

Eksempel 1. √228 = x

x er tocifret og sættes derfor til x = a + b, f.eks. x = 20 + 7

(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)*b

Dvs. 228 omstakkes i først a^2 og dernæst i (2a + b)*b og så måske en rest.

	228	=	a^2 + (2a + b)*b	= (a+b)^2
a= 10	100	=	a^2	
	128	=	(2a + b)*b	= 20*b+b^2; 128 = 128/20*20 = 6*20 + rest
				Gæt: b = 6, for meget da 20*b+b^2 = 156
				Gæt: b = 5, OK da 20*b+b^2 = 100+25 = 125
b = 5	125	=	(2a + b)*b	
	3			

SVAR: 228 = (10+5)^2 + 3 = 15^2 +3 **Dvs.** √228 = 15,?

Eksempel 2. √ 75321= x

x er trecifret og sættes derfor til x = a+b+c, f.eks. x = 300 + 20 + 7

(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + (2ab + b)*b + (2a + 2b + c)*c

Dvs. 75321 omstakkes i først a^2 og dernæst i (2ab + b)*b og dernæst i (2a + 2b + c)*c og så måske en rest

	75321	=	a^2+(2a+b)*b+(2a+2b+c)*c	= (a+b+c)^2
a= 200	40000	=	a^2	
	35321	=	(2a+b)*b	= 400*b+b^2; 35321 = 35321/400*400 = 88*400 + rest
				Gæt: b = 80, for meget da 400*b+b^2 = 38400
				Gæt: b = 70, OK da 400*b+b^2 = 32900
b = 70	32900	=	(2a+b)*b	
	2421	=	(2a+2b+c)*c	= 540*c+c^2; 2421 = 2421/540*540 = 4*540 + rest
				Gæt: c = 4, OK da 540*c+c^2 = 2176
C = 4	2176	=	(2a+2b+c)*c	
	245			

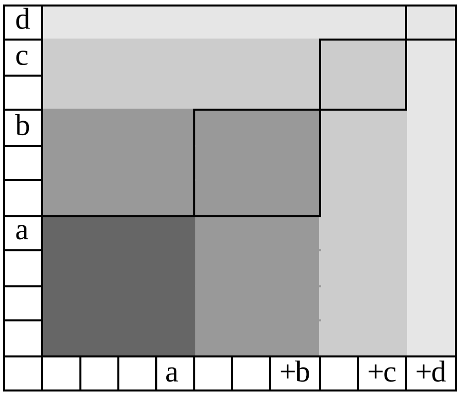
SVAR: **75321 = (200+70+4)^2 + 245 = 274^2 +245** **Dvs.** √75321 = 274,?

Eksempel 3. Geometrisk illustration af roduddragning:

T = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab

T = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2 bc

T = (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2 bc + 2ad + 2bd + 2cd



A2 OPGAVER

Spørgsmål: Hvordan sammenlægges per-tal? Svar: $/dag-tallet a skal ganges med dag-tallet b før det kan tillægges det totale $-tal T: T2 = T1 + a*b. 2dage @ 6$/dg + 3dage @ 8$/dag = 5dage @ 7.2$/dag1/2 af 2 coke + 2/3 af 3 coke= 3 af 5 coke= 3/5 af 5 coke1/2 af 4 coke + 2/3 af 3 coke= 4 af 7 coke= 4/7 af 7 coke

Faglige opgaver

1. Du tegner et rektangel med en vandret og lodret side og en diagonal. Du måler længden af den vandrette og lodrette side, samt vinklen mellem den vandrette side og diagonalen. Du ombundter den lodrette side i vandrette sider. Du forlænger den vandrette side med 10 cm 3 gange. Hver gang forlænges den lodrette side op til diagonalen forlængelse før den bestemmes. Find svaret både ved tælling (måling) og ved beregning.

2. Hvad er Eratosthenes si og Euklids algoritme?

3. Hvad er "regnepenge"?

4. Du har modtaget et brev fra en gymnasielærer, der klager over at elverne ved begyndelsen af 1.g siger at ½+2/3 = 3/5. Han spørger om I har afskaffet brøkundervisning i folkeskolen. Skriv et svar til ham.

5. Jeres team er blevet bedt om at lave et udkast til tre undervisningsforløb i brøker, et til begyndertrinnet, et til mellemtrinnet, og et til sluttrinnet. Forløbet skal strække sig over 3-4 uger á 4 timer/uge på hvert trin. Udkastet skal være så detaljeret, at det vil kunne videreføres af andre, hvis I i perioden er borte på kursus eller andet. Udkastet skal omfatte en problemliste, en emneliste, en aktivitetsliste samt en opgaveliste. Udkastet skal referere til passende didaktisk teori og læringsteori. Nogle af opgaverne skal være træningsopgaver udtaget af den vedlagte Excel-fil. Det anbefales at studere, hvordan denne Excel-fil er opbygget.

Rutineopgaver

1. Handelsregning med terninger: Kast to terninger, en hvid og en rød. Resultatet (hvid:3) og (rød:5) fortolkes som 3 kg koster 5 kr. Gentag kastet og opbyg på denne måde en blanding. Gentag kastet 10 gange og udregn undervejs den samlede gennemsnitlige per-tal. Indtegn forløbet dels som stakke, dels som tilvækst-trekanter.

2. Repeter nogle af de ovenstående faglige opgaver som rutineopgaver.

3. Udprint selv rutineopgaver i brøker fra Excel-arket "brk".

4. Find selv opgaver ved at besøge den lokale amtscentral for undervisningsmidler for at finde en ældre lærebog med opgaver i proportionalitet og brøker, samt ved at finde opgaver fra den tidligere mellemskole- og realskoleeksamen.

Didaktisk opgave

1. Handelsregning med terninger: Kast to terninger, en hvid og en rød. Resultatet (hvid:3) og (rød:5) fortolkes som 3 kg á 5 kr/kg. Gentag kastet 10 gange og udregn undervejs den samlede gennemsnitlige per-tal. Indtegn forløbet dels som stakke, dels som tilvækst-trekanter. Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

2. Vend opgaven om og tag i stedet udgangspunkt i en feberkurve for totalen som er stykkevis lineær.