KL

Kvantitativ litteratur

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

1.1 Verdens, livets, menneskets og matematikkens historie

Verden består af stof, kræfter og bevægelse. Stof består af neutroner & anti-neutroner, elektroner & anti-elektroner, samt af fotoner, lys. Kræfterne bor i stoffet, den stærke tyngdekraft bor i neutronerne, og den svage elektromagnetiske kraft bor i elektroner og fotoner. Kræfterne pumper bevægelse (energi) ud og ind af stoffet, hvorved stoffet indgår i stadige stofkredsløb af stofopbygning og stofnedbrydning.

Universet gennemløber en række kredsløb af store brag (big crunch & big bang): Først knuser den stærke kraft universet ved at sammentrække det til ét punkt, hvor stof støder sammen med antistof og eksploderer som fotoner i et stort brag. Eksplosionen spreder fotonerne i alle retninger, hvor de efterhånden afkøles og "udfryser" til stof og anti-stof. Dels til neutroner og anti-neutroner, som samles i hver deres dele af universet. Dels til elektroner og anti-elektroner, positroner. Neutronerne indfanger anti-elektronerne og bliver til protoner. Protonerne indfanger elektroner og frie neutroner og bliver til lette atomer, som sammenbindes til molekyler af den svage kraft.

Med stoffets tilbagekomst følger den stærke krafts tilbagekomst. Den sammentrækker de lette atomer i stjerner, hvor voldsomme sammenstød frigør anti-elektronerne som støder sammen med elektronerne og eksploderer som fotoner i et lille brag, som pumper fotoner fra stjernen ud i rummet, bl.a. til planeterne, herunder jorden Til sidst knuser den stærke kraft stjernen i et middelstort brag, en supernova, og pumper herved tunge atomer ud i rummet, hvor de sammentrækkes til planeter af den stærke kraft. På planeterne binder den svage kraft stofferne sammen til molekyler med stor afstand mellem atomerne, hvorved den stærke kraft neutraliseres. Tilbage bliver et sort hul hvor den stærke kraft er så stærk, at den til sidst opsluger alt stof og andre sorte huller, hvorved universet endnu engang knuses i et stort brag. Så længe universet udvider sig er stjernernes lys svagt, men når universet igen trækkes sammen af de sorte huller vil lyset blive så kraftigt, at alle planeter fordamper til molekyler.

Planeterne er udsat af en stadig gennemstrømning af bevægelse. Stjerner og solen pumper højfrekvente fotoner, lys, ind fra rummet, og planeterne pumper lavfrekvente fotoner, varme, tilbage til rummet. På faste planeter bliver stoffet opvarmet, men indgår ikke i kredsløb. På flydende planeter indgår stoffet derimod i en række makro- og mikrokredsløb.

Jorden er både fast og flydende. Jorden er udstyret med klipper og to have, et vandhav og et lufthav, en hydrosfære og en atmosfære. Fotonstrømmen fra solen virker som pumper for en række uorganiske makrokredsløb, dels i havet (kolde og varme havstrømme), dels i luften (høj- og lavtryk og vinde), dels mellem hav og luft (fordampning, regn og floder).

I havet er solens fotoner pumpe for et organisk mikrokredsløb, fotosyntese & forbrænding. I fotosyntesen overfører fotonernes bevægelse brint mellem de uorganiske stoffer vand til kuldioxid så der dannes ilt og organisk kulvand, kulhydrat. I forbrændingen frigives bevægelsen igen ved den modsatte proces, hvor brint tilbageføres fra kulvand til ilt, der så igen omdannes til kuldioxid og vand. Men organiske stoffer kan også videreopbygges til større forgrenede kul-kvælstof molekyler, som livets celler opbygges af. Kvælstoffet findes i luften (ca. 80%), men kan spaltes af lyn, og kan så indgå i kulvand-molekyler og gøre disse forgrenede og stærke (proteiner).

Celler er store molekyle-samfund som har udviklet en overflade, så de kan bære vand i sig og dermed forlade havet og blive til en af de tre livsformer, sorte, grønne og grå celler.

De sorte celler kan kun tåle ilt i små mængder og overlever på ilt-frie områder på bunden af søer og i dyrs maver ved at fjerne ilten fra kulvand, der derved omdannes til kul-brint molekyler, gas.

De grønne celler er der hvor fotosyntesen foregår, og producerer således dels organisk stof til oplagring af solfotonernes bevægelse, dels den ilt, som de grå celler skal bruge til at frigøre brinten og bevægelsen igen (forbrænding). Grønne celler danner cellesamfund, planter, der ikke kan bevæge sig efter føden og lyset, og som derfor dør hvis disse ting ikke er til stede.

Grå celler kan ikke lave fotosyntese. Til gengæld kan de danne cellesamfund, dyr, som kan bevæge sig efter føden, fordi de udvikler indre vandbaner, blodårer, samt en indre vandpumpe, hjertet, i stedet for den ydre vandpumpe, solen.

Sorte og grønne celler har behov for stof for at bestå, og for bevægelse for at kunne foretage stofskifte med omgivelserne. Grå celler har desuden et behov for information for at kunne træffe valg om bl.a.

bevægelsesretning. Informationen indsamles gennem sanser og behandles i hjernen. Kort sagt, dyr har huller i hovedet for at kunne forsyne sig med stof og energi til kroppen og information til hjernen.

Der findes tre typer dyr. Krybdyr har en krybdyrhjerne til rutiner. Pattedyr føder levende børn som kan tilpasse sig omgivelserne gennem læring, og som derfor har behov for omsorg under oplæringen. Pattedyr har derfor udviklet en ekstra pattedyrhjerne til følelser.

Mennesket har udviklet to slags gribere. Mennesket blev presset væk fra træerne og ud på savannen, hvor det rejste sig op på bagbenene og udviklede fortæerne til fingre, som kan gribe, gemme og dele føden. Gribeprocessen provokerede hjernen til at udvikle en ekstra menneskehjerne, der kan (be)gribe, gemme og dele verden i ord, sætninger og fortællinger. Herunder fortællinger om hvordan produktiviteten kan øge behovsdækningen ved at begribe naturen og gribe ind i dens strømme af stof, energi og information og dermed ændre natur til kultur. Oprindeligt levede mennesket som andre dyr i en jæger/samler-kultur, hvor naturen er producent og mennesket er forbruger.

Det første kulturspring og befolkningseksplosion sker da mennesket begriber stoffet og opfinder den kunstige hånd, redskabet, så skov kan ændres til mark. Forsynet med en mark og redskaber kan mennesket frigøre sig fra naturens luner. Herved bliver jæger/samler-kulturen til en agerbrugskultur, hvor mennesket griber styrende ind i naturens strømme af organiske stoffer, og ernærer sig som redskabsarbejder.

Det andet kulturspring og befolkningseksplosion sker da mennesket begriber bevægelsen og opfinder den kunstige muskel, motoren, som forsynes med bevægelse af først damp og senere elektroner. Med kombinationen af redskab og motor til maskine fritages mennesket for muskelarbejde. Herved bliver agerbrugskulturen til en industrikultur, hvor mennesket griber styrende ind i naturens strømme af uorganiske stoffer, og ernærer sig som maskinarbejder.

Det tredje kulturspring og befolkningseksplosion sker da mennesket begriber informationen og opfinder den kunstige krybdyrhjerne, computeren, som forsynes med information af først elektroner siden fotoner. Med kombinationen af maskine og computer til robot fritages mennesket for rutinearbejdet. Herved bliver industrikulturen til en informationskultur, hvor mennesket griber styrende ind i naturens strømme af information, og ernærer sig som informationsarbejder.

Talesprog og talsprog. Alle samfund bygger på arbejdsdeling. I jægersamler-kulturen mellem mennesket og naturen, i agerbrugskulturen mellem mennesker indbyrdes. I agerbrugskulturen udvikler mennesket ved siden af tale-sproget også et tal-sprog til at ital-sætte, kvantificere verden og udregne totaler. Den klassiske kvantitative litteratur blev kaldt geometri og algebra. Geometri betyder jordmåling på græsk, og algebra betyder genforening på arabisk. Geometri og algebra er således menneskets kvantitative svar på de to fundamentale spørgsmål som melder sig når man forlader jæger-samler kulturen: "Hvordan deler vi den jord vi dyrker og det vi avler?"

Geometri. I de varme floddale passes jorden af naturen idet floderne gøder markerne under den årlige oversvømmelse. Mennesket skal kun så og høste og genetablere markskel. Men hvordan genetableres markskel? Svaret lå i triangulering: Alle områder kan opdeles i trekanter, som igen kan opdels i retvinklede trekanter. Den retvinklede trekant har tre vinkler og tre sider. Vinklerne bindes sammen af vinkel-ligningen A+B = 90. Siderne bindes sammen af side-ligningen a^2+b^2 = c^2. Vinkler og sider bindes sammen af vinkel-side ligningen sinA = a/c, idet siden over for vinkel A kaldes hhv. a og sinA hvis den måles i hhv. meter og procent.

Algebra. I højlandet skal mennesket selv tilberede jorden, hvilket først bliver muligt med opfindelse af jern-produktion i jernalderen. Handel mellem floddalene og højlandet bliver særlig livlig hvor man kan bytte med produkter den anden ikke har, dvs. bytte lavlandets silke og krydderier med højlandets sølv (sølv hedder argent på latin, hvilket betyder penge på fransk). Antikken blev finansieret af Europas sølvminer. Først finansierede græske sølvminer den græske kultur, så finansierede sølvkilder i Spanien Romerriget. Grækenlands sølvminer blev tømt på ca. 100 år, og Spaniens sølvminer blev erobret først af Vendelboerne (Vandalerne), siden af araberne. Uden sølv var der mørk middelalder i Europa i knap 1000 år, indtil der findes sølv i Harzen. Disse sølvkilder finansierer renæssancen (genfødslen), hvor Italien bliver mellemhandler mellem vestens højland og østens floddale. Senere findes sølv i Amerika, samt nye handelsveje, hvilket fører til industrikulturens gennembrud, hvor industrivarer erstatter sølv som byttemiddel.

På landet udregnes den totale høst ved bundtning og sammengangning: I en 3 stak af 4bundter er totalen T = 3*4. I købstaden udregnes totale varelagre, omkostninger og fortjenester ved stakning og sammenlægning: Ved sammenstakning af 4ti7 og 2ti8 fås 6ti15 som kan omstakkes og ombundtes til 7ti5. Rige købmænd, som kan låne penge ud som banker, beregner den totale rente ved potensopløftning: 7 år á 5% = 35% rente + 6% rentes-rente = 41% totalt, da 105%^7 = 141%. Og industrien udregner den totale effekt af en kraftpåvirkning ved at integrere, da kraften ændrer meter/sekund-tallet, som igen ændrer meter-tallet: 7 sekunder á 3m/s voksende med 14m/s er totalt T = ∫(3+(14/7)*x)dx = 7*3 + ½*(14/7)*7^2 = 70 meter.

Algebra opstod således langs handelsvejene i takt med behovet for at kunne forene enkelttal til totaler eller modsat opdele totaler i enkelttal. Da der er 2*2 forskellige typer tal, udvikledes 2*2 forskellige regningsarter til at forene tal:

Plus forener variable styktal til en total: 3kr. og 5kr. er totalt ?kr. (3+5 = T).
Minus opdeler en total i variable styktal: 3kr. og ?kr. er totalt 8kr. (3+x = 8, x = 8-3).

Gange forener konstante styktal til en total: 3kr. 5gange er totalt ?kr. (3*5 = T).
Division opdeler en total i konstante styktal: 3kr. og ?gange er totalt 15kr. (3 = 15, x = 15/3).

Potens forener konstante pr.tal til en total: 3% 5gange er totalt ?%. (103%^5 = T).
Rod opdeler en total i konstante pr.tal: ?% 5gange er totalt 15.9% (x^5 = 115.9, x = 5√115.9).
Logaritme opdeler en total i kontante pr.tal: 3% ?gange er totalt 15.9% (103%^x = 115.9, x = log115.9/log103).

Integralregning forener variable pr.tal til en total: 2m/s voksende jævnt med 3m/s over 10 sekunder er totalt ?m (∫(2+0.3*x)dx = T). Integrere betyder opsamle på latin.
Differentialregning opdeler en total i variable pr.tal: 2m/s voksende ? med 3m/s over 10 sekunder er totalt 35m (∫ f dx = 2*x + ½*3/10*x *x, f = d/dx(2*x + 0.15*x ^2)).

I antikken udvikledes geometrien og styktallenes algebra. I renæssancen og industrikulturen udvikledes pr.tallenes algebra. Differentiere betyder opdele på latin.

Regningsarter forener *opdeler i*	**Konstante**	**Variable**
Styk-tal: m, s, kg, kr	T = a + b *T – a = b*	T = a * b *T/b = a*
Pr.tal: m/s, kr/kg, kr/kr = %	T = ∫ f dx *dT/dx = f*	T = a ^ b *b√T =a , logT/loga = b*

Den kvantitative litteratur. Den klassiske kvantitative litteratur er således geometri og algebra. Hertil kommer den moderne kvantitative litteratur, skabt af spørgsmål, som kommer fra produktionen: Hvordan hentes sølv og kul op fra minegangene? Hvordan navigeres på havet? Hvordan bygges maskiner? Hvordan optimers en produktion? Hvordan optimeres profitten? Osv.

Der regnes på, hvordan sølvmalm og vand løftes op af minerne, og hvordan sølvmalm forvandles til sølv af forskellig renhedsgrad. Sølvet begiver sig nu på rejse ned ad de tyske floder til Italien, hvorfra købmænd er kommet for at bytte klæde og vin med sølv. Undervejs passeres adskillige borge beliggende på høje bjerge. Købmændene må aflevere sølv som told- og beskyttelsesafgifter, men vinder det tilbage igen gennem spil. Fra Italien rejser sølvet videre når købmændene bytter det med Østens efterspurgte varer, krydderi og silke, enten via den dyre vej over land transporteret af karavaner, eller via den billige vej over hav transporteret af arabiske købmænd i Egypten. Så Italiens rigdomme hober sig op først gennem handel og senere gennem bankudlån. I banken får man brug for at kunne lægge renter sammen og udvikler derfor potensregningen og opdager herved rentes-renten: 7 år á 6% = 42% rente + 8% rentes-rente = 50% da 106%^7 = 150%.

En stor del af fortjenesten går til forbrug af prægtige paladser overalt i Renæssancens Italien, og til ansættelse af kunstnere og filosoffer. En af disse var naturfilosoffen Galilei, som studerede faldet ved at bygge et skråplan. Han opdager her at en rullende kugle har en konstant acceleration, og at der derfor gælder tre faldlove for accelerationen a, hastigheden v, stedet s og tiden t: a = g, v = g*t og s = ½*g*t^2. Han opfordrer alle til at gøre som ham dvs. at studere naturen kvantitativt: Mål alt der kan måles og gør alt andet måleligt. Han må dog snart tilbagetrække disse kætterske tanker på grund af pavens trusler om bandlysning og afbrænding på bålet (skærsild).

Italien bliver udkonkurreret af Portugal, som kan nedsætte prisen på peber til 1/3 ved at overspringe mellemhandlerne og selv at hente Østens varer hjem over havet på egne skibe som sejler rundt om Afrika. Spanien forsøger at finde en anden vej til Indien ved at sejle mod vest. Men i Vest-Indien er der hverken krydderi eller silke, derimod rigeligt med sølv og guld. Paven deler den nye verden mellem Spanien og Portugal. Portugal får alt øst for den 60. længdegrad, Spanien alt vest for. I Spanien og Portugal går fortjenesten til forbrug gennem bygning af kirker og klostre og palæer.

Hvordan bevæger månen sig? Da velstand bliver noget som sejles hjem på verdenshavene fra øst og fra vest kan også Holland og England være med og få deres del. Mod vest er kun den uinteressante del af Nordamerika tilbage, hvor der ikke er sølv, men som England alligevel koloniserer. For at sejle til Østen er englænderne nødt til at sejle på åbent hav for ikke at blive dræbt af portugisere undervejs. På åbent hav navigerer man efter månen, hvorfor det er vigtigt at kende svaret på spørgsmålet: Hvad bestemmer månens bevægelse på himlen?

Kirken påstod at Herren styrer alt, også himmelrummet. Herren havde bestemt at solen bevægede sig rundt om jorden, og i øvrigt var Herrens veje uforudsigelige, så alt vi mennesker kan gøre er at tro, bede og gå i kirke. Tre forskellige kvantitative undersøgelser førte imidlertid til den konklusion, at det er jorden, som bevæger sig rundt om solen, og ikke modsat.

Brahe bruger et helt liv på at opmåle og tabellægge planeternes bevægelse. Kepler samler Brahes tabeller i sine tre love: 1) Planetbaner er ellipser med solen i det ene brændpunkt. 2) Arealhastigheden er konstant, dvs. hvor radius er lille er buelængden stor og omvendt. 3) Forholdet mellem kvadratet på banens gennemsnitsradius og kubus på omløbstiden er konstant for alle planeter.

Newton regner på Keplers love: Hvis de gælder for alle ellipser, gælder de også for cirkler. En cirkelbevægelse beskrives ved radius r, hastighed v, acceleration a, omløbstid T. Der gælder at

v = meter/sekund = (banecirklens omkreds)/omløbstid = (2*π*r) meter /T sekunder = (2*π*r)/T, og at

a = (meter/sekund)/sekund = (hastighedscirklens omkreds)/omløbstid (2*π*v) meter/sekund /T sekunder = (2*π*v)/T, dvs. a = (2*π/T)*v = (2*π/T)*(2*π/T)*r = (2*π/T)^2*r.

Ifølge Keplers 3. lov kan vi skrive T^2 = c * r^3. Indsættes dette fås a = (2*π)^2/(T)^2*r = (2*π)^2/(c*r^3)*r = (4*π^2/c)/r^2 = k/r^2.

Så hvis planetens bevægelse skyldes en trækkraft fra solen, og hvis en kraft viser sig som en acceleration, så må der findes en tyngdekraft fra solen som aftager med kvadratet på afstanden. Omvendt kan vi nu antage at solen trækker i alle planeter med en sådan tyngdekraft, og at denne kraft giver en planet en acceleration a = k/r^2. Da acceleration er ændring i hastighed v pr. sekund (a = dv/dt), og da hastighed er ændring i sted pr. sekund (v = dr/dt), giver dette anledning til løsning af to ændringsligninger: a = dv/dt = k/r^2, og v = dr/dt. Desværre findes ændringsregning ikke, så det må jeg lige først opfinde. Jeg tror jeg vil kalde ændringsregning differentialregning. Men først vil jeg lave en tabel. Bare jeg dog havde haft Excel til at udføre beregningerne!

Det moderne gennembrud. Det er umuligt at overvurdere betydningen af Newtons regnestykke. Dette regnestykke har erstattet kirker med skoler, og kongehuse med parlamenter. Det har omstyrtet de to gensidigt støttende feudalherrer, som indtil da har fastholdt de mennesket i umyndighed, den metafysiske Vorherre og den fysiske Herremand. Det har vist, at mennesket er myndigt og kan selv.

Newtons regnestykke viser, at kirken ikke har ret, når den siger, at Herren har bestemt alt og Hans veje er uforudsigelige, så alt vi mennesker kan gøre er at tro, bede og gå i kirke. Tværtimod. Det er ikke en metafysik vilje som virker, men en fysik vilje, en kraft. Og denne kraft og dens virkning kan sættes på tal og ligning, og er derfor beregnelig og forudsigelig. Så mennesket skal altså ikke tro, bede og gå i kirke. Mennesket skal vide, regne og gå i skole. Viden fortrænger nu tro, og oplysningstiden begynder og forkynder sin tro: Mennesker er myndige og bør leve sammen som frie og lige i demokrati. Og slutter med at installere demokrati i USA og i Frankrig omkring 1780.

Newton løsriver sig fra traditionen på tre områder. Traditionen sagde, at månen bevæger sig mellem stjernerne – Newton siger at månen falder mod jorden trukket ned af samme tyngdekraft som får æblet til at falde, og også æblet vil gå i et evigt cirkulært fald om jorden hvis det fik et tilpas stort puf til siden før det begyndte at falde, for så var jorden i mellemtiden krummet væk. Traditionen sagde, at en kraft skaber en bevægelse – Newton sagde, at en kraft skaber en bevægelsesændring, en acceleration. Traditionen regnede kun på tal – Newton bliver derfor nødt til at udvikle en ny regningsart, ændringsregning, eller differentialregning og integralregning.

Beregning af planetbaner i Excel:

Vækstligninger

d vx =	ax*dt
d vy =	ay*dt
d x =	vx*dt
d y =	vy*dt

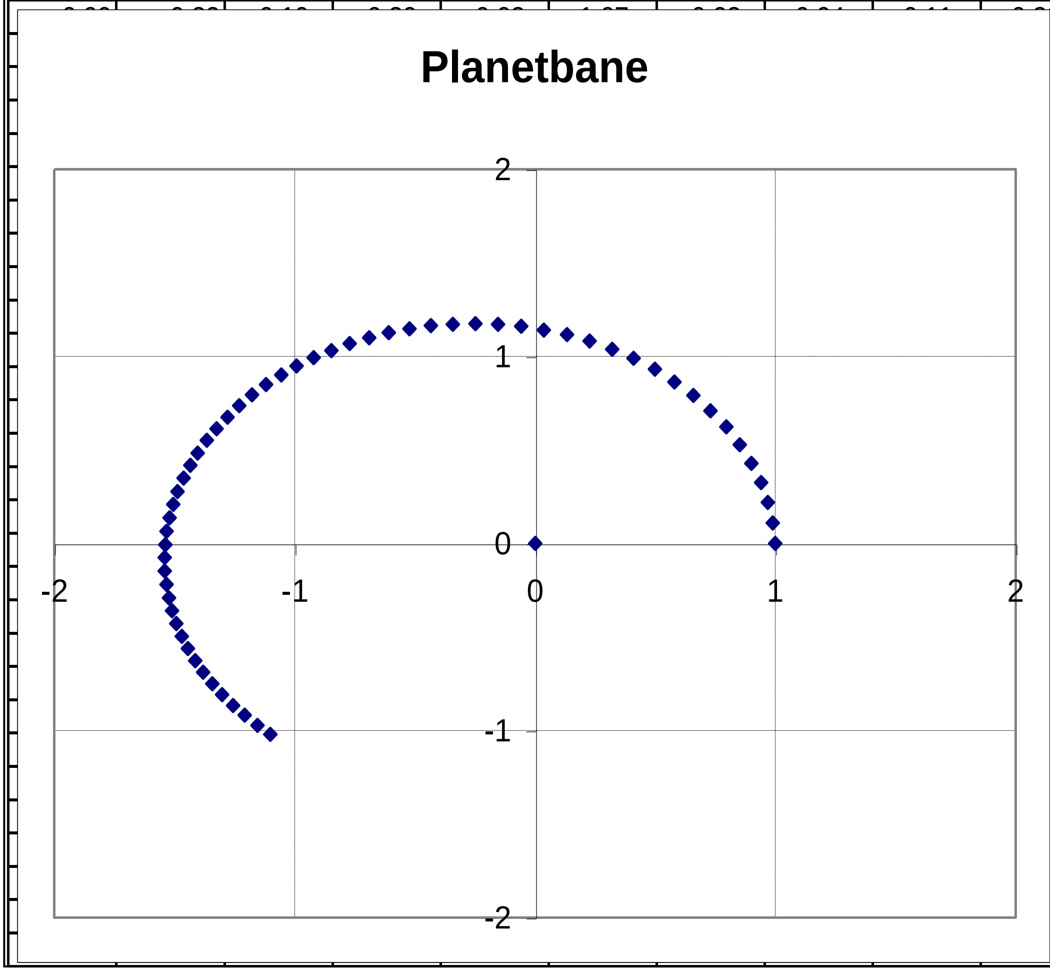
Niveauligninger

ax =	-x/r^3
ay =	-y/r^3
vx =	vx + d vx
vy =	vy + d vy
x =	x + d x
y =	y + d y
r =	V(x^2+y^2)
a =	1/r^2

Fremgangsmåde: 1. Vælg området Slet ovenfortil højre, og slet med Delete
2. Vælg området Tabel ovenfortil højre
3. Træk lodret nedad i den sorte knap nederst til højre, eet eller flere trin ad gangen

Solen:	0	0
dt:	0,1	

ax	ay	dvx	vx	dvy	vy	dx	x	dy	y	r
			0		1,10		1		0	1,00
-1,00	0,00	-0,10	-0,10	0,00	1,10	-0,01	0,99	0,11	0,11	1,00
-1,00	-0,11	-0,10	-0,20	-0,01	1,09	-0,02	0,97	0,11	0,22	0,99
										0,99
										1,00
										1,00
										1,01
										1,02
										1,03
										1,04
										1,06
										1,07
										1,09
										1,10
										1,12
										1,14
										1,16
										1,18
										1,20
										1,22
										1,24
										1,26
										1,28
										1,30
										1,32
										1,34
										1,35
										1,37
										1,39
										1,40
										1,42
										1,43



Dobbeltklik og rediger.

Før-moderne tro erstattes af moderne videnskab. Kort sagt, Newtons beregninger er så banebrydende, at de skaber grundlaget for den moderne tidsalder, hvor videnskaben har fortrængt troen. Når man nu sendte skibe til Indien skulle man ikke mere gå i kirke for at bede til at i hvert fald nogle skibe kom hjem. I stedet kunne man regne kursen ud. Oven i købet kunne man opstille regnestykker der viste hvordan gennem forsikring kunne være fælles om at dele omkostningerne ved forliste skibe. Man "vædede" på at et skib gik ned. Kom det hjem var indsatsen tabt. Gik det ned fik man gevinsten som kompensation og kunne så sende et nyt skib af sted.

I østen opdagede englænderne en hidtil overset vare, bomuld. Bomuld kunne som silke bruges til tøj. Fortjenesten på en silkedragt var tusind gange større end på en bomuldsdragt. Til gengæld kunne der sælges en million gange flere bomuldsdragter, så et simpelt regnestykke viser, at der er langt større fortjeneste på bomuld end på silke. Oven i købet kan bomuldsproduktionen flyttes fra Indien til Nordamerikas sydstater, så man kan nøjes med at sejle over Atlanten. Og denne engelske bomuld skal ikke tilbyttes med sølv, men med det der er behov for i bomuldsplantagerne, arbejdskraft. Denne arbejdskraft kan hentes i Afrika som slaver tilbyttet med våben og andre maskinfremstillede industrivarer. Endelig kan bomulden byttes med industrivarer.

Herved opstår den såkaldte trekantshandel, hvor engelske skibe sejler industrivarer til Afrika, slaver til Nordamerika og bomuld til England, og tjener store formuer ved hver byttehandel. Det er nu ikke længere sølv der bruges som byttemiddel, men industrivarer lavet på engelske maskiner. I England går fortjenesten ikke til forbrug af kirker og klostre, men til investering i fabrikker og universiteter.

Skiftet fra sølv til industrivarer og fra forbrug til investering skaber en dobbelt selvforstærkende udviklingsspiral, som kaldes den industrielle revolution: Mere fortjeneste giver flere maskiner, der giver flere industrivarer, der giver flere slaver, der givere mere bomuld, der giver mere fortjeneste osv. Altså kapitalens tilvækst vokser med kapitalen, $\Delta K = r*K$, eller $\Delta K/K = r$, altså samme ligning som i Renæssancens italienske banker. I begge tilfælde er der tale om eksponentiel vækst. Men i Italien kom efterspørgselen efter kapital fra sølvfinansieret luksusforbrug, og fortjenesten formindskedes af mange mellemhandlere. I England forblev fortjenesten hos de skibe der sejlede rundt i trekanten uden mellemhandlere. Og denne fortjeneste efterspurgte investeringsvarer, maskiner. Forrentningen var derfor langt større i England end i Italien, hvorfor den industrielle revolution ikke kom i handelslandet Italien, men i de nye industrilande, England, Frankrig, USA, Tyskland osv.

Den nye praksis med at opdele indkomster i forbrug og investering ligger grunden til beregninger på det økonomiske kredsløb, økonomisk teori.

I industrikulturen er det nu ikke længere sølv, som skal hentes ud af bjergene, men kul til industriens maskiner. For kul kan skabe varme, som kan skabe damp til dampmaskinerne. Også dampmaskiner bygger på beregning og opfindelse, og fører til fremkomsten af en ny profession, ingeniørerne, de opfindsomme beregnere, som f.eks. regner på idealgasligningen for at finde ud af hvordan damptrykket p afhænger af temperaturen T og rumfanget V og antal dampmolekyler: $p*V = n*R*T$. R er en konstant, der tjener til at samstemme enhederne. Ligningen viser to mulige former for dampmaskiner.

Dampmaskiner. Den første ikke særligt effektive dampmaskine virker ved skiftevis opvarmning og afkøling, som skaber hhv. højt tryk og lavt tryk: Da V og n her er konstant bliver idealgasligningen til $p = k*T$. Disse trykforskelle vil så skubbe på og trække i en stang, som kan løfte vand op fra minegangene. Et Carnot-regnestykke viser, at den energi man kan få ud af et sådan Newcomen -dampmaskine er arealet under p-V kurverne ved hhv. lav og høj temperatur: $E = \int(p2 - p1)\, dV = \int(kT2 - kT1)/V\, dV = (kT2 - kT1)\ln(V2/V1)$.

Den anden generation dampmaskiner er mere effektive. De holder temperaturen konstant, til gengæld varierer både p, V og n. Et stempel kører op og ned i én cylinder, hvorved rumfanget over og under cylinderne hele tiden ændres. Samtidig lukkes hele tiden damp ind og ud hvorved n-tallet hhv. stiger og falder. I topstillingen lukkes damp ind over stemplet, samtidig med at damp lukkes ud under stemplet. Herved hhv. vokser og aftager n. Trykket vil altså stige over og falde under stemplet. Når stemplet bevæger sig nedad vil rumfanget godt nok vokse, men samtidig lukkes der ekstra damp ind, så overtrykket bibeholdes og driver stemplet i bund. Her vender processen. Nu lukkes damp ind under stemplet, og der åbnes til det fri over stemplet. Fra stemplet overføres bevægelsen til et trækhjul, hvorfra bevægelsen via træk-remme kan overføres til maskiner, bl.a. vævemaskiner som omdanner amerikansk bomuld til klæde fra Manchester.

Den tredje generation af dampmaskiner benyttes på moderne el-værker. Varmen kommer her fra afbrænding af kul, olie eller gas eller fra atomkernereaktioner. Et moderne kraftværk består af to forbundne cylindre, som indeholder vand og damp. På varmesiden opvarmes vandet til damp hvorved trykket stiger, da både T og n stiger uden at ændre V. På koldsiden bruges kølevand til at fortætte dampen til vand, hvorved trykket falder, da både T og n falder uden at ændre V. Herefter pumpes vandet tilbage til varmesiden. Mellem højtrykket på varmesiden og lavtrykket på koldsiden vil der blæse en kraftig vind af damp. I denne blæst sættes en vindmølle eller turbine op, og denne driver så en generator som frembringer strøm.

Demokratiet, det amerikanske og det franske. Med opdagelsen af at tro kan erstattes af viden følger oplysningstiden med dens tro på, at mennesket er umyndigt og ikke behøver formyndere hverken i form af metafysiske herrer, guder og en fysisk herrer, konger. Mennesker kan styre sig selv gennem demokrati. I løbet af 1700 tallet installeres demokratiet to steder, i USA og i Frankrig. USA var en nyt land uden formyndere til at bekæmpe demokratiet, og USA har da også stadig deres første republik.

Det franske demokrati var derimod omgivet af autokratier, som søgte at kvæle det. Den franske republik måtte derfor kæmpe hårdt for sin overlevelse, og er i dag nået op på den femte republik. Frankrig mobiliserede derfor hele befolkningen bl.a. gennem uddannelse på eliteskoler, især polytekniske skoler hvis ingeniørerne blev uddannet til krigsingeniører, som kunne bygge broer til hurtig troppetransport, og anlægge store befæstningsanlæg rundt om byer. Man måtte derfor indføre betegnelsen civilingeniør for dem der ikke arbejdede med krigsopgaver.

De franske eliteskoler søgte hele tiden at være forud for de andre lande, og det er på disse skoler at alternativet til dampmaskinen, elektromotoren udvikledes. Danskeren Ørsted opdager at en elektrisk strøm påvirker en magnetnål. Men hvor danskeren så en åbenbaring af skjulte sammenhænge i en romantisk natur, så franskmændene en ny naturkraft ved siden af tyngdekraften og dampkraften, en elektromagnetisk kraft. For når én ledning kan påvirke en magnetnål, kan mange ledninger opviklet i en spole virke som en stærk magnet, som kan trække i en anden spole. Kort sagt, strøm trækker i strøm. Også sammenhængen mellem elektricitet og magnetisme udtrykkes i forskellige formler, der til sidst samles i Englænderen Maxwells fire elektrodynamiske ligninger: $\int D\ dS = \int \rho\ dV$, $\int B\ dS = 0$, $\int E\ dl = -\int \partial B/\partial t\ dS$, $\int H\ dl = -\int (j+\partial D/\partial t\ dS$.

Med elektriciteten til rådighed kan bevægelsen pumpes ud i alle afkroge af samfundet, og produktionen behøver nu ikke mere foregå i nærheden af dampmaskinen. Industrisamfundet bliver til et forbrugersamfund, hvor mange virksomheder konkurrerer på et marked, og derfor kun kan overleve hvis man er i stand til at maksimere sin fortjeneste og minimere sine omkostninger: Hvis jeg nedsætter stykprisen x vil jeg tjene mindre per enhed, men til gengæld kan jeg afsætte flere enheder, så hvad skal jeg gøre? Indtjening = Stykpris * styktal = x*(b-a*x) = -a*x^2 + b*x, dvs. en nedadkrummende parabel med toppunkt i x = (-b)/(-2*a) = ½*b/a. Dvs. jeg skal nedsætte prisen indtil det halve af forholdet mellem den maksimale afsætning b og marginaltabet a.

Operationsanalyse. Optimeringsbehovet fører til nye regnemetoder, som kaldes beslutningsteori og operationsanalyse, hvor især spilteori og lineær programmering bliver meget brugt.

I spilteori er et typisk problem: Jeg har valget mellem to strategier A og B, og min modspiller har valget mellem strategierne C og D. Vi kan således havne i fire forskellige situationer med hvert deres udbytte, A,C:10 og A,D:-10 og B,C:-5 og B,D:5. Vi er begge nødt til at blande vore strategier for at modspilleren ikke kan udnytte sin viden til at udbytte den anden. Jeg vælger derfor strategien A x% af gangene, og min modspiller vælger derfor C y% af gangene. Udbyttet bliver da P = 10*x*y – 10*(1-x)*y – 5*x*(1-y) + 5*(1-x)*(1-y) = 5 – 10*x – 15*y + 30*x*y. Dette er en todimensional saddelkurve, hvor vi vil fastholde hinanden i saddelpunktet, som findes ved at skære yderlinierne hvor x = 0 hhv. 1, og hvor y = 0 hhv. 1. Herved findes at x = ½ og y = 1/3. Dvs. jeg skal vælge A når mønten siger plat, og min modstander skal vælge C når terningen viser 1 eller 6.

I lineær programmering er et typisk problem: Jeg har en bestemt kapital at investere i forskellige typer råvarer med hver deres omkostning og hver deres indtjening, men produktionen er underkastet en række begrænsninger bestemt af produktionsapparat, knaphed, traktater, mm. Så hvad er den optimale investeringsfordeling under de given begrænsninger? Eksempel: På markedsdagen har jeg 1200 kr. til at investere i x kasser vand á 25 kr. og y kasser øl á 100 kr. Jeg kan kun nå at afsætte 21 kasser, og reglerne har sat et maksimum ved 15 kasser vand og 10 kasser øl. Min indkomst pr. kasse vand og øl er hhv. er 80 kr. og 120 kr. Mit mulighedsområde er da en 6kant begrænset af 6 lofts-linier, vand-loft: x = 0 og x = 15, øl-loft: y = 0 og y = 10, afsætningsloft: x+y = 21, kapitalloft: 25*x + 100*y = 1200. Indenfor dette mulighedsområde skal indkomsten P = 80*x + 120*y maksimeres. P giver anledning til en række niveaulinier y = -2/3*x +

P/120, som forskydes mod højre for voksende P-værdier. P vil da være maksimal i et af sekskantens hjørner, som derfor udregnes ved at skære hjørnets kantlinier. Det viser sig så at løsningen ligger hvor afsætningsloftet møder kapitalloftet i x=12 og y=9. Den maksimale profit bliver derfor P = 80*x + 120*y = 80*12 + 120*9 = 2040.

Computeren. Tidligere blev algebraen kun fodret med geometriske problemer, og da havde ligningerne kun tre ubekendte, som sagtens kunne løses på papir. I operationsanalysen repræsenterer de variable ikke mere koordinater i et tredimensionalt rum, men varetyper. Dvs. nu opstår regneproblemet: Hvordan løses mange ligninger med mange ubekendte? Dette blev særlig aktuelt under anden verdenskrig, hvor den amerikanske produktion skulle optimers og transporteres til forskellige kamppladser. Der blev udviklet en speciel metode til beregning af mange ligninger med mange ubekendte, simpleks-metoden, der dog var så tidskrævende at der opstod et behov for en stor regnemaskine til at løse mange ligninger. Dette førte til udviklingen af den elektroniske regnemaskine, hvor vi bruger elektroner til ikke kun at bære energi, men nu også til at bære information.

Hermed er grunden lagt til den senere udvikling af computeren, beregneren. Som senere igen bliver brugt som en elektronisk informationsbehandler. Dermed opstår den kunstige hjerne som afløser det moderne maskinbaserede industrisamfund med et postmoderne computerbaseret informationssamfund, hvor mennesket er fritaget for rutinearbejdet. Dette gælder også inden for regnefaget. Med fremkomsten af stærke lommeregnere bliver det ikke menneskets opgave at konkurrere, men at samarbejde med regneteknologien: Mennesket opstiller, vurderer og redigerer ligninger, og maskinen løser dem. Da computeren kun kan tælle digitalt i toere må menneskets titalssystem oversættes til et totalssystem eller til et 2*2*2*2 dvs. 16-talssystem eller hexadecimalsystem: T = (29)10 = (11101)2 = (1D)16

1.2 Sprogteori, sproghuset, talesprog og talsprog

Vi kan sætte ord på ting, vi kan itale-sætte ting med vort talesprog - og vi kan sætte tal på ting, vi kan ital-sætte ting i talsproget. Ord kan danne sætninger - tal og regningsarter kan danne tal-sætninger (regnestykker, formler, ligninger). Sætninger kan danne fortællinger, kvalitativ litteratur -ligninger kan danne beregningsfortællinger, kvantitativ litteratur (scenarier, modeller). Kort sagt, verden kan beskrives med ord-sætninger i tale-sproget, og med tal-sætninger i tal-sproget.

Men også sætninger kan beskrives af et særligt sprog, over-sproget, meta-sproget, grammatikken. Talesprogets grammatik sætter ord på sætninger, ord som navneord, grundled mm. Talsprogets grammatik, matematik, sætter ord på ligninger, ord som tal, regningsart, regnestykke, funktion mm.

Inden for talesproget bruges talemåden ”talesprogets grammatik”, hvorfor vi ”selvfølgelig” lærer talesproget før vi lærer talesprogets grammatik, ”for hvordan kan vi forstå talesprogets grammatik hvis vi ikke kender talesproget”?

Inden for talsproget kunne vi bruge talemåden ”talsprogets grammatik, matematik”, og vi ville da ”selvfølgelig” lære talsproget før vi lærer talsprogets grammatik, ”for hvordan kan vi forstå talsprogets grammatik hvis vi ikke kender talsproget”?

Inden for talsproget kunne vi altså sige at ”talsproget skaber sin grammatik, matematik”. Men i stedet vender vi tingene på hovedet ved at tale om at ”talsproget anvender sin grammatik, matematik”, og vi vil da ”selvfølgelig” lære grammatikken før vi lærer talsproget, ”for hvordan kan vi forstå grammatikkens anvendelse hvis vi ikke kender grammatikken”? ”Hvordan kan vi forstå matematikkens anvendelse hvis vi ikke kender matematikken”?

Historisk er både talesproget og talsproget opstået før deres grammatik. Dette respekterer talesprogsundervisningen ved at undervise i sprog før grammatik. Talsprogsundervisningen gør det modsatte og underviser i grammatik før sprog. Historisk er matematikkens begreber opstået nedefra som abstraktioner, men i undervisningen præsenteres de oppefra som eksempler. Et abstrakt begreb defineres ud fra et endnu mere abstrakt begreb som når 1700tals begrebet ”funktion” defineres som et eksempel på en mængderelation, dvs. som et eksempel på et 1900tals begreb. Når den historiske rækkefølge vendes på hovedet, at det ikke mere matematik vi arbejder med men ”omvendt matematik”, som burde kaldes ”meta-matik” i stedet for mate-matik.

Kort sagt talemåder bestemmer handlemåder, og stivnede talemåder forfører os til at tro at der ikke findes andre talemåder, at de er naturligt og ikke politisk korrekte, jf. eventyret om Askepot.

De to sproghuse

<table>
<tr>
<td>META-sprog

Grammatik

Tale-sprogets grammatik</td>
<td>Genstandsled

Udsagnsled

Grundled

Ting

sætninger
itale-sætter
kvaliteter</td>
<td>Regnestykke

Lighedstegn

Tal

Mangfoldighed

ligninger
ital-sætter
kvantiteter</td>
<td>Matematik nedefra:

Regningsarter
opsamler og opdeler enkelttal i totaler
(Algebra: genforening)
Regningsarter
<table>
<tr><td>opsamler
opdeler i</td><td>variable</td><td>konstante</td></tr>
<tr><td>styk-tal
meter, sekund</td><td>$T = a+b$
$T-b = a$</td><td>$T = a * b$
$T/b = a$</td></tr>
<tr><td>pr.tal
meter/sekund
m/100m = %</td><td>$\Delta T = \int f\,dx$
$\frac{dT}{dx} = f$</td><td>$T = a \wedge b$
$\sqrt[b]{T} = a$
$\log_a T = b$</td></tr>
</table>
</td>
<td>Matematik oppefra:

Regningsarter
er eksempler på funktioner
som er eksempler på relationer
som er eksempler på mængder

MÆNGDE

RELATION

FUNKTION</td>
<td>META-sprog

Matematik

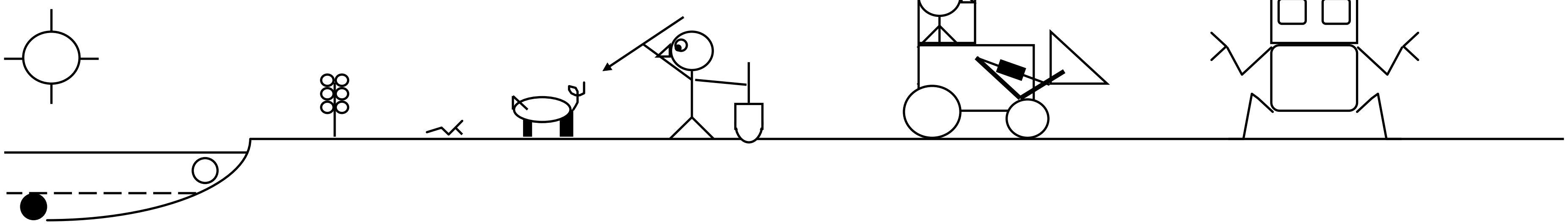
Tal-sprogets grammatik</td>
</tr>
<tr>
<td>TALE-sprog

anvendelse af GRAMMATIK</td>
<td colspan="2">Fakta/fiktion/fidus-fortællinger om
<table>
<tr><td>Personer, arbejde</td><td>Punkter</td><td>geometri</td></tr>
<tr><td>lykke, drømme</td><td>Partikler</td><td>fysik</td></tr>
<tr><td>følelser, handling</td><td>Penge</td><td>økonomi</td></tr>
<tr><td>kærlighed, had, penge</td><td>Personer</td><td>biologi</td></tr>
<tr><td></td><td>Politik</td><td>sociologi</td></tr>
</table>
</td>
<td colspan="2">Regneskema:
<table>
<tr><td>a = ?</td><td>T = c + a*b</td></tr>
<tr><td>T = 100
b = 10
c = 30</td><td>T = c + (a*b)
T - c = a*b
(T-c)/b = a
(100-30)/10 = a
7 = a</td></tr>
</table>
</td>
<td>TAL-sprog

anvendelse af MATEMATIK</td>
</tr>
</table>

Talesprog før talesprogets grammatik & Talsprog før talsprogets grammatik – Men: Matematik før matematikkens anvendelse

VERDEN:



1.3 Tal tæller, ord forfører

Blyants-dilemmaet siger: Anbragt mellem en lineal og en ordbog kan en blyant selv udpege sin længde, men ikke sin betegnelse. Ting kan optælle og italsætte sig selv - men ting kan ikke navngive eller italesætte sig selv. Ting kan selv falsificere taludsagn som "tingen har en længde på 12.3 cm" - ting kan ikke selv falsificere taleudsagn som "dette er en blyant". Taludsagn kommer af naturlig korrekthed og kan valideres af en naturlig autoritet, sætningens grundled - ordudsagn kommer af politisk korrekthed og kan kun valideres af en politisk autoritet, sætningens læser. Taludsagn kan afgøres i laboratoriet, og kan aldrig appelleres - ordudsagn afgøres i retssalen gennem en afstemning, og kan altid appelleres. Tal kan bære sandhed - ord kan kun bære fortolkning, der præsenteret som forskning bliver til forførelse.

At ordudsagn altid kan være anderledes afsløres under retsalens krydsforhør. Der findes derimod ikke kryds-forhør og afstemning i laboratoriet, for taludsagn og beregninger udtrykker en uomgængelig nødvendighed og autoritet. Derimod kan regneudsagn lige som sætninger være af tre forskellige typer, fakta, fiktion og fidus.

1.4 De 3 genrer: Fakta, fiktion og fidus

Både kvalitativ og kvantitativ litteratur kan opdeles i tre genrer: Fakta, fiktion og fidus.

Kvalitative genrer, eksempler:
Fakta: "DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger den lavt"
Fiktion: "HVIS København lå i alperne Sjælland, SÅ lå den højt".
Fidus: "HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt."

Kvantitative genrer, eksempler:
Fakta. Fakta er "DaSå" beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige: "DA prisen er 4 kr./kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr.".

DaSå beregninger kunne også kaldes FritFalds-beregninger: "DA accelerationen er 9.8 m/s^2, SÅ vil hastighedstilvæksten på 5 sekunder være 5*9.8 = 49 m/s".

Eller Rum-beregninger: "DA rummet har dimensionerne 3mx4mx5m, SÅ er rumfanget V = 3mx4mx5m = 60 m^3".

Fakta-beregninger kontrolberegnes: T = 3 kg. á 4 kr./kg. = 3*4 kr. = 15 kr., hov regnefejl, T = 12 kr.

Et eksempel er regnefejlen som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm+3 tommer=5 cm

Fiktion. Fiktion er "HvisSå" beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige: "HVIS indkomsten er 4 mio$/år, SÅ vil 6 års indkomst være 6*4 = 24 mio$".

HvisSå beregninger kunne også kaldes Affalds-beregninger: "HVIS affaldsmængden er 9.8 kg/dag, SÅ vil arbejdsugens affald være 5*9.8 = 49 kg".

Eller Rate-beregninger: "HVIS vækstraten er 3% pr. år, SÅ vil den samlede vækstrate efter 5 år være 15.9%, da 103%^5 = 115,9%".

Fiktions-beregninger scenarieberegnes: Indkomsten skønnes at ville ligge mellem 4kr./dag og 5kr./dag, så 3 dages indkomst vil ligge mellem 12 kr. og 15 kr., da T = 3 dage á 4 kr./dag = 3*4 = 12 kr., og T = 3 dage á 5 kr./dag = 3*5 = 15 kr.

Fidus. Fidus er "HvadSå" beregninger, som kvantificerer det ikke-kvantificerbare: "HVIS konsekvensen K = "brækket ben" sættes til 2 mio.$, og HVIS sandsynligheden S sættes til 30%, SÅ vil risikoen være R = K*S = 2*0.3 = 0.6 mio.$. Og HVADSÅ? Hvem siger at et brækket ben koster 2 mio. kr.? Og hvem siger at sandsynligheden for at brække et ben overhovedet kan måles?"

HvadSå beregninger kunne også kaldes Dødsfalds-beregninger: "HVIS omkostningen ved en gravplads er 10 kr./dag, og omkostningen ved en hospitalsplads er 10.000 kr./dag, SÅ er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVADSÅ, betyder det at hastighedsgrænsen så skal sættes op til 200 km/time for at spare penge?"

Eller Risiko-beregninger: "HVIS vi kan øge sandsynligheden for dødsfald og mindske sandsynligheden for kvæstelse, SÅ vil risikoen ved skolevejen kunne nedsættes. Og HVADSÅ betyder det at vi skal nedlægge fodgængerfeltet?"

Fidus-beregninger afvises og henvises til kvalitativ behandling: "Risiko = 30%*5mio. Og HVADSÅ, en oplysningskampagne kan nedsætte sandsynligheden, og hvem siger at et brækket ben koster 5 mio. kr.?"

1.5 Klassiske tekstopgaver

1.5.1 Eksempler på babylonske matematikopgaver

B1. Giv mig et tal som sammenlagt med sin reciprok giver tallet b.

B2. Jeg har ganget længden med bredden og fået arealet 10. Jeg har ganget længden med sig selv og fået et areal, som er det samme som hvis jeg ganger forskellen på længden og bredden med sig selv og med 9.

B3. Én mand kan grave 3 stader grøft på 1 dag. Hvor mange mænd skal jeg bruge for at grave 100 stader grøft på 6 dage?

B4. Hvor mange måne-måneder på 29 dage skal der til for at give et helt antal solår på 365 dage?

B5. Forholdet mellem arealet og omkredsens kvadrat er 12 for en cirkel.

1.5.2 Eksempler på ægyptiske matematikopgaver

Ægypterne skrev på papyrus. Der er to bevarede papyrus-skrifter fra ca. 1700 f.Kr., Rhind papyrus i London og Moskva-papyrus i Moskva. Begge indeholder problemer og deres løsning, 85 på Rhind, og 25 på Moskva.

Æ1. En mangfoldighed søges så 2/3 af den, ½ af den, 1/7 af den og den selv tilsammen er 33.

Æ2. Af 2 tønder middelgod korn kan laves 5 flasker almindeligt øl. Af 3 tønder god korn kan laves 8 flasker almindeligt øl. 3 flasker god øl svarer til 2 flasker stærkt øl. Hvor meget korn skal bruges til at lave 20 flasker almindeligt øl? Og til at lave 30 flasker stærkt øl?

Æ3. En trekant har arealet $A = ½*side*side$. En cirkel har arealet $A = (8d/9)^2$, hvor d er diameteren. Arealet af en firkant med modsatte sider a og b, hhv. c og d er $A = (a+b)/2*(c+d)/2$, hvilket også gælder hvis $d=0$.

Æ4. Rumfanget af en afskåret kegle til vand er $V = h/12 * (3*(D+d)/2)^2$, hvor h er højden og $(D+d)/2$ er den gennemsnitlige omkreds. Rumfanget af en afskåret pyramide med kvadratisk grundfalde er $V = h/3 * (a^2 + a*b + b^2)$, hvor h er højden og a og b er sidelængderne for oven og for neden.

Æ5. Året går fra den første dag, hvor Sirius er synlig i horisonten lige før solopgang. Dette giver en kalender med 365 dage, som opdeles i 12 måneder á 30 dage plus 5 dage til sidst. Der medtages ikke skuddag hver fjerde år. Denne kalender blev overtaget af Julius Cæsar, som dog tilføjede en skuddag.

Æ6. Byg en pyramide af kubiske sten, som skal løftes af en løftestang. 1 mand kan løfte en sten, hvis stangen er 30 meter lang. Hvor mange mænd skal løfte, hvis stangen kun er 12 meter lang?

1.5.3 Proportionalitet

Proportionalitetsopgaver forekommer overalt hvor der skal veksles om mellem to forskellige typer enheder, altså opgaver hvor der er et konstant pr.tal mellem to enheder. Dvs. situationer hvor en mangfoldighed kan dobbeltbundtes og optælles i to forskellige enheder.

	Ligefrem (indkøbsopgaver)	Omvendt (grøfteopgaver)
Spørgsmål	3 kg. = 4 kr. 5 kg. = ? kr. ? kg. = 10 kr.	5 mand graver en grøft på 7 dage 3 mand graver en grøft på ? dage ? mand graver en grøft på 4 dage.
Svar	T = 5 kg. = (5/3)*3 kg. = (5/3)*4 kr. = 6.67 kr. T = 10 kr. = (10/4)*4 kr. = (10/4)*3 kg. = 7.5 kg.	Mand-dage = 5*7 = 35 = (35/3)*3 = 11.67*3 Mand-dage = (35/4)*4 = 8.75*4

1.5.4 Standardopgaver

Ved løsning af de klassiske standardopgaver benyttes følgende fremgangsmåde:

Lav en hurtig gennemlæsning for at se, hvilken type opgave det er.

Find spørgsmålstegnet, som viser hvad den ubekendte x er.

Hvis der er flere ubekendte, lad altid x være den mindste ubekendte. Den anden kan da enten udtrykkes ved x, eller kaldes y.

Omformuler teksten, så den begynder med ”Lad x = <f.eks. kilo-tallet>”, og brug kun ordet ’er’, som kan oversættes direkte til lighedstegnet ’=’.

Oversæt opgaven fra tekst til ligninger, løs ligningerne, og oversæt tilbage.

Type 1 styktals-opgaver

Type1.1 talproblemer

Problem: ”To tal har summen 72, og det ene er dobbelt så stor som det andet. Hvilke tal er det?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Tal1	x = ?	*24*	y + y	= 72
Tal2	y = 2*x	*48*	x + 2*x	= 72
			3*x	= 72
			x	= 72/3 = 24

Type1.2 møntopgaver

A betaler en regning på 210 kr. med tre typer mønter: 1ere, 2ere og 5ere. Der er 4 gange så mange 1ere som 2ere, og 20 færre 2ere end 5ere. Hvor mange mønter af hver type blev brugt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
5ere	x = ?	*30*	x*5 + (x-20)*2 + 4*(x-20)*1	= 210
2ere	x-20	*10*	5*x + 2*x – 40 + 4*x – 80	= 210
1ere	4*(x-20)	*40*	11*x	= 210 + 120
			x	= 330/11
			x	= 30

Type1.3 aldersopgaver

A er 4 gange så gammel som B. For 5 år siden var A 7 gange så gammel som B. Hvor gammel er A og B nu?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
B’s alder nu	x = ?	*10*	7*(x-5)	= 4*x – 5
A’s alder nu	4*x	*40*	7*x – 35	= 4*x – 5
B’s alder da	x - 5		7*x – 4*x	= – 5 + 35
A’s alder da	4*x - 5		3*x	= 30
			x	= 30/3
			x	= 10

Type1.4 geometriopgaver

Et rektangel har en omkreds på 224 meter. Længden er 4 meter kortere end 3 gange bredden. Hvad er længde og bredde?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Bredde	x = ? meter	*29*	2*x + 2*(3*x-4)	= 224
Længde	3*x-4 meter	*83*	2*x + 6*x – 8	= 224
			8*x	= 224 + 8
			x	= 232/8
			x	= 29

Type1.5 vægtstangsopgaver

A, B og C sætter sig på en vippe, B og C på samme side. De vejer hhv. 100kg, 80 kg. Og 40 kg. A og B sidder begge 3 meter fra omdrejningspunktet. Hvor skal C sidde for at der bliver ligevægt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
C’s meter-tal	x = ?	*1.5*	100*3	= 80*3 + 40*x
A’s bidrag	100*3		300	= 240 + 40*x
B’s bidrag	80*3		300 – 240	= 40*x
C’s bidrag	40*x		60/40	= x
			1.5	= x

Type 2 pr.tals-opgaver

I pr.tals opgaver skal pr.tal altid omregnes til styktal før ligningen kan opstilles.

Type2.1 rejseproblemer

Problem21: Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. To timer senere kører tog2 kører fra A til B med hastigheden 60 km/t. Hvornår overhaler tog2 tog 1?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Timetallet		x = ?	*4*	40*(x+2)	= 60*x
Hastighed1	40 km/t			40*x + 80	= 60*x
Hastighed2	60 km/t			80	= 60*x – 40*x = 20*x
Km-tal1		40*(x+2) km	*240*	80/20	= x
Km-tal2		60*x km	*240*	4	= x

Problem22: Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. Samtidig kører tog2 kører fra B til A med hastigheden 60 km/t. Hvornår mødes de to tog, når afstanden fra A til B er 300 km?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Timetallet		x = ?	*4*	40*x + 60*x	= 300
Hastighed1	40 km/t			100*x	= 300*x
Hastighed2	60 km/t			x	= 300/100
Km-tal1		40*x km	*120*	x	= 3
Km-tal2		60*x km	*180*		

Problem23: I en motorbåd tager samme afstand 3 timer modstrøms, og to timer medstrøms. Hvad er bådens fart, når strømmens fart er 5 km/t?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Fart	x = ? km/t		*25*	km = km/t*t = (x-5)*3	= (x+5)*2
Fart modstrøms	x – 5 km/t		*20*	3*x-15	= 2*x+10
Fart medstrøms	x + 5 km/t		*30*	3*x-2*x	= 10+15
Sejltid		3 timer		x	= 25

Type2.2 blandingsopgaver

? Liter 40% alkohol + 3 liter 20% alkohol giver ? liter 32% alkohol

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Liter-tallet		x = ? liter	*4.5*	0.4*x + 0.2*3	= 0.32*(x+3)
Liter-tal3		x+3 liter	*7.5*	0.4*x + 0.6	= 0.32*x + 0.96
Alkohol1	40%	0.4*x liter		0.4*x - 0.32*x	= 0.96- 0.6
Alkohol2	20%	0.2*3 liter		0.08*x	= 0.36
Alkohol3	32%	0.32*(x+3)	liter	x	= 0.36/0.08
				x	= 4.5

Type2.3 finansopgaver

A investerer en tipsgevinst på 400.000 kr. på følgende måde: Noget sættes til forrentning til 3% p.a., resten sættes i 8% obligationer. Hvor meget investerede han i hver når det årlige udbytte er 20.000 kr?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Bank i tusinde		x = ? kr.	*240*	3%*x + 8%*(400-x)	= 20
Obligationer i tusinde		x+3 kr.	*160*	0.03*x + 32 – 0.08*x	= 20
Rente i bank	3%			32 - 20	= 0.08*x – 0.03*x
Rente på obligationer	8%			12	= 0.05*x
Bankens bidrag		3%*x kr.		12/0.05	= x
Obligationernes bidrag		8%*(400-x) kr.		240	= x

Type2.4 arbejdsopgaver

A kan grave en grøft på 4 timer. B kan grave samme grøft på 3 timer. Hvor lang tid tager det at grave den sammen?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Tid		x = ? timer	*12/7*	¼*x + 1/3*x	= 1
A's fart	1/4 grøft/t			(¼ + 1/3)*x	= 1
B's fart	1/3 grøft/t			7/12*x	= 1
A's bidrag		¼*x		x	= 12/7
B's bidrag		1/3*x			

1.6 Klassiske fysikopgaver

1.6.1 Mekanikopgaver

M1. En bold falder fra toppen af en skyskraber (der ses bort fra luftmodstanden). Efter 0 sekunder er bolden i 300 meters højde. Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 0 meters højde. Hvad er nedslagshastigheden?.

Højde efter 5 sek.:

s = ? meter	s = ½*g*t^2
T = 5 sek. g = 9.8 m/s^2 Højde = ?	s = ½*9.8*5^2 s = 123.7 meter H = 300-123.7 H = 177.3 m

Nedslagstid:

t = ? sek.	s = ½*g*t^2
s = 300 m g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*300/9.8g) = t 7.82 sekunder = t

Nedslagshastighed:

v = ? m/s	v = g*t
t = 7.82 sek. g = 9.8 m/s^2	v = 9.8*7.82 v = 76.6 m/s

M2. En bold skydes lodret op med en begyndelseshastighed på 30 m/s (der ses bort fra luftmodstanden). Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 40 meters højde. Efter ? sekunder er bolden i maksimalhøjden?

Højde efter 5 sek.:

s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t
t = 5 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*5^2+30*5 s = 27.5 meter

Tid til 40 m:

t = ? sek.	s = ½*g*t^2+vo*t
s = 40 m. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	40 = -4.9*t^2+30*t 4.9*t^2-30*t+40 = 0 t = 1.96 og 4.16 sekunder

Stigtid indtil hastighed = 0:

t = ? sek.	v = g*t+vo
v = 0 m/s g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	(v-vo)/g = t (0-30)/(-9.8) = t 3.1 sekunder = t

Stighøjde:

s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t
t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*3.1^2+30*3.1 s = 45.9 meter

Opgavens højde-del kan også regnes som en opgave i omsætning af energi fra bevægelsesenergi til beliggenhedsenergi:

Stighøjde	h = ? meter	Ep = Ek
Stigtid Acceleration Begyndelseshastighed Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi	t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h	m*g*h = ½*m*v^2 h = ½*v^2/g h = ½*30^2/9.82 h = 45.8 meter

M3. En person på 100 kg udfører et Bounty-spring fra en bro (der ses bort fra luftmodstanden). Der er 220 meter ned. Fødderne er fæstnet i et tov på 120 meter, som er fæstnet i en fjeder med fjederkonstant k = 100 N/m, svarende til at 10 kg kan forlænge fjederen 1 m. Hvor langt kommer personen ned? Hvad hvis personen vejede 150 kg?

Fjederudstrækning	x = ? meter	Ef = Eb
Falddistance Acceleration Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi Fjederenergi	d = 120+x g = -9.8 m/s^2 Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h Ef = ½*k*x^2	½*k*x^2 = m*g*h x^2 = 2*m*g*h/k x =√(2*m*g*h/k) x = √(2*100*9.82*120/100) x = 48.5 d = 120+48.5 = 168.5 meter

M4. En person gynger i en gynge (der ses bort fra luftmodstanden). Gyngestativet er 4 m højt og snorelængde er 3 m. Hvad er svingningstiden? I yderstillingen er udsvinget 50 grader. Hvad er maksimalhastigheden? Hvor langt er springet hvis afsættet sker i nederste position?

Svingningstid	T = ? sekunder	T = 2*π* √(l/g)
Snorelængde Acceleration	l = 3 m g = -9.8 m/s^2	T = 2*π* √(3/9.82) T = 3.47 sekunder

Stig-højde ved 50 graders udsving: *Maksimalhastighed ved 0 graders udsving:*

s = ? meter	s = l – l*cos v		v = ? m/sek.	Ek = Ep
l = 3 meter v = 50 grader	s = 3 – 3*cos50 s = 1.07 meter		h = 1.07 m g = 9.8 m/s^2	½*m*v^2 = m*g*h v^2 = 2*g*h v =√(2*g*h) v = √(2*9.82*1.07) v = 4.58 meter/sekund

Faldtid ved 0 graders udsving: *Springlængde ved 0 graders udsving:*

t = ? sekunder	s = ½*g*t^2		s = ? meter	s = v*t
s = 4-3 = 1 meter g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*1/9.82) = t 0.45 sekunder = t		v = 4.58 m/s t = 0.45 s	s = 4.58*0.45 s = 2.06meter

1.6.2 Andre mekanikopgaver

M5. En kugle med massen 3 kg og hastighed4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet?

M6. En kugle med massen 3 kg og hastighed4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet?

M7. En kugle med massen 3 kg og hastighed4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet? Hvad er vinklen mellem de udgående retninger?

M8. En kugle med massen 3 kg og hastighed4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet? Hvad er kuglernes fælles retning efter sammenstødet?

M9. En person på 100 kg sidder med en 20 kg tung bold på en glat flade. Pludselig smider han kuglen væk så kuglen får hastigheden 4 m/s. Hvilken hastighed får personen?

M10. En kugle på 5 kg slynges rundt i en cirkel med radius 3 m. Svingningstiden er 1.3 sekunder. Hvilken trækkraft udøver kuglen? Hvilken hastighed har kuglen? Snoren springer, og kuglen falder 2 meter lodret før den rammer jorden? Hvor langt bevæger den sig i vandret retning? Med hvilken hastighed rammer den jorden?

M11. Hvor meget energi er der i en roterende stang med længde 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M12. Hvor meget energi er der i en roterende cirkulær skive med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M13. Hvor meget energi er der i en roterende kugle med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

1.6.3 Varmelæreopgaver

I en beholder befinder der sig 3.26 kg is ved temperaturen –25 grader celsius. Isen opvarmes med en dypkoger med effekten 500 watt. Hvor mange sekunder skal dypkogeren være tændt for at opvarme isen til 0 grader celsius? Herefter er dypkogeren tændt i 3 minutter. Hvor mange kg is smelter? 3.26 kg vand opvarmes fra 0 grader celsius til 80 grader celsius på 426 sekunder. Hvad er dypkogerens effekt? Hvor mange kg vand kan fordampes på 215 sekunder hvis dypkogerens effekt er 1500 watt?

1.6.4 Tryklæreopgaver

I en beholder på 30 liter findes 0.234 kg vanddamp ved en temperatur på 110 grader celsius. Hvad er trykket? Temperaturen stiger til 150 grader celsius. Hvor mange procent stiger trykket? Beholderen udvides til 40 liter. Hvor mange procent falder trykket? 0.1 kg vanddamp slippes ud. Hvor mange procent falder trykket? Temperaturen stiger nu indtil trykket er vokset med 30%. Hvad er sluttemperaturen?

1.6.5 Elopgaver

To apparater A og B er anbragt i serie i et kredsløb, som er forsynet med strøm af en joulekilde på 12 volt. A består af to apparater C og D anbragt parallelt. Hvor mange watt modtager apparaterne B, C og D, når de har følgende modstande, B: 10ohm, C: 15 ohm, D: 20 ohm.

1.7 Klassiske kemiopgaver

Ethan-gas forbrændes med ilt og producerer kuldioxid og vand. Hvor meget? (Støkiometri)

proces	Ethan C2H6	+	Oxygen O2	→	Kuldioxid CO2	+	Vand H2O	
symboler	2 C2H6	+	7 O2	→	4 CO2	+	6 H2O	
stofmængde	2		7		4		6	mol
Masse	2*30 = 60		7*32 = 224		4*44 = 176		6*18 = 108	gram
Volumen	2*24 = 48		7*24 = 168		4*24 = 96		0.108/1 = 0.108	liter

<u>40 gram ethan + ? gram ilt -> ? gram kuldioxid + ? gram vand</u>

40 gram ethan	= (40/60)*60 gram ethan	= (40/60)*224 gram oxygen = 149 gram oxygen
	= (40/60)*176 gram kuldioxid	= 117 gram kuldioxid
	= (40/60)*108 gram vand	= 72 gram vand

<u>40 liter ethan + ? gram ilt -> ? mol kuldioxid + ? gram vand</u>

40 liter ethan	= (40/48)*48 liter ethan	= (40/48)*224 gram oxygen = 187 gram oxygen
	= (40/48)*4 mol kuldioxid	= 3.33 mol kuldioxid
	= (40/48)*108 gram vand	= 90 gram vand

<u>3.6 mol ethan + ? gram ilt -> ? liter kuldioxid + ? mol vand</u>

3.6 mol ethan	= (3.6/2)*2 mol ethan	= (3.6/2)*224 gram oxygen = 403 gram oxygen
	= (3.6/2)*96 liter kuldioxid	= 173 liter kuldioxid
	= (3.6/2)*6 mol vand	= 10.8 mol vand

1.8 Klassiske spilopgaver

1.8.1 Uforudsigelige spil, hasard

S1. En tipskupon kan falde ud på 3^13 forskellige måder.

S2. Lotto er en klumpudtagning. Et udtag af 5 tal blandt 20 kan derfor falde ud på K(20,5) forskellige måder.

S3. I spillet ”21” får man kort indtil man stopper eller passerer 21. Kortet tæller hvad der står, billedekort 10, es 1 eller 11. Hvis man får over 21 er man ude. Jeg har 16 skal jeg stoppe? Jeg kan bruge højst en femmer. Antallet af brugbare kort er 4*5 = 20 ud af 52 kort. Der er da 38% chance for få noget brugbart. Forudsat alle kort er i bunken hvad de naturligvis ikke er. Så denne beregning siger ikke meget med mindre jeg ved hvilke kort der er tilbage.

S4. Mini-poker. To spillere A og B indskyder hver a kr. i puljen. De får hver et kort, først A så B. De røde kort er H-kort (høje), de sorte er L-kort (lave). 1) A vælger ”SE”: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. 2) A vælger ”MER” ved igen at lægge b kr. i puljen. I så fald har B to muligheder: ”GÅ” eller ”SE” ved at lægge b kr. i puljen. Ved ”SE” gælder som før: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. Ved ”GÅ” får A puljen. Hvilke værdier for a og b gør spillet retfærdigt?

1.8.2 Forudsigelige spil, snydespil

S5. Snydespil er spil man altid kan vinde, hvis man kender den vindende strategi. Man kan vise at alle NIM-spil er snydespil. I et NIM-spil skiftes spillerne til at fjerne tændstikker. Den der sidst fjerner har vundet.

S6. På bordet anbringes fire rækker med hhv. 1, 3, 5 og 7 tændstikker i. Spillerne skiftes til at fjerne tændstikker, men kun i én række ad gangen. Andenspiller har en vindende strategi, dvs. andenspiller har vundet på forhånd blot han laver de rigtige træk. (Tip: Ombundt i 2ere og se symmetrien. Førstespiller ødelægger symmetrien, andenspiller genopretter den).

S7. På bordet anbringes én række med 15 tændstikker. Spillerne skiftes til at fjerne 1 eller 2 tændstikker. Hvem har en vindende strategi?

1.9 Klassisk økonomisk teori

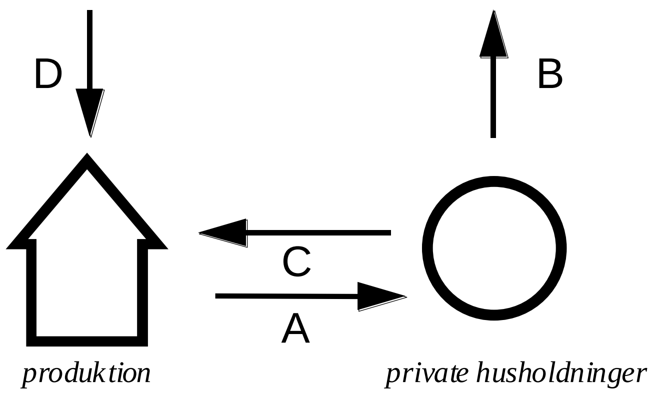
1.9.1 Det økonomiske kredsløb

Det grundlæggende økonomiske kredsløb består af to sektorer, produktionen og de private husholdninger. Vi har en række behov som vi dækker ved at producere varer og tjenesteydelser til andre. Til gengæld modtager vi så en indkomst som vi kan bruge til at dække vore egne behov med. Herved skabes det grundlæggende økonomiske kredsløb bestående af de to grundlæggende penge-strømme: Produktionen skaber en indkomst A (løn), som bruges til forbrug C (mad, klæder, mm.) som igen medfører en ny produktion. Hvis indkomsten og forbruget er i balance er det økonomiske kredsløb stabilt. Imidlertid er der både et dræn og en kilde i kredsløbet: Opsparingerne B og investeringerne D. Opsparing er penge som ikke bruges på forbrug. Investering er penge brugt til køb af varer som ikke kan forbruges, f.eks. bygninger og maskiner osv.

Kredsløbet er stabilt hvis opsparing og investering er I balance. Hvis opsparingen er større end investeringen vil kredsløbet svinde ind med massearbejdsløshed til følge.

Dette var tilfældet efter den første verdenskrig hvor Tyskland blev tvunget til at sende penge til Frankrig som krigsskadeerstatning uden at Frankrig var forpligtet til at købe tyske varer for pengene. Dette fik den engelske økonom J. M. Keynes til at trække sig ud af fredsforhandlingerne.

Og det var tilfældet i USA under den store depression i 1930'erne, hvor investeringerne i aktier faldt dramatisk efter det stor Wall Street krak i 1929, og hvor opsparingen steg for at kunne tilbagebetale de store lån der var optaget for at deltage i spekulationen på aktiemarkedet.



En model for det grundlæggende økonomiske kredsløb kunne indeholde fire ligninger:

Første tur:

1	Begyndelses indkomst	Ao = 100
2	Forbruget antages at være en konstant procentdelen af indkomsten	Co = c*Ao
3	Opsparingen er den indkomst som ikke forbruges	Bo = Ao–Co
4	Investeringen antages at være en konstant procentdelen af forbruget	Do = d*Co

Næste tur:

1	Den næste indkomst er det som produceres til forbrug og investering	A1 = Co+Do
2	osv.	

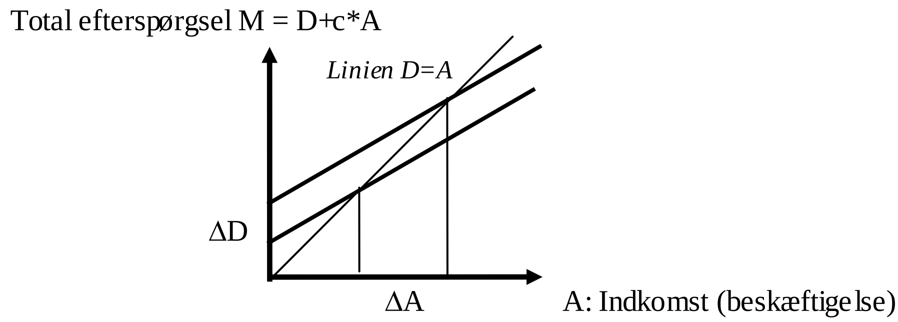
1 og 3 er fakta-ligninger, 2 og 4 er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.

1.9.2 Den simple Keynes model

Den simple Keynes model antager at investeringen D er konstant, og at der er en lineær sammenhæng mellem den totale efterspørgsel M og indkomsten A: M = D+C = D+c*A.

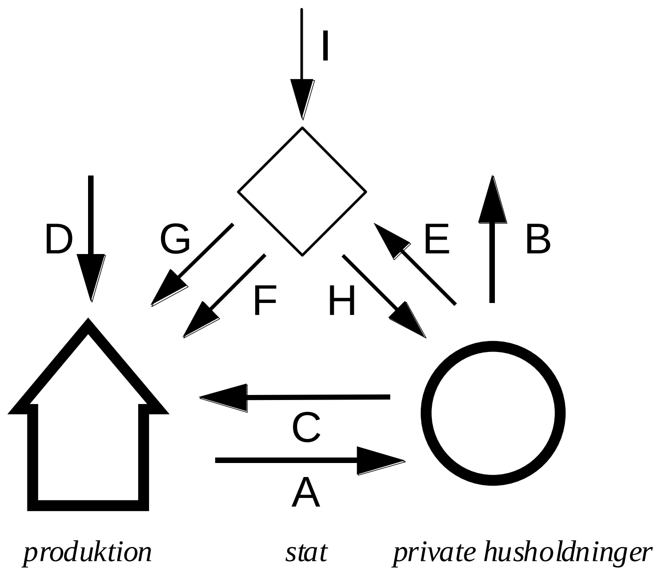
En ændring i investeringen D vil ændre balancen i kredsløbet fra indkomsten (og beskæftigelsen) A til en ny balance ved A'. Forholdet mellem de to ændringer kaldes multiplikatoren m = ΔA/ΔD.

Ved at øge investeringen D gennem offentlig investering kan regeringen øge beskæftigelsen. Derfor har kredsløbet brug for en stærk offentlig sektor for at sikre beskæftigelsen og velfærden



1.9.3 En økonomisk kredsløb med en offentlig sektor

Keynes viste hvordan en tredje offentlig sektor kan skabe balance I en to-sektor kredsløb. Den offentlige sektor trækker skatter E ud af kredsløbet, og bruger disse penge til at pumpe penge tilbage i kredsløbet gennem overførselsindkomster H til de ledige, offentligt forbrug F (flere offentligt ansatte mm.) samt offentlig investering G (flere veje mm.). Det offentlige kan optage lån, som tilbagebetales når kredsløbet igen er kommet i balance.



En model for dette 3-sektor økonomiske kredsløb kunne indeholde ni ligninger:

Første tur:

1	Begyndelses indkomst	Ao = 100
2	Begyndelses overførsler	Ho = 4
3	Skatterne antages at være en konstant procentdelen af indkomst og overførsler	Eo = e*(Ao+Ho)
4	Privatforbruget antages at være en konstant procentdel af rådighedsbeløbet	Co = c*(Ao+Ho–Eo)
5	Privatopsparingen er det rådighedsbeløb som ikke forbruges	Bo = Ao+Ho–Eo–Co
6	Offentligt forbrug antages at være konstant	Fo = konstant
7	Offentlig investering antages at være en konstant procentdel af investeringsgabet	Go = g*(Bo–Do)
8	Privatinvesteringen antages at være en konstant procentdel af forbruget	Do = d*(Co+Fo)
9	Låntagning er forskellen mellem skatter og offentlige udgifter	Io = Fo+Go+Ho-Eo

Næste tur:

1	Den næste indkomst er det som produceres til forbrug og investering	A1 = Co+Do+Fo+Go
2	Overførslerne antages at være en konstant procentdel af beskæftigelsesgabet	H1 = h*(Ao-A1)
3	osv.	

1, 2, 5 og 9 er fakta-ligninger, resten er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.

Simulering af det økonomiske kredsløb med og uden en offentlig sektor

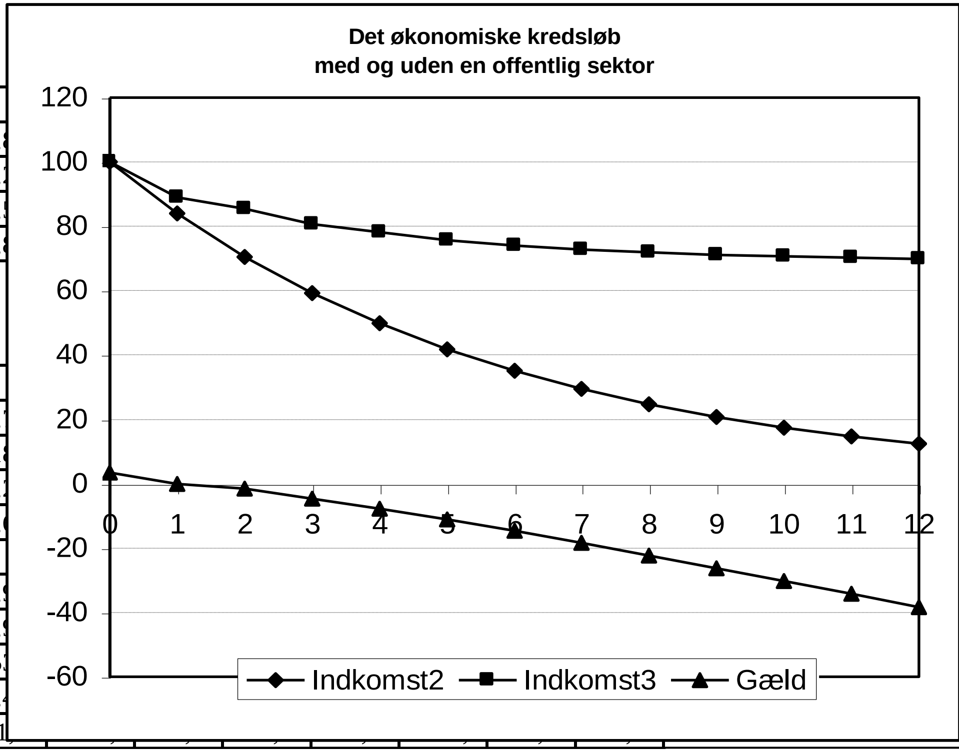
Rediger satserne i cellerne C5-C10
Rediger ikke ligningerne

Satser

Tid	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Forbrug	c	**70%**	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
Investering	d	**20%**	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%
Skat	e	**30%**	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
Offentlig investering	g	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Indkomstoverførsel	h	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Offentligt forbrug	F	**20**	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

2sektor-model

Tid	n	0	1	2	3	4	
Indkomst2	A	100	84	70,56	59,27	49,787	41,
Forbrug	C	70	58,8	49,392	41,489	34,851	29,
Opsparing	B	30	25,2	21,168	17,781	14,936	12,
Investering	D	14	11,76	9,8784	8,2979	6,9702	5,



3sektor-model

Tid	n	0	1	2	3	4	
Indkomst3	A	100	88,976	85,426	80,734	78,079	75,
Overførsler	H	4	9,512	5,7749	6,3464	5,327	5,1
Skat	E	31,2	29,546	27,36	26,124	25,022	24,
PrivatForbrug	C	50,96	48,259	44,689	42,669	40,869	39,
OffentligtForbrug	F	20	20	20	20	20	
Opsparing	B	21,84	20,682	19,152	18,287	17,515	16,
PrivatInvestering	D	14,192	13,652	12,938	12,534	12,174	11,
OffentligInvestering	G	3,824	3,5153	3,1073	2,8765	2,6708	2,5
Låntagning	I	3,376	-3,481	-1,522	-3,099	-2,976	-3,
Gæld		3,376	-0,105	-1,627	-4,726	-7,701	-11,

Dobbeltklik og rediger