KomMod rapporten

En modrapport til ministeriets Kompetencerapport

Allan Tarp, 2002.

KOMMOD-rapporten giver et alternativt svar til KOM-projektets kommissorium i forventning om at dettes giver, Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet, ønsker at respektere almindelig demokratisk IDB-tradition med Information og Debat mellem alternativer inden en Beslutning tages. Rapporten besvarer nedenstående spørgsmål vedrørende matematikundervisningen:

a Hvad er samfundets krav til undervisningen?
b I hvilken udstrækning er der behov for at forny den eksisterende undervisning?
c Hvordan kan undervisningen tage hensyn til den nye elevtype?
d Hvilket indhold kan der være i et tidssvarende matematikfag?
e Hvordan kan fremtidens undervisning være organiseret?
f Hvordan kan progression og sammenhæng i undervisningen sikres?
g Hvilke konsekvenser vil en ændret undervisning få for læreruddannelsen?
h Hvilke kompetencer og kvalifikationer kan erhverves på de forskellige stader af undervisningen?
i Hvordan kan kompetencer og kvalifikationer måles?
j Hvordan kan fremtidens undervisningsmaterialer se ud?
k Hvordan kan en løbende udvikling af undervisningen sikres?
l Hvordan kan Danmark udveksle erfaringer om undervisningen med udlandet?

Ad a. Vort demokratiske samfund har behov for, at borgere og specialister har et fælles talsprog, som de kan kommunikere i om kvantitative forhold og beregninger. Samfundet har behov for, at matematik bliver en menneskeret, både som diskursiv kvalifikation og som tavs kompetence.

Ad b. Der er behov for at forny den nuværende matematikundervisning for at løse dens tre hovedproblemer: 1. Der findes en udbredt talsprogs-analfabetisme, hvor mange borgere vægrer sig ved at benytte talsproget. 2. Der er store overgangsproblemer mellem primær, sekundær og tertiær uddannelse. 3. Der er en vigende tilgang til matematikbaseret videreuddannelse inden for naturvidenskab, teknologi og økonomi, samt en stor mangel på nye gymnasielærere i matematik.

Ad c. Fremtidens matematikundervisning bør respektere nutidens demokratiske, anti-autoritære ungdom og dens krav om mening og autenticitet. Dette kan opnås hvis faget begynder at respektere sine historiske rødder, og rehumaniserer sig ved at fremstille sine abstraktioner som abstraktioner og ikke som eksempler, dvs. som abstraktioner fra eksempler (en funktion er et navn for et regnestykke med variable tal), og ikke som eksempler på endnu mere abstrakte abstraktioner (en funktion er et eksempel på en mængderelation). Kort sagt, faget bør fremstille sig som *mate-matik*, der erkender at det har fysiske rødder og er vokset op nedefra gennem abstraktioner. Og faget må sige farvel til den nuværende *meta-matik* og dens tro på at faget har meta-fysiske rødder og er vokset ned oppefra gennem eksempler. Endelig må faget respektere, at mennesker lærer forskelligt. Børn lærer ved at mærke verden, dvs. gennem kompetenceopbygning. Unge lærer ved at lytte til verden, dvs. gennem fortællings- og kvalifikationsopbygning ud fra læringsspørgsmålet "fortæl mig noget jeg ikke ved, om noget jeg ved" (sladder-læring).

Ad d. Matematikken må respektere sin historie som fremvokset gennem abstraktioner, og dermed også sin konstruktion som talsprogets grammatik, der først kan introduceres efter at talsproget er udviklet. Talsproget er vokset ud af mødet med kvantitet i tid (gentagelse) og i rum (mangfoldighed). Dette møde har affødt konstruktion af tal til at beskrive totalen, enten gennem optælling i styk, bundter, bundter af bundter, bundter af bundter af bundter osv. Eller hurtigere ved gennem beregning at opsamle og opdele styktal (3 kr.) og pr.tal (3 kr./dag, 3%): Plus og minus opsamler og opdeler variable styktal (3+5 = ?, 3+? = 8). Gange og division opsamler og opdeler konstante styktal (3*5 = ?, 3*? = 15). Potens og rod&logaritme opsamler og opdeler konstante pr.tal (3 gange 5% = ?%, 3 gange ?% = 20%, ? gange 5% = 20%). Integration og differentiation opsamler og opdeler variable pr.tal (5 sekunder á 2m/s voksende jævnt til 4m/s = ?m, 5 sekunder á 2m/s voksende ? til 4m/s = 18m). Kort sagt, faget må respektere, at geometri er vokset ud af det, ordet betyder på græsk, jordmåling. Samt at algebra er vokset ud af det, ordet betyder på arabisk, genforening, dvs. opsamling og opdeling af konstante og variable styktal og pr.tal. Geometri og algebra må altså respektere deres historiske rødder som fremvokset af landbrugskulturens to hovedspørgsmål: "Hvordan deler vi jorden, og det den producerer?" Talsproget har en række typiske anvendelsesområder: Geometri regner på former og figurer. Handelsregning regner på niveautal. Vækstregning regner på forudsigelig variation. Statistik/sandsynlighedsregning regner på uforud-sigelig (men "bagud-sigelig") variation. Det er vigtigt at sikre, at undervisningen renses for "dræber-matematik" (dvs. matematik, der ikke forekommer uden for klasseværelset, og som kun kan anvendes til én ting, at dræbe elevers interesse). Plus bør kun forekomme inden for den parentes, der sikrer at enhederne er ens (T = 2*3 + 5*3 = (2+5)*3 = 7*3 = 21). Brøker bør kun optræde sammen med deres totaler (1/2 af 2 + 2/3 af 3 = 3/5 af 5). Ligninger bør løses ved tilbageregning. Da jagten på et veldefineret mængdebegreb er opgivet bør dette fjernes, og funktion udskydes til det dukker op historisk efter differentialregning.

Ad e. Fremtidens matematikundervisning kan organiseres i to hovedområder: Barnets matematik og ungdommens matematik, svarende til hhv. 1-7 skoleår og 8-12 skoleår. Gennem mødet med matematikkens rødder, gentagelse og mangfoldighed, udvikles fagets to kernekompetencer: tælle og regne.

Ad f. Progression og sammenhæng i undervisningen kan sikres ved at barnets matematik vokser ud af den lokale mangfoldighed, agerbrugskultur med land og by, og ved at ungdommens matematik vokser ud af industrikulturens globale mangfoldighed. Samt ved at barnet primært arbejder med styktal, og ungdommen primært med pr.tal.

Ad g. Med en opdeling af matematikundervisningen i barnets matematik og ungdommens matematik vil det også være naturligt at opdele læreruddannelsen i barneskolelærer og ungdomsskolelærer, på samme måde som det sker næsten overalt i udlandet. Det betyder at al fremtidige læreruddannelse samles på college-niveauet, enten på et universitet eller på et CVU. På sigt vil det falde sammen med den opdeling af skolen i en barneskole og en ungdomsskole, der vil finde sted inden for det næste tiår i forbindelse med gymnasiets sammenbrud på grund af øget lærerpensionering og mangelfuld tilgang af nye lærere inden for matematik og naturvidenskab.

Ad h. Gennem mødet med gentagelse og mangfoldighed udvikler barnet kompetencer i at opsamle og opdele konstante og variable styktal. På marken fører bundtning og ombundtning til gangning og division. I byen fører stakning og omstakning til plus og minus. Gennem fortællinger om beregning af gentagelse og mangfoldighed udvikler den unge kvalifikationer i at opsamle og opdele konstante og variable pr.tal. Den totale rente fører til potens, rod og logaritme. Den totale vejstrækning fører til integral- og differentialregning.

Ad i. Kompetencer er tavs viden og kan derfor hverken beskrives eller måles, men vil udvikle sig automatisk gennem mødet med meningsfulde og autentiske situationer, og vokse ud fra mange konkrete oplevelser med gentagelse og mangfoldighed, bundtning og stakning, opsamling og opdeling, styktal og pr.tal. Kvalifikationer kan som nu måles gennem løsning af tre typer opgaver: Rutineopgaver, tekstopgaver og projekter.

Ad j. Fremtidens undervisningsmaterialer bør være kortfattede for at der kan afsættes tid til elevernes læring gennem selvaktivitet. Materialet bør respektere, at eleverne har to hjerner, en krybdyrhjerne til rutiner og en menneskehjerne til begribelse. Der bør derfor være dels træningsopgaver med elevsvar, så den enkelte elev kan gå frem i sit eget tempo og træne efter eget behov. Dels kortfattede lærebøger der fortæller hvordan faget er vokset op fra praksis gennem lag af abstraktioner, og som accepterer forskellige betegnelser for fagets begreber, så disse navngives både nedefra og oppefra (plusvækst og lineær vækst/funktion mm.).

Ad k. En løbende udvikling af undervisningen kan sikres ved til stadighed at validere undervisningen i forhold til sine rødder og ikke i forhold til den aktuelle politiske korrekthed.

Ad l. Udveksling af erfaring med udlandet kan ske gennem at etablere en dansk uviklingsforskning, hvor praktikere får mulighed for at bestride kombinationsstillinger som forsker på et universitet/CVU og samtidig forbliver tilknyttet et lærerteam på en skole. Herved undgås den nuværende golde "spøgelsesforskning" udført af forskere uden erfaringsbaggrund i undervisningens praksis. Udviklingsforskningen bør være opdagelsesforskning (Askepot-forskning), der bruger praksisbaseret fantasi til at opdage og afprøve skjulte alternativer.

Forskelle på KOM- og KOMMOD rapporterne. Matematikundervisningens to hovedspørgsmål lyder: "Hvordan kommer begreber ind i verden, og ind i elevens hoved - udefra eller indefra"? Disse spørgsmål afføder forskellige svar. Gymnasiets *strukturalister* siger udefra-udefra: Begreber findes i det meta-fysiske, opdages af forskere og formidles af lærere. Folkeskolens *konstruktivister* siger udefra-indefra: Begreberne findes i det meta-fysiske, men opdages gennem eksperimenter, hvor den enkelte elev selv konstruerer sin egen viden og kunnen (skemaer og kompetencer), der begge er "tavse" og kun kan iagttages gennem brug. *Post-strukturalister* siger indefra-udefra: Begreber opstår af det fysiske gennem opfindelse og social konstruktion, og bør fortælles sådan. *Mesterlæren* siger indefra-indefra: Begreber konstrueres af lærlingen under deltagelse i mesterens praksis.

Over det meste af verden raser to videns-krige, en matematik-krig mellem strukturalister og konstruktivister, og en videnskabs-krig mellem strukturalister og post-strukturalister. I stedet for at vedkende sig forskelligheden forsøger KOM-rapporten at tilsløre denne ved at overtage konstruktivisternes centrale talemåde, kompetence, men give den et strukturalistisk indhold (indsigtsbaseret handleparathed). Den franske filosof Foucault har påvist, hvordan nye talemåder skaber nye klienter: "Kvalifikation" skaber den ukvalificerede, og "kompetent" skaber den inkompetente. Men hvor den ukvalificerede kan kurere sig selv ved at kvalificere sig, så kan den inkompetente ikke kurere sig selv ved at "kompetencere" sig, og er dermed overladt til at blive kureret af andre, de kompetence-kompetente. Overtagelse og ændring af talemåden kompetence kan derfor tolkes som strukturalisternes forsøg på at kuppe sig til en sejr i matematik-krigen, i stedet for at benytte denne til en frugtbar dialog med ligeværdige parter.

Først forsøgte strukturalisterne at løse matematik-krisen gennem talemåden "ansvar for egen læring". Eleverne tog denne talemåde alvorligt og vendte ryggen til "meta-matik"-undervisningens meningstomme selvreference (en funktion er et eksempel på en mængderelation: bublibub er et eksempel på bablibab). Nu søges lærerne disciplineret og umyndiggjort ved at konstruere dem som inkompetente med deraf følgende behov for kompetenceudvikling gennem massiv efteruddannelse.

Ved at udelade kompetencen "at eksperimentere" viser KOM-rapporten, at den kun respekterer videnskaben, og hverken videnskabelsen eller det videnskabende. Samt at den ikke respekterer den måde hvorpå unge og især børn tilegner sig viden gennem selvaktivitet og læring. Ved at definere kompetence som indsigtsbaseret forudsætter KOM-rapporten, at matematikken allerede er lært, hvorefter resten af tiden så kan bruges på at anvende matematikken, ikke på omverdenen, men på sig selv gennem otte interne kompetencer til udøvelse af matematikfaglighed. Herved bliver KOM-matematikken en "katolsk" matematik med otte sakramenter, gennem hvilken mødet med videnskaben kan finde sted. Heroverfor står så KOMMOD-rapportens "protestantiske" matematik, der betoner vigtigheden af det direkte møde mellem individet og det videnskabende (mangfoldigheden) og dennes to sakramenter, tælle og regne. Og vigtigheden af, at sproglig kompetence går forud for grammatisk kompetence. Også ved kvantitativ kompetence kommer talsprog før talsprogets grammatik, matematik. Og som ved talesproget forbliver grammatik en tavs kompetence for de fleste.

Skal matematik-krigen afsluttes med et KOM-kup, eller skal den bilægges gennem demokratisk forhandling med MOD-opfattelser? Valget er dit, og med KOMMOD-rapporten får du mulighed for at validere argumenterne, ikke oppe fra den politiske korrekthed, men nede fra matematikkens historiske rødder. Held og lykke.

Mængdebaseret meta-matik - eller mangfoldighedsbaseret mate-matik: Dannelsesmødet med videnskaben – eller med det videnskabende

<table>
<tr><th>1-2</th><th>3-4</th><th>5-6</th><th>6-7</th><th>8-9</th></tr>
<tr>
<td>MÆNGDER forenes:
addition

2 + 3 = 5
47 + 85 = 135
82 - 65 = 17

PROBLEM:
PLUS er falsk abstraktion:
2 m + 3 cm = 203 cm
2 uger + 3 dage = 17 dage
2 C + 3 D = 23 D
3 sten = sten + sten + sten</td>
<td>MÆNGDER gentages:
multiplikation

2 · 3 = 6
7 · 85 = 595
372/7 = 53 1/7
Byen: Stakke & omstakke
T = 653 + 289 = ?
653 = 6·C & 5·D & 3·1
279 = 2·C & 8·D & 9·1
T = 8·C & 13·D & 12·1
T = 8·C & (13+1)·D & (12-10)·1
T = (8+1)·C & (14-10)·D & 2·1
T = 9·C & 4·D & 2·1 = 942</td>
<td>MÆNGDER opdeles:
brøker

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=?$
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$

PROBLEM:
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(1+2)}{(2+3)}=\frac{3}{5}$ hvis
1 cola blandt to flasker plus
2 cola blandt tre flasker er
(1+2) cola blandt (2+3) fl.</td>
<td>løsnings-MÆNGDER:
åbne udsagn (ligninger)
2 + 3·x = 8
(2+3·x)-2=8-2
(3·x+2)-2 = 6
3·x+(2-2) = 6
3·x + 0 = 6

3·x = 6
(3·x)/3=6/3
(x·3)/3 = 2
x·(3/3) = 2
x·1 =2

L = {x∈ R | 2+3·x=8} = {2}

PROBLEM:
Vægtskåls-metaforen skjuler regneprocessen, og skaber mange fejlmuligheder:
2 + 3·x = 8, dvs. 5·x = 8</td>
<td>MÆNGDER forbindes:
funktioner
Funktion: et eksempel på en relation mellem to mængder, hvorom der gælder at ...
eks. f(x) = 2 + 3x
funktionens værdi og graf

PROBLEM:
Funktionsbegrebet opstod efter differentialregning! Syntaksfejl ved at sammenblande sprog og metasprog: Funktionens værdi svarer til udsagnsordets slips.</td>
</tr>
<tr>
<td>Landet: Bundte&ombundte
GANGE er sand abstraktion:
3 sten = 3 gange sten =3·sten
2·3·dage = 6·dage
2·m·3·cm=6·mcm = 600·cm^2
Bundtning og ombundtning:
Total = 6 1’ere = ? 2’ere
Svar: 6·1 = 6 = 6/2·2 = 3·2
Ombundtnings-regel: T = T/b·b
6/2: Optælling i 2’ere
6·2: Optælling af 2’ere
Totalen findes ved tælling eller regning: Ombundtning (division)
Gangning ombundter i tiere:
T = 8·3 = 24 = 2·D & 4·1
Gangning er division!
Max-højde 3:
T = 8 3’ere = overlæs!
T = 8·3 = 2·3^2 & 2·3
Ubundtede kan også bundtes i delbundter, f.eks. til 5’ere:
T = 8·3 = 24/5·5 = 4·5&4·1 = 4·5 & 4/5·5= (4 4/5)·5</td>
<td><u>Omstaknings-regel: T = T–b+b</u>
T = 654 - 278 = ?
653 = 6·C & 5·D & 4·1
278 = 2·C & 7·D & 8·1
T = 4·C & -2·D & -4·1
= (4-1)·C & (-2+10)·D & -4·1
= 3·C & (8-1)·D & (-4+10)·1
= 3·C & 7·D & 6·1 = 376

T = 7·653 = ?
T = 7·(6·C & 5·D & 3·1)
= 42·C & 35·D & 21·1
= 42·C & (35+2)·D & (21-20)·1
= (42+3)·C & (37-30)·D & 1·1
= 45·C & 7·D & 1·1 = 4571

T = 653/7 = ?
T = 6/7·C & 5/5·D & 3/7
= 65/7·D & 3/7
= (65-2)/7·D & (20+3)/7
= 9·D & 23/7
= 9·D & 3 2/7 = 93 2/7
(dobbelt bogholderi)</td>
<td>Byen: Vægtet gennemsnit
$T=\frac{1}{2}\cdot2+\frac{2}{3}\cdot3=3=\frac{3}{5}\cdot5$
eller
$T=\frac{1}{2}\cdot4+\frac{2}{3}\cdot3=4=\frac{4}{7}\cdot7$
dvs. mange forskellige svar til spørgsmålet $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=?$
men ALDRIG større end 1!
Handelsregning
5 kg koster 60 kr, 3 kg koster ? kr
ombundt kr
kr = kr/kg·kg
= 60/5·3
= 36
ombundt kg
3kg = 3/5·5kg
= 3/5·60kr
= 36 kr
Procentregning 1
• 8 har 2, 100 har ?
100 = 100/8·8 har 100/8·2 = 25
• 100 har 25, 8 har ?
8 = 8/100·100 har 8/100·25 = 2
• 100 har 25, ? har 2
2 = 2/25·25 haves af 2/25·100 = 8</td>
<td>Slot & Kloster: Ind- & afkodning
Kodning: 2+(3·5)=17->2+(3·x)=T
Afkodning (ligningsløsning):
Omstakning fra 8-stak til 2-stak:
2 + (3·x) = 8 = 8–2+2
3·x = 8-2 = 6
Ombundtning fra 1’er til 3’er:
3·x = 6 = 6/3·3
x = 6/3 = 2
Frem- og tilbageregning:
Overflyt med modsat regnetegn
<u>frem</u> <u>tilbage</u>
2 + 3·x = 8
+2 ↑↓ -2
3·x = 8 - 2 = 6
·3 ↑↓ /3
x = 6/3 = 2
Procentregning 2
• 25% af 8 er ?
0.25 · 8 = x
• 25% af ? er 2
0.25 · x = 2, så x = 2/0.25 = 8
• ?% af 8 er 2
x · 8 = 2, så x = 2/8 = 0.25 = 25%</td>
<td>Byen: Handel og skat
Per-tal: Skat, told, kurser, renter, fortjeneste, tab, værdipapirer.
Forening af per-tal: 3 kg á 4 $/kg + 5 kg á 6 $/kg giver 8 kg á ? $/kg
Geometri: Areal og rumfang af flade og rumlige former. Retvinklede trekanter: Pytagoras, sinus, cosinus og tangens.
Lineær funktion, lineær vækst eller PLUS-vækst:
T = b +a+a+a+... = b + a·n
En funktion er et navn for et regnestykke med et variabelt tal , f.eks. T = 2 + 3x. (Euler 1748)
Regnestykker giver faste tal, og funktioner giver variable tal.
Funktionens variation kan vises i tabeller og på kurver.
Kroen: Omfordeling gennem spil
Gevinst på tips, lotto, roulette mm
Statistik over gevinstgange
Risiko=Konsekvens·sandsynligh.</td>
</tr>
</table>

10	11	12
Mængdelære Funktionsteori: Definitions- og værdimængde. Algebraiske funktioner: Polynomier og polynombrøker. Første- og andengradspolynomier. Polynomiers division. Trigonometri. Analytisk geometri.	Funktionsteori: Omvendt og sammensat funktion. Ikke-algebraiske funktioner: Trigonometriske funktioner. Logaritme- & eksponentialfunktioner som homomorfier: f(x*y) = f(x)#f(y) Stokastiske funktioner. Differentialregning.	Vektorrum. Integralregning. Enkle differentialligninger.
Renæssancen: Konstante per-tal Tal som mange-bundter (polynomier): T = 2345 = 2·B^3 + 3·B^2 + 4·B + 5·1 Tilbage-regning ved potenser: B^4 = 81 4^n = 1024 B = 4√81 n = log1024/log4 Enkeltrente r, samlet rente R, rentes-rente RR (1+r)^n – 1= R = n·r + RR Vækst med konstant per-tal og procent-tal: x:+1 -> T:+a lineær vækst T = b + a·x x:+1 -> T:+r% eksponentiel vækst T = b·(1+r)^x x:+1% -> T:+r% potens vækst T = b · x^r x:+1 -> T:+r%+a opsparing T = a·R/r Vækst med uforudsigelig (stokastisk) variation ΔT = ? T = MID ± 2·SPR Forening af procent-tal: 300 á 4% og 500 á 6% er 800 á ?%. Vækstprocentregning: T = a·b: ΔT/T ≈ Δa/a + Δb/b T = a/b: ΔT/T ≈ Δa/a – Δb/b Trigonometri: SIN & COS: de korte sider i procent af den lange. TAN: den ene korte side i procent af den anden.	**Industrien: Variable per-tal** Koordinatgeometri: Regning på tegning. Kurvetilpasning med polynomier: T = A + B·x + C·x^2 + D·x^3 (eller f(x): A+Bx+C·x^2) A: niveau, B: stigning, C: krumning, D: modkrumning Vækst med variabel, forudsigelig tilvækst: Differentialregning: dT = dT/dx·dx = T'·dx Det ikke-lineære er lokalt lineær: (1+r)^n ≈1+ n·r (=1+n·r+RR: ved små renter kan rentes-renten negligeres) T = x^n: dT/T = n·dx/x, dT/dx = n·T/x = n·x^(n–1) Optimeringsopgaver fra teknik og økonomi. Integralregning: ΔT = T2–T1 = ∫dT = ∫f·dx, Samlet tilvækst = sluttal–starttal = summen af enkelt-tilvæksterne, *uanset antal enkelt-tilvækster!* Integration sker ved omskrivning til tilvækstform: Da 6x^2+8x = d/dx(2x^3+4x^2) = d/dx(T) så er ∫ (6x^2+8x)dx = ∫ d(2x^3+4x^2) = ∫ dT = ΔT = T2-T1 Kumuleringsopgaver fra teknik og økonomi.	**Hovedværker i den kvantitative litteratur:** Geometri, Handel, Økonomi, Fysik, Biologi. De tre genrer for kvantitativ litteratur: - Fakta eller da-så beregninger kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige: Da prisen er 4 kr/kg, så koster 6 kg 6·4 = 24 kr. - Fiktion eller hvis-så beregninger kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige: Hvis indkomsten er 4 mio$/år, så vil 6 års indkomst være 6·4 = 24 mio$. - Fidus eller hvad-så beregninger kvantificerer det ikke kvantificerbare: Hvis konsekvensen "brækket ben" K sættes til 2 mio$, og hvis sandsynligheden S sættes til 30%, så vil risikoen R være R = K·S = 2·0.3 = 0.6 mio$. De tre handlemuligheder: Fakta kontrolberegnes, fiktion scenarieberegnes, fidus henvises til kvalitativ behandling. Vækstligninger løst ved numerisk integration. Funktioner af to variable. Differentiation og integration. Optimering og kumulering. Vektorregning inden for handel og inden for bevægelse på flade og i rum.