GE

Geometri: Jordmåling

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

“Geometri - nedefra” betyder geometri som fortællinger om social praksis, i dette tilfælde om “jord-måling”, som det græske ord “geo-metri” direkte kan oversættes til. Jorden er det vi lever af, og det vi lever på. Vi deler jorden imellem os ved at trække delelinier. Herved opdeles jorden i områder begrænset af linier, mangekanter. Hvis disse grænseskel forsvinder er det vigtigt at kunne genetablere dem, og denne genetablering af linier og hjørner forudsætter at disse kan måles. I det gamle Egypten gik Nilen således over sine bredder engang om året og medbragte gødning til markerne. Efter at have trukket sig tilbage skulle skellene så genetableres.

Geometri nedefra kan forstås som det modsatte af geometri oppefra, der udleder geometrien fra metafysiske sandheder, aksiomer.

Det efterfølgende materiale er ikke en traditionel lærebog, men snarere en aktivitetsvejledning med forslag til en række aktiviteter som læseren kan udføre og rapportere. Det er altså tanken at læseren opbygger sin egen lærebog. Dog medtages enkelte forslag til definitioner og regler. Regler kan godtgøres enten gennem beviser eller overbevisning. Det anbefales at arbejde med det sidste ud fra standardopgaven: “Prøv at overbevis en anden om reglens gyldighed”. Ligeledes er det tanken at læseren udfører egne illustrationer, hvorfor der kun er medtaget yderst få illustrationer i materialet. Som supplering anbefales Politikens Matematiske Opslagsbog.

De følgende øvelser bør udføres både på papir, på gulv og på jord, samt om muligt på computer med anvendelse af programmer som GeomeTricks, GeoMeter og Microsoft Power Point. Der føres rapport over spørgsmål, teknikker, opfindelser og opdagelser vi møder undervejs. God arbejdslyst!

GE0 Jorddeling

I dette kapitel vil vi se på en række traditionelle jord-delings problemer. Der gives ikke løsninger, men problemerne kan forhåbentlig tjene som motivation for de følgende kapitler.

Grundproblem: Hvordan deles et område?

Øvelse 1. To personer stiller sig tilfældige steder på en begrænset gulvflade og får til opgave at dele den mellem sig. De to personer kan evt. repræsentere grupper af forskellig størrelse. Hvilke forskellige delingsprincipper kan tænkes? Bemærkning: Tilfældig placering i et rum kan evt. opnås med en terning: Jeg stiller mig med ryggen og højre skulder mod væggen i et hjørne. Herefter kaster jeg en terning 4-6 gange. Terningen fortæller mig hvor mange skridt jeg skal gå skiftevis frem og til venstre. Tilsvarende med de andre deltagere.

Øvelse 2. Udfør en deling ud fra delingsprincippet: Lige meget til alle.

Øvelse 3. Udfør en deling ud fra delingsprincippet: Lige langt til grænsen.

Øvelse 4. Udfør en deling ud fra delingsprincippet: Afstandene til grænsen skal forholde sig som 1:2, da der bor dobbelt så mange, mennesker i det andet område.

Øvelse 5. Gentag øvelse 1-4, men nu med tre personer.

Øvelse 6. Gentag øvelse 1-4, men nu med mere end tre personer.

GE1 Mangekanter

Grundproblem: Hvordan italesættes og italsættes afgrænsning og opdeling af områder.

Øvelse 1. Afsæt en trekant. Mål trekanten med henblik på at genetablere den. Slet trekanten. Genetabler trekanten på baggrund af målene, dels et vilkårligt sted, dels samme sted. Indfør navne (definitioner) på baggrund af denne øvelse.

Øvelse 2. Afsæt en firkant med skæve vinkler. Mål firkanten med henblik på at genetablere den. Slet firkanten. Genetabler firkanten på baggrund af målene, dels et vilkårligt sted, dels samme sted.

Øvelse 3. Afsæt en trekant. Opdel den i to retvinklede trekanter. Mål de retvinklede trekanter med henblik på at genetablere dem. Slet trekanterne. Genetabler trekanterne på baggrund af målene, dels et vilkårligt sted, dels samme sted.

Øvelse 4. Afsæt to parallelle linier. Mål liniernes afstand.

Øvelse 5. Hvad er A4-papir? Og hvad er A1, A2, A3, A5 etc. ?

Øvelse 6. Længde kan måles på mange måder. I dag bruges normalt meter. Tidligere brugtes andre mål. Hvilke? Bruges metersystemet over hele verden? Hvordan er sammenhængen mellem meter og andre mål?

Øvelse 7. Kan vinkler måles på andre måder end med grader? Hvorfor er en ret vinkel 90 grader og ikke 100 grader?

Øvelse 8. Find regler for de definerede begreber og overbevis en anden om, at disse regler er sande.

DEFINITION 1. Et punkt er

DEFINITION 2. En ret linie er

DEFINITION 3. En mangekant eller polygon er

DEFINITION 4. Et mangekants omkreds er

DEFINITION 5. En vinkel er

DEFINITION 6. En mangekants stykker er

DEFINITION 7. En diagonal er

DEFINITION 8. Et rektangel er

DEFINITION 9. En retvinklet trekant er

DEFINITION 10. Afstanden mellem et punkt og en linie er

DEFINITION 11. Parallelle linier er

DEFINITION 12. En normal er

DEFINITION 13. En konveks mangekant er

Regel 1. En mangekant kan opdeles i

Regel 2. En trekant kan opdeles i

GE2 Trekanter
Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes trekanter?

Øvelse 1. Afsæt en trekant og indfør navne for en trekants forskellige bestanddele. Hvor mange mål kan vi nøjes med for at kunne afsætte en trekant entydigt? Hvor mange forskellige trekantstyper findes der?

Øvelse 2. En trekant kan opdeles af forskellige linier. Navngiv nogle af disse og diskuter hvilke delingsprincipper de forskellige linier kunne være udtryk for.

Øvelse 3. Find regler for de navngivne linier i øvelse 2 og overbevis en anden om, at disse regler er sande.

Øvelse 4. Afsæt en ligebenet trekant. Gælder der særlige regler for ligebenede trekanter?

Øvelse 5. Afsæt en ligesidet trekant. Gælder der særlige regler for ligesidede trekanter?

Øvelse 6. Klip en trekant ud og hæng den op i et hjørne. Indtegn lodlinien, hvordan ligger den? Skift til de andre hjørner. Hvor er trekantens tyngdepunkt?

Øvelse 7. Fodpunktet for en delingslinie i en trekant er liniens skæringspunkt med en side. Gælder der specielle regler for fodpunkter for højder, medianer, vinkelhalveringslinier og midtnormaler?

Øvelse 8. En trekant kan indpakkes i et rektangel på forskellige måder. Hvilket rektangel har den mindste omkreds?

Øvelse 9. Afsæt en trekant ABC. Flyt A til A* uden at ændre omkreds. Hvordan vil de nye punkter ligge?

DEFINITION 1. En trekant eller et trehjørne (engelsk: triangle) er

DEFINITION 2. En trekants tre vinkler betegnes

DEFINITION 3. En trekants tre sider betegnes

DEFINITION 4. En spidsvinklet trekant er

DEFINITION 5. En stumpvinklet trekant er

DEFINITION 6. I trekant ABC er højden h_a

DEFINITION 7. I trekant ABC er medianen m_a

DEFINITION 8. I trekant ABC er vinkelhalveringslinie v_a

DEFINITION 9. I trekant ABC er midtnormal n_a

DEFINITION 10. En SSV trekant er en trekant, hvori kendes to sider og en vinkel. Tilsvarende defineres en SVV og en SSS trekant.

Regel 1. I en trekant er vinkelsummen.

Regel 2. I en trekant skærer højderne hinanden

Regel 3. I en trekant skærer vinkelhalveringslinierne hinanden

Regel 4. I en trekant skærer medianerne hinanden

Regel 5. I en trekant skærer midtnormalerne hinanden

Regel 6. I en trekant har højdernes skæringspunkt følgende egenskab:

Regel 7. I en trekant har vinkelhalveringsliniernes skæringspunkt følgende egenskab:

Regel 8. I en trekant har medianernes skæringspunkt følgende egenskab:

Regel 9. I en trekant har midtnormalernes skæringspunkt følgende egenskab:

GE3 Retvinklede trekanter

Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes en retvinklet trekant?

Øvelse 1. Afsæt et rektangel og opdel det i to retvinklede trekanter ved hjælp af en diagonal. Indfør navne for den retvinklede trekants forskellige bestanddele.

Øvelse 2. Afsæt et rektangel og opdel det i to retvinklede trekanter ved hjælp af en diagonal. Mål vinklerne. Mål diagonal- og sidelængderne, dels i cm, dels i diagonallængder (i procent af diagonalen). Sammenlign med lommeregnerens sin og cos knap.

Øvelse 3. Afsæt et rektangel og opdel det i to retvinklede trekanter ved hjælp af en diagonal. Mål vinklerne. Mål diagonal- og sidelængderne, dels i cm, dels i gulvlængder (i procent af gulvet, dvs. den vandrette side). Sammenlign med lommeregnerens tan knap.

Øvelse 4. Afsæt på millimeterpapir en kvartcirkel med radius 10 cm, eller afsæt på gulv en kvartcirkel med radius 1 meter. Indtegn en række retvinklede trekanter ABC med A i cirklens centrum, B på cirkelbuen og C på 0 graders linien. A skal gennemløbe graderne 10, 20, 30 op til 80. Tabellæg for hver A-værdi længden af BC og AC samt forholdet BC/AC. Sammenlign med lommeregnerens sin, cos og tan-knap.

Øvelse 5. Afsæt en retvinklet trekant ud fra opgivne mål. Hvad er det mindste antal mål vi kan nøjes med? Hvor mange forskellige typer retvinklede trekanter findes der? vi kan måle sig til de ukendte mål, men kan vi også regne sig til de ukendte mål?

Øvelse 6. Afsæt en tilfældig trekant og opdel den i to retvinklede trekanter. Mål stykkerne i de retvinklede trekanter og beregn dem bagefter. Angiv til sidst målene på den oprindelige trekants stykker, og kontroller ved eftermåling.

Øvelse 7. Afsæt en kendt trekant og opdel den i to retvinklede trekanter. Mål stykkerne i de retvinklede trekanter og beregn dem bagefter.

Øvelse 8. Afsæt en kendt SVV trekant. Mål og beregn de øvrige stykker.

Øvelse 9. Afsæt en kendt SSV trekant. Mål og beregn de øvrige stykker.

Øvelse 10. Afsæt et kendt rektangel. Mål og beregn diagonalens længde og vinkler.

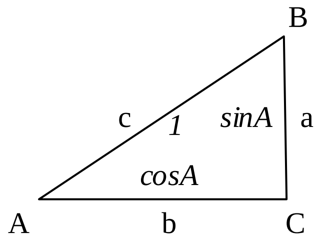
Øvelse 11. Afsæt ved hjælp af tangens forskellige kendte vinkel størrelser, f.eks. 27°, 42° og 133°.

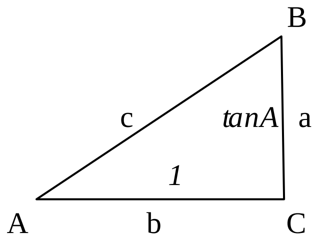
Øvelse 12. Afsæt et rektangel og afsæt nye rektangler med samme diagonal. Hvordan ligger de?

Øvelse 13. Brug et PC-regneark til at opsætte de forskellige typer trekantsberegning.

GRÆSKE DEFINITIONER: I en retvinklet trekant kaldes de to korte sider kateter, og den lange hypotenusen.

ARABISKE DEFINITIONER: Trekant ABC er retvinklet med C som den rette vinkel. b er vandret og a lodret. Gulvsiden b kaldes cosinus-siden set fra A. Vægsiden a kaldes sinussiden eller tangens-siden set fra A. Sinus- og cosinus-siden angives i procent af skråvæggen c, eller med c som måleenhed ("ombundtning" i c'ere: a = a/c*c = sinA*c). Tangens-siden angives i procent af gulvet b.





sinA = a/c

cosA = b/c

tanA = a/b

Beregningsproblemet

I en retvinklet trekant er der tre ubekendte stykker. Beregning kræver derfor tre ligninger.

Grækerne kendte kun to, en vinkel- og en areal-ligning (Pythagoras):

A+B = 90 a^2 + b^2 = c^2

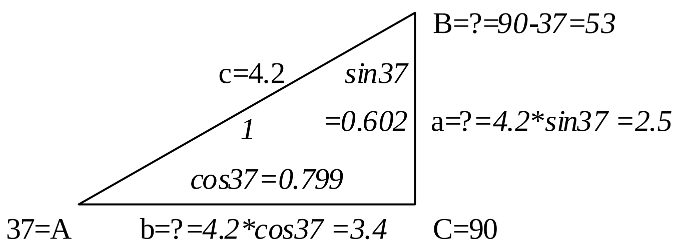
Araberne kendte tre, en vinkel- og to sideligninger:

A+B = 90 a = c*sinA b = c*cosA

I de følgende beregninger benyttes trekantens to sider: ydersiden med de faktiske tal og indersiden med procenttallene. Alternativt kunne vi benytte ligningsskemaer, se tillægget.

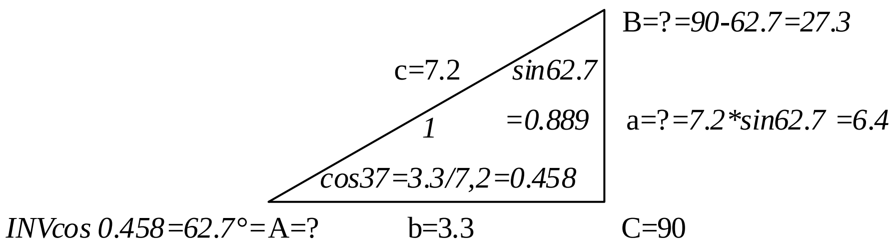
Eksempel 1. *Givet SVV, Find SSV.*

I trekant ABC er C=90°, A=37° og c=4.2. Find a=?, b=? og B=?



Eksempel 2. *Givet SSV, Find SVV.*

I trekant ABC er C=90°, b=3.3 og c=7.2. Find a=?, A=? og B=?



GE4 Forskellige anvendelser

Problem 1: Hvordan bestemmes højden af noget umåleligt, f.eks. en flagstang?

Problem 2: Hvordan flyttes en ting om et hjørne?

Problem 3: Hvordan beregnes en genveje?

Problem 4: Hvordan flyttes en ting hurtigst fra et punkt i et område til et punkt i et andet område, når vi bevæger sig med forskellig hastighed i de to områder?

Problem 5: Hvordan beregnes de forskellige åbninger ved en dør, der står på klem?

Problem 6: Hvordan anlægges en vej op af en stejl bjergside?

Problem 7: Hvor stejlt kan en stige stilles for ikke at knuse glas eller is?

Problem 8: Hvordan beregnes astronomiske afstande?

Problem 9: Hvordan skal en trekantet bro over en flod dimensioneres?

Problem 10: Under en gyngetur, hvornår skal vi hoppe af for at komme længst væk?

Øvelse 1. Bestem højden af en høj ting (en flagstang) på to forskellige måder: Den lette, hvor vi kan komme helt hen til tingen, og den svære, hvor vi ikke kan. Bestem p samme måde bredden af en bred ting (en husmur eller en "flod"). Kontroller om muligt beregningerne ved eftermåling.

Øvelse 2. Afsæt en gang med bredden 2 meter, som danner et knæk på 90 grader. En pind skal drejes rundt om hjørnet uden at løftes. Hvad er pindens maksimale længde? En kasse med bredden 1 meter skal drejes rundt om hjørnet uden at løftes. Hvad er kassens maksimale længde? Brug evt. andre mål.

Øvelse 3. En gang med bredden 3 meter danner et knæk på 90 grader og fortsætter med en bredde på 4 meter. En pind skal drejes rundt om hjørnet uden at løftes. Hvad er pindens maksimale længde? En kasse med bredden 2 meter skal drejes rundt om hjørnet uden at løftes. Hvad er kassens maksimale længde.

Øvelse 4. En skat kan findes ved først at rejse 4 meter mod øst, så 2. 5 meter mod syd, og endelig 3. 1 meter mod vest. Find en genvej til skatten.

Øvelse 5. En skat kan findes ved først at rejse 4 meter mod øst i 32 grader nordlig retning, så 2. 5 meter mod syd i 68 grader vestlig retning, og endelig 3. 1 meter mod vest i 14 grader nordlig retning. Find en genvej til skatten.

Øvelse 6. En båd roes over en 50 meter bred flod med en hastighed på 20 meter/minut. Strømmen i floden er på 10 meter/minut. Hvilken vinkel skal der ros i for at lande lige over for på den modsatte side? Hvor lang tid tager turen?

Øvelse 7. Afsæt en ret linie samt to punkter på hver side af linien. Gå fra det ene punkt til det andet med skridt svarende til 1 skolængde. 1 sekund svarer til 1 skolængde i det ene område og 2 skolængder i det andet. Find den hurtigste rute. Kunne den hurtigste rute regnes ud? Brug evt. et PC-regneark til at beregne forskellige ruter. Der gælder en regel for indfalds- og brydningsvinklen i det punkt på grænselinien, som den hurtigste rute passerer. Hvilken?

Øvelse 8. Åben en dør på klem. Der viser sig nu tre åbninger, en vinkelret på væggen, en parallel med væggen og en parallel med døren. Hvor store er disse åbninger? Hvor meget vil 10 grader ekstra forøge disse åbninger med?

Øvelse 9. Tip en plade 30 grader og indtegn en vej op, der højst må stige 20 grader (en "hårnåle"-vej). Gentag øvelsen med andre gradtal. Hvor meget øges tyngdens træk i en bil, når vejens stigning øges 10 grader?

Øvelse 10. Anbring en tung bog på en vægtskål. Vip den til forskellige stillinger. Hvad sker der med vægten? Kunne dette resultat beregnes? Hvor meget er trykket mod en lodret hånd, der støtter den?

Øvelse 11. Konstruer og beslast en trekantet bro og kontroller trykket mod underlaget ved at anbringe broen på to vægte. Kan disse tal beregnes?

Øvelse 12. Afstande i verdensrummet kan ikke måles, men må beregnes. Hvordan beregnes jordens radius? Hvor langt er der til månen? Hvad er månens radius? Hvor langt er der til solen? Hvad er solens radius?

Øvelse 13 (svær). En person sidder i en gynge, der er ophængt i reb, der er 3 meter lange. Gyngen trækkes ud så den befinder sig i højden 1 meter over bundpunktet. Hvilken vinkel svarer dette til? Slippes gyngen kan hastigheden v beregnes ud fra formlen: v^2 = 19.6*h, hvor h er afstanden fra maksimalhøjden i yderpositionen. Hastigheden består af en vandret og en lodret del. Find disse. Hvor skal vi springe af for at komme længst væk? (Efter springet vil hastighedens vandrette del være uændret, medens den lodrette del vil vokse i nedadgående retning med 9.8 m/s hvert sekund).

DEFINITION 1. En indfaldsvinkel er

DEFINITION 2. En brydningsvinkel er

Regel 1. Den hurtigste rute mellem to punkter i to forskellige områder med hastighed v1 og v2 vil opfylde brydningsloven i knækpunktet mellem de to områder:

sin(indfaldsvinkel)/sin(brydningsvinkel) =v1/v2.

GE5 Areal, flademål, dækningsgrad
Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes størrelsen af et område?

Øvelse 1. Et stykke ternet A4-papir dækker et vist område (omfanger en vis flade). Hvordan kan denne flades omfang, areal, dækningsgrad måles?

Øvelse 2. Et stykke ternet A4-papir deles ved en tværgående diagonal. Hvad er arealet af en retvinklet trekant?

Øvelse 3. Et stykke ternet A4-papir deles ved linier i tre trekanter. Hvad er arealet af en almindelig trekant? Gælder denne regel også for stumpvinklede trekanter?

Øvelse 4. Afsæt en trekant og bestem dens areal.

Øvelse 5. Afsæt en trekant og opdel den i 2 dele med samme areal. I 3 dele. I 4 dele.

Øvelse 6. Samme som 5, men nu skal delelinien være en normal til grundlinien.

Øvelse 7. Byg en trekant op med mønsterbrikker. Andre figurer med samme brikker vil da have samme areal.

Øvelse 8. En højde kan være svær at måle præcist. Kan en trekants areal beregnes alene ud fra sider og vinkler?

Øvelse 9. En vinkel kan være svær at måle præcist. Kan en trekants areal beregnes alene ud fra sider?

Øvelse 10. Find nogle andre flademål, der bruges andre steder og til andre tider.

Øvelse 11. Brug et PC-regneark til at opsætte de forskellige typer areal-beregning.

DEFINITION 1. En areal-enhed er et kvadrat (en flise) på 1x1. 1m x 1m = 1 m^2

Regel 1. Et rektangel med sidelængder a og b har et areal på A =

Regel 2. En retvinklet trekant med kateter a og b har et areal på A =

Regel 3. En trekant med højde h og grundflade g har et areal på A =

Regel 4. Trekant ABC's areal kan beregnes ved hjælp af sinus-formlen: A = 1/2*a*b*sinC.

Regel 5. Trekant ABC's areal kan beregnes ved hjælp af Herons' formel: A^2 = s*(s–a)*(s–b)*(s–c), hvor s = 1/2*(a+b+c) = den halve omkreds.

GE6 Formændring 1: Skalering
Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes forstørrelse eller formindskelse af en trekant?

Øvelse 1. Når vi går væk fra en trekant, synes den at ændre størrelse, men ikke form. Afsæt en trekant ABC (den må gerne være retvinklet). Afsæt trekant AB*C*, hvor sidelængderne er halvt så store. Hvad gælder om vinklerne? Hvad gælder om siderne? Hvad gælder om arealet?

Øvelse 2. Afsæt en trekant ABC og forstør den med 20% til 120% (skalerings-procent og faktor) til trekant AB*C*. Tegn gennem B og C linier parallelle med b og c (paralleltransversaler). Disse linier skærer a i B** og C**. Hvor store er trekanterne ABC, AB*C*, BB*B** og CC*C** i forhold til hinanden?

Øvelse 3. Afsæt en trekant ABC. Afsæt den på ny, men nu i størrelsesforholdet 1:2. Hvad er skalerings-procenten og faktoren?

Øvelse 4. Afsæt en trekant på et gulv. Tegn trekanten på papir i størrelsesforholdet 1:10.

Øvelse 5. Afsæt en trekant på papir. Tegn trekanten på et gulv i størrelsesforholdet 1:10.

DEFINITION 1. I en trekant gøres alle sidelængder k gange så stor. Tallet k kaldes da skalerings-faktor, og k-1 kaldes skalerings-procent.

Regel 1. Ved skalering af en trekant bevares vinklernes størrelse og sidernes retning.

Regel 2. Hvis to trekanter er ensvinklede er den ene en skalering af den anden.

Regel 3. Om trekant ABC og trekant AB*C* gælder, at AB*=k*AB (AB* "ombundtes" i AB'ere: AB* = AB*/AB*AB = k*AB) og AC*=k*AC. Trekant AB*C* vil da være en skalering af trekant ABC. BB* = (k-1)*AB (forudsat at k>1).

GE7 Formændring 2: Arealbevarelse

Grundproblem: Hvordan kan en figur ændre form uden at arealet ændres (mageskifte)?

Øvelse 1. Afsæt en trekant ABC. Afsæt trekanter A*BC med samme areal. Hvordan vil punkterne A* ligge?

Øvelse 2. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt trekanter A*B*C med samme areal. Hvordan vil punkterne A* og B* ligge?

Øvelse 3. Afsæt et rektangel ABCD. Afsæt rektangler AB*C*D* med samme areal. Hvordan vil punkterne B*, C* og D* ligge?

Øvelse 4. Afsæt to rektangler med samme areal idet den længste side øges med 30%.

Øvelse 5. Afsæt to retvinklede trekanter med samme areal idet højden øges med 25%.

Øvelse 6. Afsæt to trekanter med samme areal idet højden formindskes med 40%.

Øvelse 7. Afsæt et rektangel ABCD. Afsæt et kvadrat AB*C*D* med samme areal.

Øvelse 8. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt arealet a^2, samt et rektangel med arealet a^2, hvis ene sidelængde er c. Afsæt arealet b^2, samt et rektangel med arealet b^2, hvis ene sidelængde er c. Hvad er det samlede areal af disse to rektangler?

DEFINITION 1. Et rektangel med siderne b og c skal ændres til et rektangel med siderne a og s, så arealet bevares: a*s = b*c eller a/b = c/s. s kaldes da en fjerdeproportional til a, b og c.

DEFINITION 2. Et rektangel med siderne b og c skal ændres til et kvadrat med siden s, så arealet bevares: s^2 = b*c eller a/s = s/b. s kaldes da en mellemproportional til a og b, eller et geometrisk gennemsnit af a og b.

DEFINITION 3. I trekant ABC forstørres siden BC med faktoren k til B*C. Linien gennem B parallel med B*A skærer AC i A*. A*C kaldes da et k-snit til AC og BC.

Regel 1. En fjerdeproportional s til a, b og d er et d/a-snit til a og b.

Regel 2. En trekant bevarer areal ved

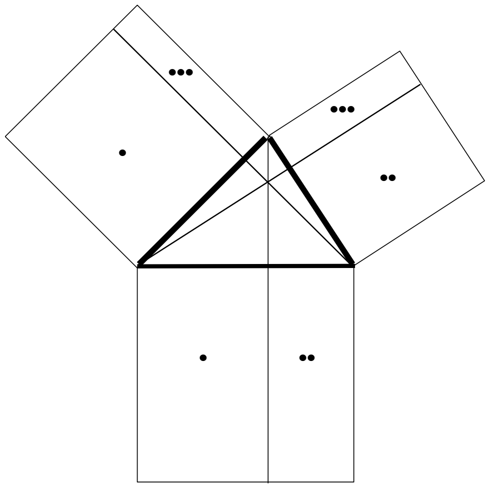
Regel 3. En retvinklet trekant bevarer areal ved

Regel 4. En rektangel bevarer areal ved

Regel 5. En mellemproportional s til a og b kan konstrueres som højden til halvcirkelbuen over a+b i delepunktet.

B8 Trekantens ydre sidekvadrater, Pythagoras

Grundproblem: Hvordan kan vi sikre sig at en trekant er retvinklet? Hvad gælder for en trekants ydre sidekvadrater?



Øvelse 1. Afsæt en spidsvinklet trekant ABC med ydre sidekvadrater. Afsæt de tre højder. Højderne vil opdele de ydre sidekvadrater i 3x2 dele. Hvad gælder der om disse dele?

Øvelse 2. Afsæt en retvinklet trekant ABC med ydre sidekvadrater. Afsæt højden. Højden vil opdele et af de ydre sidekvadrater i to dele. Hvad gælder der om disse dele?

Øvelse 3. Afsæt en stumpvinklet trekant ABC med ydre sidekvadrater. Afsæt de tre højder. Højderne vil opdele de ydre sidekvadrater i 3x2 dele. Hvad gælder der om disse dele?

Øvelse 4. Indtegn en trekant med højder og ydre kvadrater på pap. Klip ud og vej som overbevisningsmåde.

Øvelse 5. Benyt teknikken for arealbevarelse som overbevisningsmåde.

Øvelse 6. Afsæt et rektangel på et gulv, og brug diagonalen til at kontrollere vinklerne.

Øvelse 7. Find nogle hele tal a, b og c, der opfylder kravet a^2 + b^2 = c^2.

Øvelse 8. Lav af en snor en lukket løkke med knuder til at kontrollere, om en vinkel er ret.

Øvelse 9. Brug et PC-regneark til at opsætte diagonalberegning i et rektangel.

DEFINITION 1. Trekant ABC's ydre sidekvadrater er kvadraterne a^2, b^2 og c^2.

Regel 1. I en trekant deler højderne trekantens ydre kvadrater i ens "genbo-arealer".

Regel 2. I trekant ABC er c^2 = a^2 + b^2 - 2*a*b*cosC

Regel 3. I den retvinklede trekant ABC (C ret) er c^2 = a^2 + b^2 (Pythagoras' læresætning)

Regel 4. I trekant ABC er C ret hvis c^2 = a^2 + b^2

GE9 Den ikke-retvinklede trekant

Grundproblem: Hvordan beregnes de ukendte stykker i en ikke-retvinklet trekant?

Øvelse 1. Afsæt en kendt SSS trekant. Mål og beregn de tre ukendte vinkler.

Øvelse 2. Afsæt en kendt SSV trekant. Mål og beregn de tre ukendte stykker.

Øvelse 3. Afsæt en kendt SVV trekant. Mål og beregn de tre ukendte stykker.

Bemærkning. En VVV trekant er kun en VV trekant, da den sidste vinkel ikke kan vælges frit, men er fastlagt af de to andre. Der mangler således oplysning om en side, hvorved trekanten bliver en SVV trekant.

Regel 1. I trekant ABC gælder cosinus-relationerne:

a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*cos A
b^2 = a^2 + c^2 - 2*a*c*cos B
c^2 = a^2 + b^2 - 2*a*b*cos C,

Regel 2. I trekant ABC gælder sinus-relationerne:

a/sinA = b/sinB = c/sinC (pas på vinklerne! hvorfor?)

GE10 Trekantens ydre basislængder og basisvinkler

Grundproblem: Hvordan kan en trekant opmåles fra en ydre basislængde? Hvordan kan en trekant genetableres og beregnes på baggrund af ydre basismål?

Øvelse 1. Afsæt en trekant ABC. Afsæt udenfor trekanten (evt.på den anden side af "floden") et ydre basisliniestykke med kendt længde KL. Hvordan kan punktet A fastlægges fra KL?

Øvelse 2. Fjern trekant ABC og genetabler den på baggrund af de ydre basismål.

Øvelse 3. Hvordan kan trekant ABC's ydre basismål (længder eller vinkler) danne grundlag for beregninger af trekantens stykker, højder og areal? Kontroller ved eftermåling.

Øvelse 4. Brug et PC-regneark til at opsætte beregning af trekantens stykker, højder og areal på baggrund af de ydre basismål.

DEFINITION 1. Et punkt A's basislængder i forhold til et basis-liniestykke KL er længderne af liniestykkerne AK og AL.

DEFINITION 2. Et punkt A's basisvinkler i forhold til et basis-liniestykke KL er vinklerne AKL og ALK.

Regel 1. Basisvinklerne kan beregnes ud fra basislængderne på følgende måde:

AKL =

ALK=

Regel 2. Basislængderne kan beregnes ud fra basisvinklerne på følgende måde:

h = højden fra K =

AK =

AL =

Regel 3. En retvinklet trekant ABC betragtes fra en ydre basislinie KL med længde k.

Hjørnernes basislængder betegnes: KA=a1, KB=b1, KC=c1, LA=a2, LB=b2, LC=c2.

Hjørnernes basisvinkler betegnes: AKL=A1, ALK=A2, BKL=B1, BLK=B2, CKL=C1, CLK=C2

Trekantens sider kan beregnes på følgende måde:

a =

b =

c =

GE11 Firkanter

Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes firkanter?

Øvelse 1. Afsæt forskellige typer firkanter og navngiv dem.

Øvelse 2. Find regler for en firkants vinkler.

Øvelse 3. Find regler for en firkants diagonaler.

Øvelse 4. Find regler for en firkants areal.

Øvelse 5. Afsæt en firkant og opdel i to lige store dele. Opdel en firkant i tre lige store dele.

Øvelse 6. Udklip en firkant og find dens tyngdepunkt. Kunne vi regne og tegne sig frem til tyngdepunktet?

DEFINITION 1. Et trapez er en firkant, hvor et sæt modstående sider er parallelle. Et parallelogram er en firkant, hvor begge sæt modstående sider er parallelle. En rhombe er et parallelogram, hvor alle sider er lige lange. Et rektangel er en firkant, hvor alle vinkler er rette. Et kvadrat er et rektangel, hvor alle sider er lige lange.

Regel 1. I en firkant er vinkelsummen

Regel 2. Et trapez med højde h og parallelle sider a og b har et areal på A =

Regel 3. Et parallelogram med højde h og grundflade g har et areal på A =

GE12 Rumlige kantede figurer, overflade og rumfang

Grundproblem: Hvordan italesættes og italsættes rumlige kantede figurer?

Øvelse 1. Find forskellige typer rumlige figurer fra dagligdagen og navngiv dem.

Øvelse 2. Vælg en kasse fra dagligdagen. Mål siderne og diagonalerne. Beregn overflade og rumfang samt diagonallængder og diagonalvinkler. Kontroller om muligt rumfanget ved at fylde kassen med vand eller sand, som kan hældes over i et cylinderglas, der kan måle rumfang.

Øvelse 3. Konstruer en kasse efter givne mål, dels af papir, dels af pap, dels på computer. Kontroller om muligt ved at beregne og måle diagonallængder.

Øvelse 4. Vælg en skråt afskåret kasse fra dagligdagen, f.eks. en brevordner. Mål sider og vinkler. Beregn overflade og rumfang. Mål og beregn diagonallængder og diagonalvinkler.

Øvelse 5. Opsæt et telt af papir og på gulv. Mål eller beregn side- og diagonallængder, vinkler, overflade og rumfang.

Øvelse 6. Konstruer en pyramide af papir og på gulv. Mål eller beregn side- og diagonallængder, vinkler, overflade og rumfang.

Øvelse 7. En lukket kasse med kvadratisk bund skal rumme 1 liter. Beskriv forskellige muligheder i tabel eller formel. Find den tilsvarende overflade. Hvilken kasse har mindst overflade. Brug evt. Et PC-regneark.

Øvelse 8. Samme som øvelse 7, men nu er kassen åben i den ene ende.

Øvelse 9. Samme som øvelse 7, men nu er kassen åben i begge ender.

Øvelse 10. En lukket kasse med kvadratisk bund skal have en ydre overflade på 1 m^2. Beskriv forskellige muligheder i tabel eller formel. Find det tilsvarende rumfang. Hvilken kasse har størst rumfang. Brug evt. et PC-regneark.

Øvelse 11. Samme som øvelse 10, men nu er kassen åben i den ene ende.

Øvelse 12. Samme som øvelse 10, men nu er kassen åben i begge ender.

Øvelse 13. Samme som øvelse 7-9, men nu med et prisme med en ligesidet trekant som grundflade.

Øvelse 14. Samme som øvelse 10-12, men nu har prismet en ligesidet trekant som grundflade.

Øvelse 15. Samme som øvelse 7-9, men nu med en pyramide med kvadratisk grundflade i stedet for en kasse.

Øvelse 16. Samme som øvelse 10-12, men nu med en pyramide med kvadratisk grundflade i stedet for en kasse.

Øvelse 17. Samme som øvelse 7-9, men nu med en pyramide med ligesidet trekantet grundflade i stedet for en kasse.

Øvelse 18. Samme som øvelse 10-12, men nu med en pyramide med ligesidet trekantet grundflade i stedet for en kasse.

Øvelse 19. Samme som øvelse 7-9, 13, 15 og 17, men nu er materialet til endeflade dobbelt så dyrt som til side. Der ønskes mindst mulig omkostning.

Øvelse 20. Hvor er en kasses tyngdepunkt. Hvor mange grader kan kassen vippes før den vælter. Prøv efter og regn ud.

Øvelse 21. Hvad er et polyeder, og hvad er et regulært polyeder?

DEFINITION 1. En plan er

DEFINITION 2. Vinklen mellem to planer er vinklen mellem planernes normaler.

DEFINITION 3. Et polyeder eller en mangeflade er

DEFINITION 4. Et regulært polyeder er

DEFINITION 5. Et prisme er

DEFINITION 6. Et ret prisme er

DEFINITION 7. En kasse er

DEFINITION 8. En terning eller kubus er

DEFINITION 9. En pyramide er

DEFINITION 10. Enheden for rumfang eller volumen er en terning på 1x1x1. 1 liter = 1dm^3.

Regel 1. Et kasse med sidelængder a, b og c har rumfanget V =

Regel 2. En kasse med grundflade G og højde h har rumfanget V =

Regel 3. En pyramide med grundflade G og højde h har rumfanget V =

Regel 4. En kasse med sidelængder a, b og c har overfladen O =

Regel 5. En kasse med sidelængder a, b og c har diagonallængde D =

Regel 6. En terning med sidelængde a har diagonallængde D =

Regel 7. Antallet af regulære polyedre er

Regel 8. Der findes mange regler for regulære polyedre:

GE13 Runde figurer: Cirkler, cylindre, kugler osv.

Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes runde plane og rumlige figurer?

Øvelse 1. Find en række cirkelrunde ting fra dagligdagen. Hvordan kan vi finde centrum? Mål omkreds og diameter med en sytråd. Hvor mange gange kan diameteren ligge rundt om cirklen?

Øvelse 2. Tegn en cirkel på papir. Klip den i smalle "Pizza-stykker". Anbringes disse skiftevis modsat vil der fremkomme en rektangel-lignende figur. Hvad er forholdet mellem de to sider. Hvad kan rektanglet fortælle os om en cirkels omkreds og areal.

Øvelse 3. Hvad er omkreds og areal af et cirkeludsnit og et cirkelafsnit?

Øvelse 4. Hvad er overflade og rumfanget af en kugle? Vej skralden af en mandarin og vej derefter 1 cm^2 af skralden. Vej et æble og vej bagefter en terning på 1 cm^3 udskåret af æblet.

Øvelse 5. Hvad er overflade og rumfanget af en kugle? Vej en plasticbold. Udklip et stykke på 1 cm^2 og vej det. Fyld bolden med sand og hæld bagefter sandet i et måleglas.

Øvelse 6. Hvad er overfladen af en kugle? Tag en mandarin eller en appelsin. Læg i skralden et ækvatorsnit samt to på hinanden vinkelrette polsnit. Herved opdeles overfladen i otte lige store runde trekanter, der hver indeholder en ligesidet trekant. Vis at det omtrentlige areal af disse trekanter er A = 8*1.41*(1.5*r)^2/2 = 4* 3.17*r^2.

Øvelse 7. Hvad er overflade og rumfanget af en kugle? Tag en mandarin eller en appelsin. Læg tre cirkelrunde snit i skralden: Ved ækvator, ved 30° og ved 60° nordlig bredde. Kalotten kan flades ud som en cirkel og snittene kan flades ud som cirkelringe. Hvad er det samlede areal af de to cirkelringe og kalotten? Pil mandarinen i både og læg dem skiftevis modsat. Herved fremkommer noget der minder om en del af en kasse. Vurder bådenes samlede rumfang.

Øvelse 8. Hvad er overfladen af en cylinder? Lav en cylinder ud af et A4 papir. Hvad er radius og højde?

Øvelse 9. Hvad er rumfanget af en cylinder? Lav en lille cylinder af papir. Hvad er radius og højde? Fyld cylinderen med sand og hæld bagefter sandet i et måleglas.

Øvelse 10. Hvad er overflade og rumfanget af et ben, et hoved, en, menneskekrop?

Øvelse 11. Klip et udsnit ud af en cirkel og fold det så det danner et kræmmerhus (en kegle). Hvad er overfladen og rumfanget af en kegle? Fyld keglen med sand og hæld bagefter sandet i et måleglas.

Øvelse 12. Sammenlign rumfanget mellem en cylinder, en halvkugle og en kegle med samme højde.

Øvelse 13. Klip en trekantet og firkantet pyramide ud af et stykke papir. Hvad er overfladen og rumfanget af en pyramide? Fyld pyramiden med sand og hæld bagefter sandet i et måleglas.

Øvelse 14. En lukket cylinder skal rumme 1 liter. Beskriv forskellige muligheder i tabel eller formel. Find den tilsvarende overflade. Hvilken cylinder har mindst overflade. Brug evt. Et PC-regneark.

Øvelse 15. Samme som øvelse 14, men nu er cylinderen åben i den ene ende.

Øvelse 16. Samme som øvelse 14, men nu er cylinderen åben i begge ender.

Øvelse 17. En lukket cylinder skal have en ydre overflade på 1 m^2. Beskriv forskellige muligheder i tabel eller formel. Find det tilsvarende rumfang. Hvilken cylinder har størst rumfang. Brug evt. Et PC-regneark.

Øvelse 18. Samme som øvelse 17, men nu er cylinderen åben i den ene ende.

Øvelse 19. Samme som øvelse 17, men nu er cylinderen åben i begge ender.

Øvelse 20. Samme som øvelse 14-15, men nu med en kegle i stedet for en cylinder.

Øvelse 21. Samme som øvelse 17-18, men nu med en kegle i stedet for en cylinder.

Øvelse 22. Samme som øvelse 14-16 og 20, men nu er materialet til endeflade dobbelt så dyrt som til side. Der ønskes mindst mulig omkostning.

Øvelse 23 (svær). Et rør med diameter 1 m udfyldes af tre lige store rør med diameter ? m.

Øvelse 24. Anbring en cykellygte på et cykelhjuls fælg. Hvad kaldes den kurve, lygten vil danne hvis cykelturen ses fra siden (ses bedst i mørke)? Denne kurve kan også frembringes på papir ved at lade en cirkel bevæge sig langs papirets rand. Set forfra vil en cirkelbevægelse være en svingning op og ned. Er det rimeligt, at fysikken beskriver udsvinget u ved en harmonisk svingning som u = R*sin(wt)? Hvad står hhv. R, w og t for?

Øvelse 25. Hvordan kan vi lave gear til en cykel? Hvornår er en cykel let at træde? Hvornår vil en pedal-omgang flytte cyklen mest?

Øvelse 26. Afsæt en trekant og indpak den i en cirkel. Hvordan findes cirklens centrum? Kan vi beregne radius i denne cirkel (trekantens omskrevne cirkel)?

Øvelse 27. Afsæt en trekant og indpak en cirkel i den. Hvordan findes cirklens centrum? Kan vi beregne radius i denne cirkel (trekantens indskrevne cirkel)?

Øvelse 28. Under hvilke betingelser kan en firkant indpakkes i en cirkel, der rører alle fire hjørner? Hvordan findes cirklens centrum? Kan vi beregne radius i denne cirkel (firkantens omskrevne cirkel)?

Øvelse 29. Under hvilke betingelser kan en firkant indpakke en cirkel, der rører ved alle fire sider? Hvordan findes cirklens centrum? Kan vi beregne radius i denne cirkel (firkantens indskrevne cirkel)?

Øvelse 30. Find nogle rummål, der bruges på andre steder og til andre tider.

Øvelse 31 (svær). Hvad kan forstås ved en trekants ydre røringscirkler og hvordan konstrueres de? Hvad kan siges om radius og centrum?

DEFINITION 1. En cirkel med radius r og centrum C er

DEFINITION 2. Et cirkeludsnit er

DEFINITION 3. Et cirkelafsnit er

DEFINITION 4. En kugle med radius r og centrum C er

DEFINITION 5. En cylinder er

DEFINITION 6. En kegle er

Regel 1. I en cirkel er forholdet mellem omkreds og diameter altid $\pi = 3.1416$

Regel 2. En cirkel med radius r har omkredsen O =

Regel 3. En cirkel med radius r har arealet A =

Regel 4. Fra cirkelbuen vil diameteren altid ses under en ret vinkel.

Regel 5. En kugle med radius r har overfladen O =

Regel 6. En kugle med radius r har rumfanget V =

Regel 7. En cylinder med radius r og højde h har rumfanget V=

Regel 8. Et kegle med grundfladeradius r og højde h har rumfanget V=

Regel 9. En cylinder med radius r og højde h har diagonalen D =

GE14 Geometri på en kugleoverflade
Grundproblem: Hvordan betegnes og beregnes punkter, afstande, vinkler, trekanter, arealer osv. på en kugleoverflade?

Øvelse 1. Se på en globus. Hvordan beskrives punkter på overfladen (London, Paris, Rom, osv.)?

Øvelse 2. Hvad forstås ved afstanden mellem to punkter, og hvordan findes den (London-New York, Paris-Tokyo, osv.)?

Øvelse 3. Hvornår ligger tre punkter på en ret linie (Oslo, Prag, Cairo)?

Øvelse 4. Madrid-Paris-Bangkok udgør en trekant. Hvad er vinklerne? Hvad er arealet?

Øvelse 5. Kan vi regne sig frem til svarene til spørgsmålene i øvelse 2-4?

DEFINITION 1. En storcirkel går igennem to diametralt modsatte punkter. En polcirkel eller meridian-cirkel går igennem de to poler. En ækvatorcirkel står vinkelret på en polcirkel midtvejs mellem polerne.

DEFINITION 2. På en kugleoverflade med centrum C og poler N og S indlægges ækvatorcirklen og en standard-polcirkel. Cirklernes skæringspunkter kaldes A og A*. Et punkt P's koordinater bestemmes på følgende måde: Gennem punktet lægges et polcirkel, der skærer ækvatorcirklen i P*. Punktets bredde er vinkel P*CP med en af angivelserne nord eller syd. Punktets længde er vinkel P*CA med en af angivelserne vest eller øst.

DEFINITION 3. Ved afstanden mellem to punkter P og Q forstås den mindste af buelængderne på storcirklen gennem P og Q.

DEFINITION 4. Tre punkter A, B og C bestemmer tre storcirkelbuer AB, AC og BC. Hvis disse storcirkelbuer ikke er sammenfaldende vil de afgrænse en sfærisk trekant ABC samt yderligere 7 sfæriske trekanter.

DEFINITION 5. Eksces e for en sfærisk trekant ABC er gradoverskuddet over 180 grader: e = A+B+C-180.

Regel 1. For en retvinklet sfærisk trekant ABC gælder:

sinA = sina/sinc, cosA = tanb/tanc, tanA = tana/sinb

Regel 2. For en skævvinklet sfærisk trekant ABC gælder:

sina/sinA = sinb/sinB = sinc/sinC, cosa = cosb*cosc + sinb*sinc*cosA

Regel 3. På en kugle med radius r har en sfærisk trekant ABC arealet e*4πr^2/720

GE15 Flytning: Drejning, spejling og parallelforskydning
Grundproblem: Hvordan italesættes drejning, spejling og parallelforskydning af en trekant?

Øvelse 1. Afsæt en trekant. Lav et kopi af trekanten. Udfør med kopien hver af operationerne drejning, spejling og parallelforskydning. Opstil herefter definitioner på disse operationer.

Øvelse 2. Afsæt en trekant. Lav et kopi af trekanten og anbring den på tilfældig måde et stykke fra den oprindelige trekant. Beskriv hvordan de to trekanter kan bringes til at dække hinanden.

Øvelse 3. Afsæt en trekant på gulvet. Forskyd trekanten 3 meter mod syd og 2 meter mod nord, og drej den 40 grader.

DEFINITION 1. Hvis trekant ABC drejes til trekant AB*C* vil drejningsvinklen være vinkel BAB*.

DEFINITION 2. Hvis trekant ABC vendes om AB til trekant ABC*, siges ABC* at være en spejling af ABC om spejlingsaksen AB.

DEFINITION 3. En trekant ABC flyttes til trekant A*B*C*. Hvis siderne ikke ændrer retning tales der om en parallelforskydning, hvis størrelse angives ved længden AA* og hvis retningen angives f.eks. ved vinkel A*AC.

Regel 1. Enhver flytning kan udføres betår af én eller flere af operationerne drejning, spejling og parallelforskydning.

GE16 Arbejdstegninger

Grundproblem: Hvordan overføres en rumlig figur til en plan arbejdstegning, der kan bruges til konstruktion af figuren?

Øvelse 1. Byg en figur op i LEGO-klodser. Tegn figuren som en arbejdstegning med både front-, side-, topsyn (FST-tegning).

Øvelse 2. Tegn figuren fra øvelse 1 som en arbejdstegning i skævsyn på ISO-(metrisk) papir. Hvorfra skal figuren ses for at være indtegnet korrekt?

Øvelse 3. Byg en figur op af klodser, hvoraf nogle er runde (halvkugler, cylindre, kegler osv.) og nogle trekantede. Tegn figuren som FST-tegning. Tegn endvidere figuren på ISO-papir.

Øvelse 4. Lav en FST-tegning af en LEGO-klods figur. Byg figuren ud fra arbejdstegningen. Tegn figuren på ISO-papir.

Øvelse 5. Lav en FST-tegning af en figur med runde klodser. Byg figuren ud fra arbejdstegningen. Tegn figuren på ISO-papir.

Øvelse 6. Lav en tegning på ISO-papir af en LEGO-klods figur. Byg figuren ud fra tegningen. Tegn figuren som FST-tegning.

Øvelse 7. Lav en tegning på ISO-papir af en figur med runde klodser. Byg figuren ud fra tegningen. Tegn figuren som FST-tegning.

Øvelse 8. vi kan få arbejde på et skibsværft hvis vi kan læse en ISO-tegning over rørføringer. Tag en clips, en kobbertråd eller lignende og buk den i 90 graders vinkler som model af en rørføring. Indtegn på ISO-papir og lad andre forsøge at rekonstruere modellen på baggrund af tegningen.

Øvelse 9. Et køkken er opsat på væggen af et rum med cm-målene 250 x 250 x 250 (højde x bredde x dybde). Nederst er en 25 x 250 x 50 sokkel. Ovenpå til venstre er et 150 x 50 x 50 skab, og til højre fire 50 x 50 x 50 skabe. Over disse er med et frirum på 50 cm ophængt fire 50 x 50 x 25 vægskabe. Lav en arbejdstegning af køkkenet. Lav en tegning af køkkenet på ISO-papir. (Anvend evt. i stedet de mere realistiske tal 30, 60, 180 og 300 cm).

Øvelse 10. Lav en FST-tegning af et hus. Byg huset i pap ud fra arbejdstegningen. Tegn huset på ISO-papir.

Øvelse 11. Som 10, men nu modsat.

DEFINITION 1. Anbring en terning så den hviler på 4-siden. Terningen kan ses på tre forskellige måder: 1-Siden angiver da frontsynet af terningen, 2-siden sidesynet og 3-siden topsynet af terningen.

DEFINITION 2. Fra et (isometrisk) skævsyn på en rumlig figur ses alle tre syn samtidigt. En figur betragtes fra et synspunkt, der befinder sig nedenunder figuren til venstre. Et skævsyn kan indtegnes på ISO(metrisk) papir, hvor ens afstande tegnes ens. vi ser altså bort fra perspektiv-virkningen.

GE17 Skygger og projektion

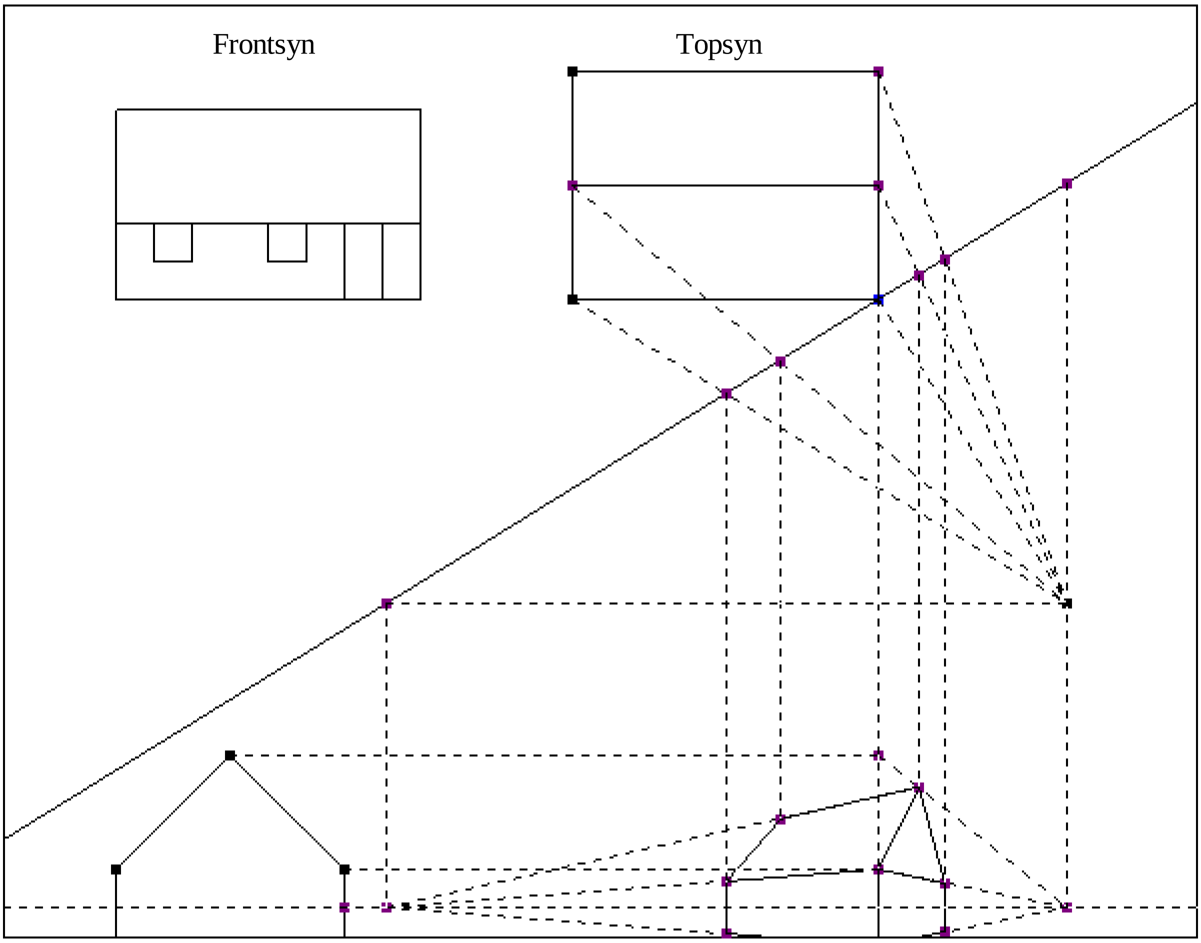
Grundproblem: Hvordan beregnes skyggefigurer

Øvelse 1. Læg en bog på et bord under en lampe. Drej bogen opad i ryk på 10 grader. Mål hver gang drejningsvinkel og skyggelængde. Kan skyggelængden beregnes?

Øvelse 2. Lav en trekant af en tommestok. Anbring en lommelampe og trekanten på et bord, så skyggen falder på en væg. Flyt lommelygten i ryk på 20 cm, og mål hver gang afstanden til trekanten samt skygge-trekantens stykker. Kan skygge-trekantens stykker beregnes?

Øvelse 3. Lav en trekant af en tommestok. Anbring en lommelampe og trekanten på et bord, så skyggen falder på en lodret plade for enden af bordet. Drej pladen i ryk på 10 grader. Mål hver gang drejningsvinkel samt skygge-trekantens stykker. Kan skygge-trekantens stykker beregnes?

DEFINITION 1. To punkter P og Q kaster skyggerne P’ og Q’ på en linie l. Hvis linierne PP’ og QQ’ er parallelle tales om parallel-projektion, ellers tales om punkt-projektion fra punktet A, som er skæringspunktet mellem PP’ og QQ’.



GE18 Perspektivtegning

Grundproblem: Hvordan overføres en rumlig figur til en plan tegning, der viser hvad der ses?

Øvelse 1. Se langs en flade, hvorpå der findes parallelle linier, f.eks. en murstensvæg. Bevæg øjet i lodret retning først op, så ned. Hvilke linier er vandrette og hvilke falder hhv. stiger? Bevæg øjet i vandret retning først hen mod, så væk fra fladen. Hvordan ændres stejlheden af fladens linier? Hvad forstås ved betegnelserne "horisontallinie" og "parallelle liniers forsvindingspunkt"?

Øvelse 2. Betragt en kasseformet ting gennem et vindue, og kopier kassens linier over på et stykke gennemsigtigt plastic lagt på vinduet. Marker øjets placering på plasticet. Kopier derefter tegningen over på et ark papir lagt oven på plasticet. Indtegn horisontallinie og forsvindingspunkter.

Øvelse 3. Samme øvelse som øvelse 2, blot bruges denne gang Albrecht Dürers fremgangsmåde: Betragt en kasseformet ting gennem et gitter med vandrette og lodrette linier, og kopier kassens linier over på et stykke A4 papir med samme antal vandrette og lodrette linier som gitteret . Marker øjets placering. Indtegn horisontallinie og forsvindingspunkter.

Øvelse 4. Et hus har metermålene 3 x 12 x 9 (højde x bredde x dybde). Oven på huset befinder der sig et normalt saddeltag, der er 4 m højt på midten. Lav en FTS-tegning af huset. Brug Topsyn og sidesyn til at lave en perspektivtegning af huset set i højden 1 m fra en position, der befinder sig 3 meter til højre og 6 meter foran huset.

Øvelse 5. Tegn et flisegulv set fra en øjenhøjde på 1.5 m, når den vandrette afstand hen til flisegulvet er 1 m.

Øvelse 6. Tegn figurerne fra kapitlet om arbejdstegning som perspektivtegning.

Øvelse 7. Tegn køkkenet fra kapitlet om arbejdstegning som perspektivtegning set fra en position, der befinder sig 1 meter inde og 1 meter oppe i køkkenet og 1.25 meter fra skabets væg.

Øvelse 8. Tegn en perspektivtegning af et gitter bestående af 10 lige høje lodrette stænger med samme indbyrdes afstand. Lad den første stang være 10 cm høj og lad horisontallinien gå gennem stangens midtpunkt. Opstil to talserier af mål fra tegningen: en der måler stængernes længde, og en der måler afstanden fra forsvindingspunktet til stængerne. Hvad kan der siges om de to talserier. Kan gitteret opfattes som en fraktal?

Øvelse 9. Tegn en kasse fra supermarkedet i perspektiv (f.eks. vaskepulver).

Øvelse 10. Tegn et hus i perspektiv.

Øvelse 11. Undersøg hvordan vi kan tegne i perspektiv på en PC.

BEMÆRKNING. En perspektivtegning tager hensyn til, at en fast længdes synsvinkel aftager med voksende afstand. Et rumlig figur siges at være tegnet i perspektiv hvis alle figurernes punkter afsættes på en tegneplan vinkelret på synsretningen ved hjælp af en punkt-projektion ud fra øjets pupil (eller en fotografisk film).

DEFINITION 1. En tegneplan er en plan vinkelret på øjets synsretning. En vandret linie i øjenhøjde kaldes horisontlinien. Punktet på horisontlinien ud for øjet kaldes øjepunktet. Alle punkter i tegneplanen antages at have samme afstand til øjet.

DEFINITION 2. Parallelle linier vinkelret på synsretningen tegnes parallelle. Ellers tegnes de så de løber sammen i liniernes forsvindingspunkt på horisontlinien.

BEMÆRKNING. Parallelle planer: Emner i tegneplanen tegnes afstandstro. Emner i planer parallelt med tegneplanen tegnes afstandstro, dog i andet målestoksforhold, bestemt ved at sammenholde topsyn og sidesyn.

Regel 1. Hvis en flise tegnes i perspektiv vil dens midtpunkt kunne findes som diagonalernes skæringspunkt.

GE19 Parabler og paraboler

Grundproblem: Hvorfor samles signaler, der afsendes i alle retninger, til samme retning?

Øvelse 1. Afsæt en linie og et punkt uden for linien. Marker alle punkter, der har samme afstand til punktet og linien. Denne figur kaldes en parabel. Normalen til linien gennem punktet kaldes parablens akse.

Øvelse 2. Afsæt en parabel. Send en lysstråle (evt. laserlys) ind parallelt med aksen. Undersøg strålegangen efter refleksion fra parablens side. Øvelse kan udføres ved indtegning eller ved brug af lysstråler reflekteret i spejle opsat som tangenter i refleksionspunkterne.

Øvelse 3. Prøv at bevise, at akseparallelle stråler passerer parablens brændpunkt..

Øvelse 4. Udskær en parabel i træ og brug denne til at lave en parabol i ler eller andet. Anbring sølvpapir i parabolen og prøv at bruge parabolen som afsender og modtager af lys.

Øvelse 5. Lån en billygte hos en autoophugger. Er det en parabol?

Øvelse 6. Ved et plan klip i en kegle kan følgende figurer fremkomme: Cirkel, ellipse, parabel og hyperbel (de såkaldte keglesnit). Hvordan skal klippene lægges i de forskellige tilfælde?

DEFINITION 1. En parabel består af alle de punkter, der har samme afstand til en ret linie (ledelinien) og et punkt (brændpunktet). Normalen til ledelinien gennem brændpunktet kaldes parablens akse. En parabol(oide) fremkommer ved at rotere en parabel 360 grader om sin akse.

DEFINITION 2. En ellipse består af alle de punkter, hvis afstande til to givne punkter (brændpunkterne) udgør en konstant sum.

DEFINITION 3. En hyperbel består af alle de punkter, hvis afstande til to givne punkter (brændpunkterne) udgør en konstant differens.

Regel 1. Ved en parabel vil akseparallelle stråler samles i brændpunktet, og stråler udsendt fra brændpunktet vil bevæge sig akseparallelt.

Regel 2. Ved en ellipse vil stråler udsendt fra brændpunktet

Regel 1. Ved en hyperbel vil stråler udsendt fra brændpunktet

GE20 Lysbøjning i vand og i brilleglas

Grundproblem: Hvordan beregnes bøjning af lysstråler når de passerer gennem vand eller glas?

Øvelse 1. Fyld et kasseformet glas med vand. Lad en lysstråle (evt. laserstråle) falde skråt ind på siden af glasset. Marker med knappenåle strålegangen gennem glasset og ud på den anden side. Mål de forskellige vinkler og sammenlign med brydningsloven fra fysik.

Øvelse 2. Lad en lysstråle (evt. laserstråle) falde skråt ind på siden af en solid gennemsigtig glaskasse. Marker med knappenåle strålegangen gennem glasset og ud på den anden side. Mål de forskellige vinkler og sammenlign med brydningsloven fra fysik.

Øvelse 3. Lad en lysstråle (evt. laserstråle) falde skråt ind på siden af en trekantet gennemsigtigt glasprisme. Marker med knappenåle strålegangen gennem glasset og ud på den anden side. Mål de forskellige vinkler og sammenlign med brydningsloven fra fysik.

Øvelse 4. Fyld et cylinder formet glas med vand. Lad en lysstråle (evt. laserstråle) falde skråt ind på siden af glasset. Marker med knappenåle strålegangen gennem glasset og ud på den anden side. Mål de forskellige vinkler og sammenlign med vinklen til en regnbue.

Øvelse 5. Lad en lysstråle (evt. laserstråle) falde vinkelret ind på et brilleglas. Marker med knappenåle strålegangen gennem glasset og ud på den anden side. Udfør forsøget fem gange, hvor strålen rammer brilleglasset i midten, halvvejs og helt ude til begge sider. Mål de forskellige vinkler og sammenlign med brydningsloven fra fysik.

DEFINITION 1. En lysstråle rammer en væg. Vinklen mellem væggens normal og indfaldende stråle kaldes indfaldsvinklen. Vinklen mellem væggens normal og udgående stråle kaldes udfaldsvinklen. Vinklen mellem væggens normal og den brudte stråle kaldes brydningsvinklen.

Regel 1. Ved refleksion er indfaldsvinkel = udfaldsvinkel.

Regel 2. Ved brydning er sin(indfaldsvinkel)/ sin(brydningsvinkel) = brydningsforhold

GE21 Gentagelsesfigurer, fraktaler

Grundproblem: Hvilken samlet figur fremkommer ved figurgentagelse?

Øvelse 1. Afsæt et kvadrat. Afsæt et nyt kvadrat, hvis sidelængde er det tidligere kvadrats diagonal. Gentag denne proces mange gange.

Øvelse 2. Afsæt et kvadrat. Afsæt et nyt kvadrat, hvis diagonal er det tidligere kvadrats sidelængde. Gentag denne proces mange gange.

Øvelse 3. Som 1 og 2, men nu med et rektangel i stedet.

Øvelse 4. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt en ny retvinklet trekant ensvinklet med den første, der har den korte katete som hypotenuse. Gentag denne proces.

Øvelse 5. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt en ny retvinklet trekant ensvinklet med den første, der har den lange katete som hypotenuse. Gentag denne proces.

Øvelse 6. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt en ny retvinklet trekant ensvinklet med den første, der har hypotenusen som den lange katete. Gentag denne proces.

Øvelse 7. Afsæt en retvinklet trekant ABC. Afsæt en ny retvinklet trekant ensvinklet med den første, der har hypotenusen som den korte katete. Gentag denne proces.

Øvelse 8. Opdel en retvinklet trekant ved hjælp af højden på hypotenusen. Hvad er skalerings-faktoren? Gentag denne proces. Vend processen om.

Øvelse 9. En vandret liniestykke deler sig i to liniestykker, der hver danner en vinkel på 30 grader med det oprindelige liniestykke, og som har den halve længde. Gentag denne proces mange gange.

Øvelse 10. Lav en talrække begyndende med 0 og 1, hvor det næste led er summen af de to foregående. Hvilke egenskaber har disse Fibonacci-tal?

Øvelse 11. Del et liniestykke AB med punktet C så AB/AC = AC/BC (højdeling, det gyldne snit). Hvad er skalerings-faktoren AC/CB?

Øvelse 12. Konstruer et kvadrat af liniestykket AB. Lad P være det gyldne snit i AB. Gentag konstruktionen, men nu ud fra AP.

Øvelse 13. Lav en spiral med strålelængder $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ osv.

Øvelse 14. Halver et kvadret med sidelængde 1 dm. Halver den ene del. Gentag denne proces.

Øvelse 15. Find selv på nogle fraktaler, evt. I programmet GeomeTricks.

Øvelse 16. Find nogle fraktaler i naturen.

DEFINITION 1. C er det gyldne snit i liniestykket AB, hvis AB/AC = AC/BC, dvs. hvis AC er mellemproportional mellem AB og BC.

GE22 En havregrynskasses geometri

Grundproblem: Hvor meget geometri gemmer der sig i en havregrynskasse?

Forslag til spørgsmål:

1. Hvad er en havregrynskasses overflade og rumfang?

2. Hvad er den mindste overfalde, der indeholder det givne rumfang?

3. Hvad er det største rumfang, der kan indeholdes i den givne overflade?

4. Hvad er længde og vinkler for kassens fire diagonaler?

5. Hvor er kassens tyngdepunkt? Hvor meget kan kassen vippes uden at vælte? (Fyldt, halvfyldt)

6. Lav en cylinder, en kugle, en kegle, en pyramide, et tetraeder med samme rumfang. Hvad er overfladen?

7. Lav en cylinder, en kugle, en kegle, en pyramide, et tetraeder med samme overflade. Hvad er rumfanget?

8. Vip kassen så det ligner en stejl bjergvæg. Anlæg en "hårnåle"-vej op ad kassen. Hvad er tyngdeaccelerationen i denne stilling?

9. Vip kassen til en bestemt stilling. Hvor meget reduceres belastningen af underlaget?

10. Tegn kassen, dels som arbejdstegninger, dels i perspektiv.

11. Tegn kassens side i nedskaleret udgave, så den brede side bliver diagonal på den nye kasses brede side. Hvad er skalerings-faktoren? Gentag denne proces.

12. Hvad er det mindste hjørne, som kassen kan flyttes rundt om?

13. Hvis vi kan rejse dobbelt så hurtigt på den brede side som på den smalle, hvad er da den hurtigste rejse mellem to givne punkter på de to sider?

14. Læg 2-3 kasser på spisebordet som øer i et stort hav, og opdel havet mellem øerne.

GE23 Avis-geometri

Grundproblem: Hvor meget geometri gemmer der sig på en avisside?

Forslag til spørgsmål:

1. Hvad er målene på en avisside? Hvad er forholdene mellem disse mål? Hvad forstås ved Al, A2, A3, A4, A5, A6 osv. papir?

2. Mål og beregn diagonalen (mindst to måder) og dens vinkler.

3. Diagonalen deler siden i to trekanter. Mål og beregn disses højde og højdevinkler.

4. Beregn trekanternes areal på tre forskellige måder.

5. Højden opdeler trekanten i to nye trekanter. Hvordan er disse i forhold til den oprindelige? Hvad er skalerings-faktorerne?

6. Disse nye trekanter kan igen opdeles i nye trekanter. Gentag denne opdeling nogle gange og nyd de fremkomne fraktaler.

7. Som 2-6, men nu med avisen foldet én gang.

8. Beregn avissidens højrekant fra nederste venstre hjørne A, når ingen af de to midterlinier må passeres.

9. En korridor med knæk kan illustreres af tre avissider anbragt passende i forhold til hinanden. Hvad er længden af den længste stang (tommestok) der kan rejse om hjørnet? Ved hvilken vinkel støder stangen mod begge vægge. Vis at vinklen kan beregnes af ligningen tanv^3=a/b, hvor a og b er de to gangbredder.

10. Indtegn billigste rute mellem de to modsatte hjørner når det er dobbelt så dyrt på den ene halvdel. Vis at sini/sinb = 1/2 hvor i og b er indfalds- og brydningsvinklen ved midterlinien.

11. Fold en avis og åben den 30 grader. Indtegn en vej op ad avisen, der stiger 20 grader.

12. En avisside kan på to forskellige måder rulles rundt og danne en cylinder. Overfladen er det samme, er rumfanget også det samme? Hvad er det største rumfang, der kan dannes af en avisside med samme areal?

13. Fold avissiden og gentag foregående øvelse. Bliver rumfanget halveret?

14. Fold den korte side mod den lange. Fold den resterende del, så der dannes en trekant. Der vil nu være tre trekanter. Hvad er deres indbyrdes skaleringsfaktorer?

GE24 Tillæg: Ligningsskemaer

Ved beregninger ud fra formler er der mulighed for at benytte et ligningsskema, der fortæller:

Hvad der skal regnes ud	Hvilken ligning, der bruges
Hvilke tal, der bruges	Hvordan ligningen omformes

Eksempel. I trekant ABC er C=90°, A=37° og c=4.2. Find a og b og B.

a=?	sinA=a/c	b=?	cosA=b/c	B=?	A+B=90
A=37	c*sinA=a	A=37	c*cosA=a	A=37	B=90–A
c=4.2	4.2*sin37=a	c=4.2	4.2*cos37=a		B=90–37
	2.53 = a		3.35 = a		B = 53

Rutineopgaver

Opgaver / **Svar**

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
1			3,917	33,3		90		2,151	3,274			56,7	
2			6,519	42,4		90		4,396	4,814			47,6	
3	2,534			23,8		90			5,745	6,279		66,2	
4	3,772			21,4		90			9,625	10,338		68,6	
5	2,707		4,628			90			3,754		35,8	54,2	
6	3,883		6,265			90			4,917		38,3	51,7	
7	7,502	3,611				90				8,326	64,3	25,7	
8	8,588	8,093				90				11,801	46,7	43,3	

Ikke retvinklede trekanter / **Svar**

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
9	1,075			57,2		72,4			0,985	1,219		50,4	
10	2,212			42,5		59,6			3,201	2,824		77,9	
11		4,104		66,9		72,6		5,812		6,029		40,5	
12		4,915		21,5		86,4		1,893		5,155		72,1	
13			2,165	35,1		68,6		1,337	2,259			76,3	
14			3,041	38,4		76,2		1,945	2,847			65,4	
15	1,748	3,562				68,6				3,346	29,1	82,3	
16	1,433	4,346				88,4				4,538	18,4	73,2	
17		3,078	4,892	60,8				4,326				38,4	80,8
18		3,938	3,706	59,3				3,787				63,4	57,3
19	4,298		5,027		42,9				3,477		57,3		79,8
20	4,861		4,439		81,8				6,097		52,1		46,1