PoMo

Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

I den klassiske matematik viste Euklid, at geometrien har en universel metafysisk kilde i form af aksiomer, ud fra hvilke hele geometrien flyder som eksempler og logiske følgeslutninger. Den moderne mængde-matematik troede at det samme gjaldt for algebraen, for tal og regning: Også algebraen har en metafysisk kilde, mængde & udsagn, ud fra hvilke hele algebraen flyder som eksempler og logiske følgeslutninger. Omkring 1960 indførte skolerne over det meste af verden den moderne mængde-matematik, matematik oppefra, top-down matematik, strukturmatematik, meta-matik. Det blev ingen succes, og den er da også på tilbagetog de fleste steder. I Danmark trives den dog stadig, åbenlyst i gymnasiet, og skjult i folkeskolen. Og den forbereder nu et come-back forklædt som kompetence-matematik. Vi vil først se på den moderne mængde-matematik, dernæst på tre af dens mulige efterfølgere, dels konstruktivisme-matematik, dels kompetence-matematik og dels post-moderne mangfoldigheds-matematik, buttom-up matematik nedefra.

A01 Baggrund

Præster og filosoffer. Når ting skal bestemmes er det naturligt at spørge: Hvem bestemmer? Gør vi selv, eller er det nogen over os (meta på græsk)? Hvis det er os selv, hvem har så magten (kratos på græsk)? Er det demokratiet (folkestyret), eller autokratiet (enevælden)? Kort sagt, hvad er vore love – er de fysiske, som kan ændres gennem afstemning, eller er de metafysiske, som vi ikke kan stemme om, men kun kan lære at kende enten gennem opdagelse, eller gennem belæring af de bedre-vidende præster eller filosoffer (filo-sofia betyder venner af viden på græsk).

Både præster og filosoffer er enige om der findes metafysiske love, men de er uenige om, hvorvidt vejen til disse love går gennem tro eller viden. Præsten mener at lovene er udtryk for en metafysisk guds vilje, som kun kan påvirkes ved at tro, gå i kirke og bede, for gudens vilje er uforudsigelig. Filosoffen mener at lovene kommer fra en metafysisk struktur, som kun kan udforskes ved at vide, gå i skole og ræsonnere, for strukturens virkning er forudsigelig og beregnelig.

Også adfærdsmæssigt minder præster og filosoffer meget om hinanden. De afsondrer sig fra verden på lukkede gange, hvor de bruger et sprog fyldt med fremmedord, og hvorfra de somme tider kommer ud for at drukne folk i ordlaviner ved at holde en prædiken eller en forelæsning.

De første metafysiske nedslag. De første filosoffer, som finder forudsigbare naturlove er Pythagoræere, som konstaterer, at toner og former styres af metafysiske forudsigbare love.

Sættes en streng i svingning fremkommer en tone. Ændres strengens længde, ændres tonehøjden. To samtidigt svingende strenge frembringer således to forskellige toner, som lyder disharmonisk, med mindre der er et konstant talforhold mellem deres længder. Denne viden om de konstante talforhold kan så anvendes til gennem beregning at forudsige, om vi kan regne med at to tilfældige strenge ville lyde harmonisk eller ikke.

Også former er styret af metafysiske forudsigbare love. Vi kan stemme om den første vinkel i en trekant, og om den anden, men ikke om den tredje. Denne vil derimod kunne forudsiges ved at benytte en metafysisk lov der siger, at summen af vinklerne er 180 grader. Tilsvarende for siderne i en retvinklet trekant: Vi kan stemme om den første og den anden side, men ikke om den sidste. Den er nemlig lovbestemt af Pythagoras' læresætning a^2 + b^2 = c^2.

Endelig har også tallene former, som er styret af metafysiske forudsigbare love. Tal findes i verden som et antal af noget, f.eks. 2 3ere, dvs. som aflange stakke, som eventuelt kan omformes til kvadrater, trekanter eller andet. Den pythagoræiske læresætning er f.eks. en lov for, hvordan kvadrattal kan lægges sammen.

Pythagoræerne opdagede således 3 metafysiske nedslag, alle i form af tal-love. De blev så forført af deres egen succes, at de sluttede sig til (generaliserede, inducerede), at alt fysisk er eksempler på og følgeslutninger (deduktioner) af metafysiske tal-love: "Alt er tal".

Akademiet, klostre og universiteter. De græske demokrater, sofisterne, var skeptiske overfor Pythagoræernes generalisation. De mente tværtimod at det var vigtigt at skelne mellem hvad der kan stemmes om og hvad der ikke kan, mellem vedtægt og natur, mellem politisk og naturlig korrekthed, mellem nomos og logos. Antidemokraten Platon generaliserede derimod pythagoræernes trossætning endnu videre: Alt fysisk er eksempler på metafysiske former, strukturer, som kun de bedre-vidende filo-soffer på Platons akademi kan få adgang til gennem forskning. "Lad ingen træde herind som ikke kender geometrien" skulle der have stået over Platons akademi. Geometrien stod for den rene viden, og en matematiker blev da også kaldt en "geometer" indtil omkring 1800. Ordet matematik blev derimod ringeagtet i romerriget, da det her betød kosmologi, altså stjernbaseret spådomskunst.

Med kristendommen kom præsterne tilbage, og år 529 blev Platons akademi lukket. Filosofferne blev dog ikke arbejdsløse, for samtidigt oprettedes klostrene med samme opgave som akademiet, at studere de metafysiske love, igen på lukkede gange i celler hvor de hellige skrifter skrives af med rigelig brug af fremmedord. Her kunne filosofferne så arbejde på at platonisme og kristendom kunne smelte sammen, hvilket skete i kirkefaderens Augustins skrifter.

Der opstod med tiden forskellige klosterordner. Nogle af disse ændrede efterhånden deres klostre til universiteter, hvoraf de nordeuropæiske med tiden begyndte at forholde sig skeptisk til romerkirken ved at tage nominalisternes side i den såkaldte universaliestrid, hvor realisterne hævdede at ord navngiver de metafysiske former, universalierne, medens nominalisterne hævdede, at mennesket selv skaber sine ord. Nominalismen førte til reformationen og til kirkekamp mellem den katolske og de protestantiske kirker, samt til 30 års borgerkrig i Tyskland.

Det sidste metafysiske nedslag. Efter reformationen kunne de nordeuropæiske universiteter løsrive sig fra præstestyret og organisere sig som filosoffer. Det var som naturfilosof at englænderen Newton påviste det sidste metafysiske nedslag: Ikke kun toner og former, men også bevægelse er styret af metafysiske love. Vi kan stemme om hvordan stenen skal kastes væk, men når den først er kastet tager faldloven over, og faldloven kan der ikke stemmes om. Faldloven siger, at stenens fald skyldes en vilje, ikke en uberegnelig metafysisk vilje, men en beregnelig fysisk vilje som bor i joden, en kraft, tyngdekraften, som kan sættes på tal og beregning, og som giver en acceleration, der ændrer hastigheden. En fysisk vilje som er underkastet en metafysisk tal-lov, faldloven.

Newtons opdagelse giver stødet til den moderne tid, hvor viden efterhånden har fortrængt troen. Men kun delvist, for det moderne universitet gør det samme som Platon gjorde ved pythagoræerne. Det tror på at Newtons bevægelseslove kan generaliseres til at omfatte ikke kun fysiske ting, men også mennesker: Ligesom ting styres af fysiske adfærdslove, så styres også mennesker af sociale adfærdslove, som dog ikke er forudsigbare, da den sociale verden er meget mere kompleks end den fysiske.

Denne strukturalisme hersker indtil den moderne sofisme, dvs. post-strukturalisme og post-modernisme, efter antiautoritetsoprøret omkring 1970 begynder at udtrykke skepsis over for vores evne til at afspejle verden i ord. Den moderne videnskab anklages for ”logo-centrisme”, altså for at tro på at vore ord repræsenterer strukturer i verden – tværtimod mener skeptikerne at vore talemåder ikke afspejler men konstruerer og installerer strukturer i verden. Det er således middelalderens universaliestrid der nu gentages mellem strukturalister og post-strukturalister.

Et indlæg i denne strid er blyantsdilemmaet: Anbragt mellem en lineal og en ordbog kan en blyant vise sin længde men ikke sin betegnelse, så ting kan ital-sætte, men ikke itale-sætte sig selv. Tal er ikoner som kommer fra sætningens grundled, så tal kan der ikke stemmes om. Ord, derimod, er lyde som kommer fra sætningens læsere, så ord kan der altid stemmes om.

Har tal også en metafysisk kilde? Tallene selv kan således ikke anfægtes, og på et tidspunkt opstår formodningen om, at ikke kun toner, trekanter og bevægelse styres af metafysiske tal-love, men at også tallene selv har en metafysisk kilde.

I slutningen af 1800-tallet mente man at have fundet tallenes metafysiske kilde, mængden, hvoraf ikke kun algebraen, men også geometrien, dvs. al matematik kan fremstilles som eksempler. Opmuntret af denne succes opstod den næste formodning, at matematik og logik kan forenes i ét fag, den moderne mængdematematik, hvis metafysiske ”grundlag” da bliver mængder og udsagn

Denne drøm lider imidlertid skibsbrud i begyndelsen af 1900-tallet.

Først påviser Russell, at mængdebegrebet ved at tale om mængder af mængder indeholder selvreference, og dermed syntaksfejl. Russells argument kan beskrives ved forskellige paradokser:

Løgner-paradokset ”Denne sætning er usand”: Antag at sætningen er sand, så passer det hvad den siger, altså er den usand, dvs. en modstrid. Antag at sætningen er usand, så passer det ikke hvad den siger, altså er den ikke usand, men sand, dvs. igen en modstrid.

Barber-paradokset ”Byens barber hævder, at han barberer dem som ikke barberer sig selv. Barberer barberen sig selv?” Antag at barberen barberer sig selv, så barberer han ikke sig selv, dvs. en modstrid. Antag at barberen ikke barberer sig selv, så barberer han sig selv, dvs. igen en modstrid.

Mængde-paradokset ”Er mængden af mængder, som ikke er medlem af sig selv medlem af sig selv?” Antag at mængden er medlem af sig selv, så har den egenskaben ”er ikke medlem af sig selv”, dvs. en modstrid. Antag at mængden ikke er medlem af sig selv, så har den egenskaben ”er ikke medlem af sig selv” og er dermed medlem af sig selv, dvs. igen en modstrid.

Tekop-paradokset ”Mængden af tekopper er ikke en tekop”.

Sakse-paradokset ”Saksen kan klippe i alt på nær sig selv”

Mad-paradokset ”Vi bliver mæt af mad, men ikke af madopskrifter”.

Russell påpeger altså at der opstår meningsløse syntaksfejl når sætninger referer til sig selv, eller sammenblander abstraktionsniveauer. For at undgå syntaksfejl må en sætning kun referere til typer på det underliggende abstraktionsniveau. Dette princip kaldte Russell for typeteorien. Matematik oppefra afviser dog typeteorien, da denne ville medføre at f.eks. brøker ikke er tal. Mangfoldigheds-matematik anser derimod ikke brøker for at være tal, men regnestykker og har derfor ingen problemer med Russells typeteori.

Zermel-Fraenkel forsøgte at løse selvreference-problemet ved at lovliggøre selvreference og indføre en mængdelære, som ikke skelner mellem abstraktioner og eksempler, mellem mængder og elementer. Men herved ophæves netop det, som er matematikkens styrke, dens abstrakte karakter. Og ved at sammenblande abstraktionsniveauer indføres meningsløse syntaksfejl af typen ”Peter giftede sig med Randers”, ”Send madopskrifter til hungerområderne”, osv. Så operationen lykkedes, men desværre døde patienten.

Dernæst viser Gödel, at logik ikke kan være en del af matematikken, for så skal matematikken jo bevise sig selv, og fanges derfor igen i selvreference, løgnerparadoks og syntaksfejl.

A02 Udsagn og mængder

Den moderne mængde-matematik tror som sagt på at det en muligt at forene matematik og logik i et fag, hvor alt kan fremstilles som eksempler på mængder og udsagn.

2.1 Udsagn

Et udsagn er en ytring A, som med sikkerhed kan siges at være enten er sand eller falsk.

En ytring A kan benægtes, negeres: ikke A, -A.

To ytringer A og B kan forenes til én ytring ved konjunktion: A og B, A˄B

To ytringer A og B kan forenes til én ytring ved disjunktion: A eller B, A˅B

To ytringer A og B kan forenes til én ytring ved implikation: A medfører B, A⇒B

To ytringer A og B kan forenes til én ytring bi-implikation: A hvis og kun hvis B, A⇔B

Disse foreningsmåder er defineret ved deres sandhedstabeller:

			negation	*konjunktion*	*disjunktion*	*implikation*	*bi-implikation*
A	**B**		**-A**	**A˄B**	**A˅B**	**A⇒B**	**A⇔B**
Sand	Sand		Falsk	Sand	Sand	Sand	Sand
Falsk	Sand		Sand	Falsk	Sand	Sand	Falsk
Sand	Falsk		Falsk	Falsk	Sand	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk		Sand	Falsk	Falsk	Sand	Sand

2.2 Mængde

En mængde er en samling af veldefinerede ting, dvs. en abstraktion baseret på velafgrænsede eksempler, som kaldes mængdens elementer.

En mængde bygger altså på en definition, et åbent udsagn p(x), eksempelvis vil mængden af lige tal have det definerende udsagn p(x) = ”x er deleligt med 2”. En mængde M består altså af de elementer x som gør udsagnet p(x) sandt, M = {x | p(x)}. Omvendt vil der til ethvert åbent udsagn høre en mængde M, løsningsmængden, bestående af de elementer x som gør udsagnet sandt. Mænger og udsagn er derfor to sider af samme sag.

I praksis afspejler mængdebegrebet en abstraktion, dvs. en navngivning af de fælles egenskaber ved en række elementer, som udtrykkes i definitions-udsagnet p(x). Eksempelvis har tallene 2, 4, 6, osv. den fælles egenskab at de er delelige med 2. Den fælles egenskab ”delelig med 2” gives så navnet ”lige”, og de betragtede tal kaldes så lige tal. Mængdeordet M bliver altså sprogligt til et tillægsord, et prædikat til navneordet x, deraf betegnelsen p(x).

At sammenblande elementer og mængder som Zermel-Fraenkel gør svarer således til at sammenblande navneord og tillægsord. Men også til at sammenblande mængder og udsagn, da ethvert tillægsord kan omformuleres til en sætning: Et lige tal -> tallet er lige. Vi ophæver så forskellen mellem den ting, som beskrives og beskrivelsen. Når beskrivelse bliver en ting forsvinder forskellen mellem verden og sproget, sproget bliver verden, og verden bliver sproget, eller sagt på en anden måde, sproget reduceres til et billedsprog, til ikoner. Herved kan selvreferencen ikke være mere tydelig.

Sætningen ”a er element i mængden A” skrives som ”$a \in A$”.

Sætningen ”N er en delmængde af mængden A” skrives som ” $N \subseteq A$”.

En mængde kan skrives på listeform:

Mængden af naturlige tal N = {0, 1, 2, 3, …}

Mængden af hele tal Z = {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …}

En mængde kan også angives på egenskabsform, og er så en delmængde af en anden mængde.

Mængden af lige tal Nl = {$x \in N$ | x er delelig med 2} = { 2, 4, 6, 8, …}, $Nl \subseteq N$

En mængde kan indeholde 1 element eller være tom Ø:

M1 = {$x \in Z$ | x>1 og x<3} = {2}

M2= {$x \in Z$ | x>1 og x<2} = Ø

En mængde A kan øges gennem mængdeforening: A ∪ B = {x | $x \in A$ eller $x \in B$ }

En mængde A kan øges gennem mængdeproduktet af ordnede par: A X B = {(a,b) | $a \in A$ og $b \in B$ }

En mængde A kan reduceres gennem fællesmængde: A ∩ B = {x | $x \in A$ og $x \in B$ }

En mængde A kan reduceres gennem mængdedifferens: A \ B = {x | $x \in A$ og ikke($x \in B$) }

En mængde A kan have en komplementærmængde: CA = {x | ikke($x \in A$) }.

2.3 Anvendelse af mængder

For den moderne mængde-matematik er det vigtigt, at tal og regningsarter kan fremstilles som eksempler på mængder.

Regningsarter. En regningsart opfattes som et eksempel på en mængde: En regningsart er et eksempel på en komposition, som er et eksempel på en funktion, som er et eksempel på en relation, som er et eksempel på en mængdeprodukt, som er et eksempel på en mængde.

En relation R mellem to mængder A og B er en delmængde af et mængdeproduktet AXB.

Ordningsrelationen ’mindre end’ er en relation i N: R = {(a,b) $\in$NXN | a<b }

Ækvivalensrelationen ’lig med’ er en relation i N: R = {(a,b) $\in$NXN | a=b }

En funktion, afbildning, f mellem to mængder A og B er en relation, som er entydig, dvs. hvor førstekomponents-identitet medfører andenkomponents-identitet:

f = {(a,b) $\in$AXB | a1 = a2 $\Rightarrow$ b1 = b2 }.

At f er en funktion fra A til B skrives som f: A -> B, eller som f: x -> f(x)

En regningsart kan nu defineres som en komposition , dvs. en funktion $ fra NxN -> N:

$: (a,b) -> $(a,b) = a$b, hvor a$b kaldes et regnestykke.

Addition +: NXN -> N, hvor (x,y) -> +(x,y) = x+y = x+1+1+1 y gange
Multiplikation *: NXN -> N, hvor (x,y) -> *(x,y) = x*y = x+x+x+x y gange
Potensopløftning ^: NXN -> N, hvor (x,y) -> ^(x,y) = x^y = x*x*x*x y gange

En organiseret mængde (m,$) er en mængde M forsynet med en komposition $.

En komposition \$ kan være

Associativ: $a\$(b\$c) = (a\$b)\$c$, dvs. parenteser kan hæves og sættes som vi vil (sammentælling kan begyndes et vilkårligt sted)

Kommutativ: $a\$b = b\$a$, dvs. rækkefølgen er ligegyldig (sammentællingsrækkefølgen er ligegyldig)

Distributiv over en anden komposition #: $a\$(b\#c) = (a\$b)\#(a\$c)$, dvs. \$ kan "ganges" ind i en #-parentes. (sammenstakning fører til sammentælling: 3 7ere + 2 7ere = (3 + 2) 7ere = 5 7ere)

Plus er associativ og kommutativ: $2+(3+4) = (2+3)+4$ og $3+5 = 5+3$
Gange er associativ og kommutativ: $2*(3*4) = (2*3)*4$ og $3*5 = 5*3$
Minus er hverken associativ eller kommutativ: $2-(3-4) \neq (2-3)-4$ og $3-5 \neq 5-3$
Division er hverken associativ eller kommutativ: $2/(3/4) \neq (2/3)/4$ og $3/5 \neq 5/3$
Potensopløftning er kun associativ: 2^(3^4) = (2^3)^4 og 3^5 $\neq$ 5^3
Gange er distributiv mht. plus, men ikke omvendt: $2*(3+4) = (2*3) + (2*4)$ og $2+(3*4) \neq (2+3)*(2+4)$
Potensopløftning er distributiv mht. gange, men ikke omvendt: 2^(3*4)=2^3 * 2^4 og 2*(3^4)$\neq$(2*3)^(2*4)

En komposition \$ har et neutralt element e hvis e ingen indflydelse har:

$e\$a = a\$e = a$ for alle a ($\exists e \in A$: $\forall a \in A$: $e\$a = a\$e = a$)

I en komposition \$ har elementet a et inverst element $\underline{a}$ hvis $\underline{a}$ kan neutralisere a: $\underline{a}\$a=a\$\underline{a}=e$.

Plus har det neutrale element 0: $a+0 = 0+a = a$.

I plus er det inverse element til a minus a: $\underline{a} = -a$: $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Gange har det neutrale element 1, $a*1 = 1*a = a$.

I gange er det inverse element til a reciprok a: $\underline{a} = 1/a$ ($a \neq 0$): $a*(1/a) = (1/a)*a = 1$.

Tal. Ligesom regningsarterne opfattes også tallene som eksempler på mængder.

Mængden af naturlige tal N kan skabes af Peanos induktions-aksiom:

Hvis $1 \in A$, og hvis alle tals efterfølger er $\in A$, så er $A = N$

Eller formuleres ved hjælp af eksistenskvantoren $\exists$ og alkvantoren $\forall$:

$((\exists 1 \in A)$ og $(\forall a \in A\text{: } a \in A \Rightarrow a+1 \in A)) \Rightarrow A \subseteq N$ og $N \subseteq A \Leftrightarrow A = N$

De naturlige tal kan så organiseres med regningsarterne + og *.

Ved hjælp af den associative lov kan vi så bevise alle plusstykker, som f.eks. 5+3 = ?

$5 + 3 = 5 + (2 + 1) = 5 + ((1 + 1) + 1) = (5 + (1 + 1)) +1 = ((5 + 1) + 1) + 1 = ((6 + 1) + 1 = 7+1 = 8$

(Mangfoldigheds-matematik siger i stedet: 5 og 3 er ikoner for hhv. 5 og 3 streger, som kan omarrangeres til 8 streger.)

Men så løber den moderne mængde-matematik ind i et problem: Hvordan skal vi forstå regnestykker som 2+3 og 5+7? Problemet løses ved at sørge for at regnestykker kan opfattes som tal.

Teknisk klares dette problem ved at oprette ækvivalensrelationen r = "giver samme resultat" i mængden $\underline{N}X\underline{N}$ (hvor $\underline{N} = N \cup \{0\}$) defineret ved at $(a,b)r(c,d) \Leftrightarrow a+b = c+d$, hvorved $(6,1)r(5,2)$ da $6+1 = 5+2 = 7$. Herefter defineres en ækvivalensklasse $r(\underline{N}X\underline{N})a$ som mængden af alle ækvivalente regnestykker som udregnet giver a, dvs. $r(\underline{N}X\underline{N})a = \{(b,c) \in \underline{N}X\underline{N} \mid (b,c)R(a,0)\}$, hvorved (6,1) og (5,2) og (7,0) kommer i samme ækvivalensklasse, da $6+1 = 5+2 = 7+0 = 7$. Nu kan de naturlige tal $\underline{N}$ så defineres som ækvivalensklasserne $r(NX\underline{N})$, hvorved tallet 7 nu bliver mængden af alle de plus-stykker, som udregnet giver 7: $7 = \{7+0, 6+1, 5+2, 4+3, \ldots\}$

Så er den moderne mængde-matematik tilfreds, for et regnestykke bliver nu et eksempel på begrebet "repræsentant for en ækvivalensklasse", eller med andre ord, et talnavn for det tal, der regnes ud: Tallet 7 har således mange talnavne: $7 = 6+1 = 5+2 = 4+3$ = osv.

Men Russell ryster på hovedet og siger syntaksfejl, for ved at definere tal som en mængde af regnestykker som indeholder tal opstår der en cirkeldefinition og dermed selvreference.

De hele tal Z er foreningsmængden af de naturlige tal $\underline{N}$ og disses plus-inverse $\cancel{N}$:

Mængden af hele tal $Z = \underline{N} \cup \cancel{N} = \{0,1,2,3,\ldots\} \cup \{0,-1,-2,-3,\ldots\} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$

Mængde-matematikken kan nu bevise, at -*- = +: Det plus-inverse tal til –1 er –(-1). Dvs. (-1) + (-(-1)) = 0. Men da også (-1) + 1 = 0 må (-(-1)) = 1. Dvs. -*- = +

Mangfoldigheds-matematikken bruger stakregning: 9*9 = (10-1)*(10-1) = 10*10 – 10*1 – 10*1 + 1*1 = 100 – 10 – 10 + 1 = 81 Dvs. -*- = +.

De rationale tal Q (brøktallene) er produktmængden af de naturlige tal $\underline{N}$ og disses gange-inverse Ñ, idet tallet 0 udelades da det ikke har en gangeinvers 1/0:

Mængden af rationale tal $Q = \underline{N} \times \tilde{N} = \{(a,\underline{b}) \mid a \in \underline{N} \text{ og } b \in \tilde{N}\}$, hvor $(a,b) = a*\underline{b} = a*(1/b) = a/b$.

Her opstår så det næste problem, for med denne definition er (2,4) og (3,6) forskellige tal selvom de jo gerne skulle repræsentere den same brøk: 2/4 = 3/6 = ½. Dette klares igen ved at oprette ækvivalensrelationen r = ”giver samme resultat” i mængden $\underline{Q}$ defineret ved at $(a,b)r(c,d) \Leftrightarrow a*d = b*c$, hvorved (2/4)r(3/6) da 2*6=3*4=12. Herefter defineres ækvivalensklasserne rQ(a,b) som mængden af alle forlængninger og forkortninger af brøken a/b, hvorved (2,4) og (3,6) og (1,2) kommer i samme ækvivalensklasse, da 2/4 = 3/6 = ½. Nu kan de rationale tal Q så defineres som ækvivalensklasserne rQ, hvorved f.eks. brøktallet ½ nu bliver mængden af sig selv og sine forlængninger: ½ = {½, 2/4, 3/6, 4/8, …}

Så er den moderne mængde-matematik igen tilfreds. Men Russell ryster igen på hovedet og siger syntaksfejl: Dette brøkbegreb overtræder typeteorien, idet brøker nu er defineret som en mængde af tal, og dermed ligger på et højere abstraktionsniveau end tal og derfor ikke selv kan være et tal.

Derfor forkaster den moderne mængde-matematik Russells typeteori og accepterer i stedet at havne i selvreferencens syntaksfejl. Omvendt forkaster typeteorien den moderne mængde-matematik, hvor denne hævder at brøker er tal. I stedet er brøker regnestykker, hvilket er en anden type end tal.

Dette er netop hvad mangfoldigheds-matematikken siger: Et tal er en mange-stak, dvs. et polynomium af 10-potenser. Så der findes kun decimaltal. Rationale ”tal” som ¾ og irrationale ”tal” som √2 ikke er tal, men regnestykker, som kan udregnes med vilkårlig god nøjagtighed:

$\sqrt{2} = 1.4$ eller $\sqrt{2} = 1.41$ eller $\sqrt{2} = 1.414$ eller $\sqrt{2} = 1.4142$ osv. , og

$1/3 = 0.3$ eller $1/3 = 0.33$ eller $1/3 = 0.333$, osv.

Den moderne mængde-matematik opfatter derimod √2 som et irrationalt tal , altså som et tal der ikke kan skrives som et rationalt tal

Sætning:	√2 kan ikke skrives som et rationalt tal.
Bevis:	Antag at √2 = p/q , hvor p/q er uforkortelig. Da vil 2 =p^2/q^2 eller 2*q^2 = p^2. 2 går op på venstre side, derfor også op på højre side. Produkt af to ulige tal er ulige, derfor er p lige, så p = 2*r. Dvs. 2*q^2 = (2*r)^2 eller 2*q^2 = 4*r^2, eller q^2 = 2*r^2. Nu gentages argumentet som nu viser at også q er lige og at q = 2*t. Dvs. p/q = (2*r)/(2*s) = r/s. Dette er i modstrid med antagelsen om at p/q er uforkortelig.

Da √2 har geometrisk eksistens som diagonalen i et enhedskvadrat, ønsker den moderne mængde-matematik at have så mange tal til rådighed at der skal gælde, at det til hvert punkt på en tallinie svarer et tal og omvendt. Dette opnås ved at betragte en mængde af konvergerende tal som et tal. Eksempelvis konvergerer talfølgen {1/n}mod nul. Dvs. talmængden {1/1, ½, 1/3, …} betragtes nu som et tal, nemlig tallet nul. Men også andre talfølger konvergerer mod 0: {1/n^2}, {n/(n^2+1)} osv. Dvs. vi får mange nuller med mindre vi igen laver en ækvivalensklasse.

0 = {{1/n}, {1/n^2}, {n/(n^2+1)}, …}

De reelle tal R kan nu defineres som ækvivalensklasser i mængden af konvergente talfølger.

Der findes dog også ikke-konvergente talfølger som f.eks. {(-1)^n}: {-1, 1, -1, 1, -1, …}.

Igen er den moderne mængde-matematik glad. Og igen ryster Russell på hovedet og siger dobbelt syntaks-fejl: Et naturligt tal som 7 fremstilles som en mængde af regnestykker. Et rationalt tal som ½ fremstilles som en mængde af mængder. Et irrationalt tal som √2 fremstilles som en mængde af mængder af mængder.

Det generer dog ikke den moderne mængde-matematik, der går videre og definerer komplekse tal og kvaternioner.

Komplekse tal C defineres som et mængdeprodukt i R: C = {(a,b)∈RXR}. I stedet for (a,b) skrives a+i*b, hvor a kaldes det komplekse tals reelle del, og b tallets imaginære del, og hvor tallet i er et imaginært tal som har egenskaben i^2 = -1. Med komplekse tal til rådighed har en n'te-gradsligning altid n løsninger, x^2+1 = 0 har f.eks. løsningerne x = ±i. Endvidere kan vi opstille hvad nogle kalder matematikkens smukkeste formel, Euler-formlen: e^iπ +1 = 0.

Kvaternioner er en generalisering af de komplekse tal. Kvaternioner er tal som kan skrives på formen x = a + b*i + c*j + d*k, hvor a, b, c og d er reelle tal, og hvor i^2 = j^2 = k^2 = i*j*k = -1.

Komplekse tal anvendes inden for ellæren, hvor vi opnår det praktiske at kunne arbejde med to beregninger samtidigt, den ene foregår i den reelle del og den anden i den imaginære del.

Kvaternioner har kun teoretisk interesse.

A03 De abstrakte talmængder

Udover disse "konkrete" talmængder N, Z, Q, R og C definerer den moderne mængde-matematik også en række mere generelle abstrakte talmængder, som de "konkrete" talmængder så er eksempler på. De abstrakte talmængder er som vist i afsnit 4 opstået ud fra det generelle spørgsmål: "Hvilke egenskaber skal en organiseret talmængde have for at vi kan løse en ligning?"

Gruppe. En organiseret mængde (M,$) kaldes en gruppe hvis

G1) $ er associativ.
G2) $ har et neutralt element.
G3) Alle elementer har et inverst element.

De hele tal (Z,+) og (Z\{0},*) er eksempler på kommutative grupper.

De naturlige tal (N,+) og (N,*) er eksempler på semigrupper, dvs. grupper hvor kun G1 gælder.

Legeme. En dobbeltorganiseret mængde (M,#,$) kaldes et legeme hvis

L1) (M,#) er en kommutativ gruppe.
L2) (M\{e},$) er en gruppe.
L3) $ er distributiv over #.

De rationale tal (Q,+,*) og de reelle tal (R,+,*) er et begge eksempler på legemer.

Ring. (M,#,$) kaldes et ring hvis (M,#,$) er et legeme uden inverse elementer for $. Mængden af polynomier (P,+,*) er en ring.

Også geometrien har grupper:

Flytningsgruppe. Flytningsgruppen består af de tre flytningsformer parallelforskydning, drejning og spejling. Mønstre er således et eksempel på en gruppe.

Projektionsgruppen. Projektionsgrupperne består af central projektion (perspektivtegning) og parallelprojektion (isometrisk tegning).

Endelig kan geometrien selv opfattes som et eksempel på et vektorrum, den abstrakte algebras dronning som fremkaldte den moderne mængde-matematiks ringeagt for klassisk geometri ved at sige: "Euclid must go"

Vektorrum er en dobbeltorganiseret mængde (V, +,*, (M,#,$)) baseret på et legeme (M,#,$), hvor

V1) x*(u+v) = (x*u) + (x*v) for alle x ∈M og alle u,v ∈V
V2) (x#y)*u = (x*u) # (y*u) for alle x,y ∈M og alle u ∈V
V3) (x$y)*u = x$(y*u) for alle x,y ∈M og alle u ∈V
V4) e*u = u for alle u ∈V, hvor e er det neutrale element i (M,$).

A04 Løsning af ligninger: Neutralisering eller tilbageregning
Vi vil nu se på, hvordan spørgsmålet om betingelserne for ligningsløsning har skabt de abstrakte talmængder. For den moderne mængde-matematik er en ligning som "2+3*x = 14" et eksempel på et åbent udsagn. Ligningen løses ved at finde udsagnets sandhedsmængde, dvs. løsningsmængden L bestående af alle de x som gør det åbne udsagn til et sandt udsagn.

En gruppe er defineret med præcis de egenskaber der skal til for at løse en almindelig ligning ved at benytte den såkaldte neutraliseringsmetode "gør det samme på begge sider af lighedstegnet".

Sætning: I en gruppe kan enhver ligning løses: x $ b = c ⇔ x = c$b̲

Bevis: Antag at	x$b	= c	
Dvs.	(x$b)$b̲	= c$b̲	thi b har et inverst element b̲ ifølge G3
Dvs.	x$(b$b̲)	= c$b̲	thi $ er associativ ifølge G1.
Dvs.	x$e	= c$b̲	ifølge definitionen på et inverst element.
Dvs.	x	= c$b̲	ifølge definitionen på et neutralt element, som $ har ifølge G2

Et kommutativt legeme er defineret med præcis de egenskaber der skal til for at løse en almindelig ligning hvori der forekommer to regningsarter ved at benytte den såkaldte neutraliseringsmetode "gør det samme på begge sider af lighedstegnet". Løsningen foregår ved at omforme det åbne udsagn til ensbetydende udsagn, som vises ved bi-implikationens dobbeltpile. Omformningen sker ved at anvende den moderne abstrakte algebra til at neutralisere ligningens tal ét for ét.

	x ∈ R		Udsagnets grundmængde
	2+3*x	= 14	Det åbne udsagn
⇔	(2+(3*x))-2	= 14-2	–2 er inverst element til +2
⇔	((3*x)+2)-2	= 12	+ er kommutativ
⇔	(3*x)+(2-2)	= 12	+ er associativ
⇔	(3*x)+0	= 12	0 er neutralt element for +
⇔	3*x	= 12	definition af neutralt element
⇔	(3*x)*1/3	= 12*1/3	1/3 er inverst element til *3
⇔	(x*3)*1/3	= 4	* er kommutativ
⇔	x*(3*1/3)	= 4	* er associativ
⇔	x*1	= 4	1 er neutralt element for *
⇔	x	= 4	definition af neutralt element

L = {x∈R | 2+3*x = 14} = {4} **udsagnets løsningsmængde**

For mangfoldigheds-matematik er en ligning som "2+3*x = 14" en abstraheret regnefortælling, der fortæller både om et regnestykke, en fremadregnings-proces (2+3*x), og om et resultat, et beregnings-produkt (14). Herved bliver løsning af ligninger blot et andet ord for tilbageregning, hvor pilene nu betyder hhv. frem- og tilbageregning:

Vandret tilbageregning	*Lodret tilbageregning*
x →(*3) 3*x →(+2) 2+3*x 12/3 = 4 ←(/3) 14-2 =12 ←(-2) 14	2+3*x = 14 *+2* ↑↓ *- 2* 3*x = 14 – 2 = 12 **3* ↑↓ */3* x = 12/3 = 4

A05 Den moderne mængde-matematik i skolen
Til trods for at den moderne mængde-matematik led skibbrud i begyndelsen af 1900-tallet, blev den alligevel presset ind i skolerne omkring 1960 som følge af det såkaldte sputnikchok.

Under den kolde krig kom det som et chok som for amerikanerne at russerne først fik en sputnik i rummet. Hvorfor var USA blevet overhalet af Sovjetunionen? vi fandt den skyldige i skolerne og især i det vigtigste fag, forudsigelses-faget regning. Regning var længe blevet beskyldt for at bygge på udenadslære. Nu skulle det bygge på forståelse. Og forståelse blev tolket som platonisk forståelse: At forstå noget vil sige at se noget som eksempel af noget universelt. Altså måtte regning fremstilles som anvendt matematik, som til gengæld skulle udledes af mængder og udsagn.

Den moderne mængde-matematik vandt fodfæste nogle steder, f.eks. i det danske gymnasium. Men de fleste steder blev den hurtigt opgivet igen bl.a. fordi ingeniør-matematikken forsvandt. I USA gik vi således ”back to basics”, bl.a. efter kritik af en matematiker Morris Kline, som skrev bogen: ”Hvorfor kan Jørgen ikke regne? Den nye matematiks fallit”, hvorfra følgende er hentet:

En far spurgte sit 8-årige barn: ”Hvad er 5+3?” Han fik svaret, at 5+3 = 3+5 i følge den kommutative lov. Forvirret formulerede han spørgsmålet om: ”Men hvor mange æbler er 5 æbler og 3 æbler?” Barnet forstod ikke ganske, at ”og” betyder ”plus”, og derfor spurgte han: ”Mener du 5 æbler plus 3 æbler?” Faderen skynder sig at sige ja og venter forventningsfuldt. ”Ja”, siger barnet, ”det betyder såmænd ingenting, om du taler om æbler, pærer eller bøger; 5+3 = 3+5 i alle tilfælde.”

I Danmark blev den moderne mængde-matematik kun delvist fjernet i folkeskolen, og den findes stadig i dag lige under overfladen. Derimod er brøkregning blevet så nedtonet i folkeskolen, at den moderne mængde-matematik nu forsøger at få et come-back i folkeskolen i form af kompetence-matematikken.

I indskolingen arbejdes der med moderne mængde-matematik

- når mængder er kvalitative som f.eks. ”røde huer”.
- når tal er ubenævnte tal i plus-stykker som f.eks. 2+3 = 5
- når regnestykker opstilles som halve sætninger (2+3 i stedet for T = 2+3) til trods for at danskfaget indskærper vigtighed af at bruge hele sætninger (”bolden er rød” i stedt for blot ”rød”)
- når 2+3 fremstilles som et talnavn for 5.

På mellemtrinnet arbejdes der med moderne mængde-matematik

- når der inden for geometrien arbejdes med grupper, både i form af flytningsgrupper i forbindelse med mønstre, og i form af projektionsgrupper i forbindelse med perspektivtegning, til trods for at disse fagområder hører til under faget formning.
- når ”Klare mål” forlanger funktionsbegrebet indført til trods for at det historisk først opstod sammen med differentialregningen. Også undervisningsvejledning fra 1976 som var gældende til 1995 forlangte funktioner indført tidligt (side 31): ”Åbne udsagn, variabelbegrebet, relationer og funktioner er fundamentale i matematikken, og i et arbejde med disse begreber vil anvendelse af mængder, herunder mængder af ordnede par, være særdeles hensigtsmæssig. En afklaring af disse begreber må finde sted på mellemtrinnet således at de kan stå til rådighed ved undervisningen på de sidste klassetrin.”
- når der arbejdes med den teoretiske geometri, medens den praktiske geometri, trigonometrien, negligeres.

På sluttrinnet arbejdes der med moderne mængde-matematik når

- når der insisteres på, at ligninger kun må løses med neutraliseringsmetoden
- når lineær vækst opfattes som et førstegradpolynomium, som efterfølges af et andengradspolynomium i stedet for eksponentiel vækst.

Alt i alt er vi på sluttrinnet i den danske folkeskole havnet i en paradoksale situation: Faget kaldes matematik, men det der foregår er regning. Nedenstående spørgsmål som bliver således besvaret som et regnestykke opstillet i tre kolonner og ikke ved hjælp af et formelskema:

”Et rektangel har Længden er 4cm og bredden 6 cm. Hvad er arealet?”
”Et rektangel har arealet 20cm^2. Længden er 4cm, hvad er bredden?”

3-kolonne regning:

Arealet er	4*6 =	24 cm^2
Bredden er	20/4 =	5 cm

Formelskema:

A = ?	A = l*b
l = 4 cm	A = 4*6
b = 6 cm	A = 24 cm^2

b = ?	A = l*b
A = 20 cm^2	A/l = b
l = 4 cm	20/4 = b
	5 cm = b
Kontrol:	*20 = 4*5*
	20 = 20 K.S.

A06 Kritik af den moderne mængde-matematik

Den vægtigste kritik ar fremført af Russell med sin typeteori, og af Kline i bogen om den nye matematiks fallit. Desuden bliver mængde-matematikken med sin tro på at ting kan defineres og afgøres med sikkerhed ramt af den poststrukturelle logocentrisme-kritik.

Ifølge definitionerne skal en mængdes elementer være veldefinerede, og et udsagns sandhedsværdi skal kunne afgøres med sikkerhed. Men i følge logocentrisme-kritikken som f.eks. i blyantsdilemmaet, kan kun taludsagn afgøres med sikkerhed. Dvs. mængdelæren kan kun anvendes på tal. Og her er dens anvendelse også begrænset af Russell og Gödel, med mindre vi ønsker at lade sig indfange i selvreference og syntaksfejl. Mængdelæren har således kun relevans inden for decimaltal.

Da store dele af matematikken bygger på antagelsen om, at vi meningsfuldt kan tale om mængder af mængder, betyder det at denne del bygger på syntaksfejl. Der foreligger derfor en stor opgave i at adskille matematikken i to dele, den viden som er sikker fordi den bygger på typeteorien, og den viden som er problematisk fordi den bygger på syntaksfejl.

6.1 Abstraktionsfejl

Vi kan sige, at en abstraktion er sand, hvis alle dens eksempler er sande. Og at en abstraktion er falsk, hvis blot ét eksempel er usandt.

"2*3 = 6" er en sand abstraktion fordi 2 3ere altid kan omveksles/ombundtes/optælles i 6 1ere.

"2+3 = 5" er en falsk abstraktion, da der er mange modeksempler: 2 meter og 3 meter er 5 meter, men 2 meter og 3 centimeter er 203 centimeter, og 2 uger og 3 dage er 17 dage osv.

Og alligevel underviser skolen i at "2+3 = 5" som om det var en universel sandhed.

I dagligdagen bærer tal altid enheder, og enhederne skal være ens for at tallene kan sammenlægges. "3 æbler" betyder ét æble 3 gange, altså "3*æble". Det er således ikke tallet 3, men operatoren "3*", der kan abstraheres. Sammenlægning har derfor kun mening, hvis de to operatorer opererer på den samme enhed, hvilket sikres af en parentes:

T = 2*3 + 5*3 = (2+5)*3 = 7*3 T = 2*3+5*4 = 2*3*1+ 5*4*1 =6*1+20*1 = (6+20)*1 = 26*1

Sammenlægning af brøker giver samme problem som sammenlægning af tal uden enheder: Bruges princippet om fælles nævner, bliver 1/2+2/3 = 7/6. Sammenlægges tæller og nævner hver for sig fås 1/2+2/3 = 3/5, hvilket skolen betragter som meningsløst. Imidlertid udgør 1 cola ud af 2 flasker sammen med 2 colaer ud af 3 flasker i alt 3 colaer ud af 5 flasker, og ikke 7 colaer ud af 6 flasker. Nu er det meningsløse pludseligt blevet meningsfuldt, og modsat. Igen er pointen at enhederne skal gøres ens før sammenlægning: 1/2 af 2 flasker og 2/3 af 3 flasker giver en total på 1 flaske + 2 flasker, dvs. 3 flasker ud af 5, altså 3/5 af flaskerne.

T = 1/2 af 2 flasker og 2/3 af 3 flasker = 1/2*2*flaske + 2/3*3*flaske = 1*flaske + 2*flaske = (1+2)*flaske = 3*flaske = 3/5*5*flaske

I tale-sproget bruges altid hele sætninger for at vurdere en sætnings sandhed. I stedet for blot at sige "grøn", siger vi f.eks. "dette bord er grønt". Af samme grund burde også tal-sproget bruge hele sætninger fra første klasse og sige "T = 3*5" i stedet for blot "3*5". Herved angives både, hvad der beregnes, og hvordan det beregnes.

Standardopgaver fra første skoleår som "3+5" er en tredjeordens abstraktion, abstraheret både fra verden, fra enhederne og fra ligningen. Sådanne abstraktioner er helt i overensstemmelse med mængde-matematikkens grammatik-før-sprog tradition: "Først skal matematikken læres, senere kan den så anvendes". Men denne tradition skaber store problemer for eleverne når de senere møder tekstopgaver.

6.2 Syntaksfejl

Vi beskriver verden ved hjælp af to sprog. Et tale-sprog, der itale-sætter ting og hændelser i ord: “Dette bord er højt”. Og et tal-sprog, der ital-sætter ting og hændelser i tal eller ligninger: “højden er femogfyrre centimeter (h = 45*cm)”.

Og vi beskriver vore to sprog ved hjælp af to metasprog: Grammatik beskriver tale-sproget, og matematik beskriver tal-sproget.

SPROGHUSET

		KVALITETER	KVANTITETER	
META- SPROG	Grammatik *for* *talesproget*	Subjekt Verbum Objekt	Mængde Relation Funktion	Matematik *grammatik for* *talsproget*
SPROG	Talesprog *anvendelse af* *grammatik*	Ord-fortællinger Sætninger *Dette bord er højt*	Tal-fortællinger Ligninger *h = 45*cm*	Talsprog *anvendelse af* *matematik*
VERDEN		TING I TID OG RUM		

Inden for tale-sproget skelner vi mellem de to sprogniveauer ved hjælp af ordene “sprog og grammatik”. Inden for tal-sproget, derimod, kaldes begge niveauer matematik, idet betegnelsen “talsprog” ikke findes. Herved skabes syntaksfejl ved at overtræde Russells typeteori, der siger, at vi skaber meningsløse sætninger ved at sammenblande forskellige sprogniveauer. Vi kan meningsfuldt spørge “Hvor i Frankrig ligger Paris?”, men ikke “Hvor i Paris ligger Frankrig?”. Ligeledes vil selvreference som “Denne sætning er usand” skabe meningsløshed. Tilsvarende har Gödel vist, at matematik kan bevise sætninger, men ikke sig selv. Mennesker accepterer gerne syntaks-fejl gennem ekko-læring, men computere nægter at acceptere syntaksfejl. Således må programmet MathCad operere med forskellige typer lighedstegn.

At skrive 2+3 = 5 er en syntaksfejl, da “2+3” er et regnestykke og “5” er et tal, hvilket er to forskellige typer, da ordene “tal” og “regnestykke” ikke kan ombyttes: Regnestykker indeholder tal, og kan regnes ud, men tal indeholder ikke regnestykker og kan ikke regnes ud.

Denne syntaksfejl kan undgås ved at skrive “2+3 –> 5”, hvilket betyder “2 plus 3 giver 5”. Eller skrive “(2+3) = 5”, dvs. at resultatet af regnestykket “2+3” er identisk med 5, svarende til, at parentesen i regnestykket “2+(3+4)” betyder, at 2 skal plusses med resultatet af regnestykket “3+4”.

Ligesom “2+3 = 5” er også “x+3 = 5” en syntaksfejl. At skrive “x+3 = 5–x” er blot en normal fejl eftersom “x+3” og “5–x” ikke er identiske regnestykker. Det er derimod meningsfuldt at skrive “(x+3) = (5–x)”, altså at spørge: For hvilket x er de to resultater identiske?

Det er meningsfuldt at skrive “f(x): x+2”, hvilket betyder “lad f(x) være et navn for regnestykket “x+2”, der har x som et variabelt tal” . Men det er en syntaksfejl at skrive “f(x) = x+2” eftersom x+2 er et regnestykke og f(x) er et navn for et regnestykke og derfor tilhører det overliggende abstraktionsniveau. vi slukker tørst med vand i flasker, ikke med vand i kursiv.

Det er en dobbelt syntaksfejl at skrive f(3) = 5, altså at 5 er et regnestykke med 3 som variabelt tal: 5 er et tal, ikke et regnestykke, og 3 er et konstant tal, ikke et variabelt tal. Det er en syntaksfejl at skrive f(2x) eftersom “2x” er et regnestykke og ikke et variabelt tal. Det er en syntaksfejl at skrive 2*f(x) eftersom 2 er et tal, og f(x) er et navn på et regnestykke. I stedet for at skrive y = f(x) burde vi skrive y = (x+2), eller y = (<f(x)>) hvor <f(x)> = x+2.

At tale om en funktions værdi er ligeså meningsløst som at tale om et udsagnsords humør. At tale om, at matematik beskriver verden er ligeså meningsløst som at tale om, at grammatik beskriver verden. Matematik og gram-matik beskriver sprog, og sprog beskriver verden. At “matematisere” verden er ligeså meningsløst som at “grammatisere” verden. Tekster kan skrives og læses, ikke “grammatikkes”, og priser kan beregnes, ikke “matematikkes”. Matematiske modeller af verden er ligeså meningsløse som grammatiske modeller af verden. Verden beskrives af kvalitative og kvantitative sætninger, ikke af deres grammatikker.

6.3 Fastlåste talemåder skaber matematik-krig

Talemåden “Matematik og anvendelse af matematik” skaber en top-down overbevisning: “Naturligvis skal matematikken da læres før matematikken kan anvendes, ellers er der jo ingen matematik at anvende!”. En mod-talemåde som “talsprog og talsprogets grammatik” skaber den modsatte bottom-up overbevisning: “Naturligvis skal sprog da læres før sin grammatik, ellers har grammatikken jo ikke noget at beskrive!”. Overbevisningen afhænger altså af hvilken talemåde, der hersker. Men overbeviste går sjældent i dialog med modparten, snarere i matematik-krig.

Ved at fastholde ekko-talemåden “Matematikken findes, og matematikken anvendes, derfor skal der undervises i matematik” har den moderne mængde-matematik installeret en top-down “grammatik før sprog” praksis, som ville skabe global analfabetisme, hvis den bredte sig fra talsproget til talesproget: Næsten alle taler modersmålet flydende, men få er i stand til at redegøre for hvilke grammatiske regler, som anvendes når sætningerne formes, for grammatisk viden er ofte tavs viden, kompetence. Ved at fastlåse sine talemåder har den moderne mængde-matematik fastlåst en situation, hvor talsproget og dets grammatik, matematik forhindres i at blive en menneskeret.

Løsningen ligger i at skelne mellem sproghusets to niveauer, sprog og grammatik, f.eks. ved at begynde at bruge talemåderne ”talsprog og talsprogets grammatik”. vi kan så se at undervisning i grammatik før sprog vil forhindre at talsprog og matematik bliver en menneskeret. Og se, at taleprog og talsprog bør behandles ens, dvs. først sprog, så grammatik. Tale-sproget læres ved at itale-sætte verden, og tal-sproget læres ved at ital-sætte verden. Og grammatikken skal ikke nødvendigvis italesættes, men tillades at udvikles som tavs viden, kompetence.

Matematikundervisning handler altså om at undervise i talsproget og dets grammatik matematik, ikke i “meta-matik”, hvor den historiske rækkefølge vendes på hovedet ved at definere noget abstrakt ud fra noget endnu mere abstrakt.

A07 Alternativer til den moderne mængde-matematik

Der er tre alternativer til den moderne mængde-matematik, da der er fire svar til matematiklæringens to hovedspørgsmål:

• Hvordan kommer begreberne ind i den sociale bevidsthed, oppefra eller nedefra?
• Hvordan kommer begreberne ind i den individuelle bevidsthed, udefra eller indefra?

Begreber kommer:	UDEFRA	INDEFRA
OPPEFRA Platonister, realister, strukturalister	“En funktion <u>er et eksempel på</u> en relation mellem to mængder, som ...” *mængdebaseret matematik*	“En funktion <u>er ligesom</u> en maskine, som behandler tal” *konstruktivistisk matematik*
NEDEFRA Sofister, nominalister, post-strukturalister	“En funktion <u>er et navn for</u> et regnestykke med variable tal” *mangfoldighedsbaseret matematik*	“En funktion <u>er for eksempel</u> 2+x eller 2*s, men ikke 2+3” *praksislæring som f.eks. mesterlære*

Moderne mængdebaseret matematik svarer “oppefra og udefra” ved at fremstille abstrakte begreber som eksempler på endnu mere abstrakte begreber. Enten som folkeskolens Bourbaki-definition ”En funktion <u>er et eksempel på</u> en mængde af ordnede talpar hvorom det gælder at førstekomponentsidentitet medfører andenkomponents-identitet”. Eller som gymnasiets Dirichlet-definition “En funktion <u>er et eksempel på</u> en relation mellem to mængder, som til hvert element i den ene mængde knytter ét og kun ét element i den anden”. Denne fremstillingsmåde forbinder et abstrakt begreb med et mere abstrakt begreb. Eleverne hører dette som “bublibub er et eksempel på bablibab”, dvs. som et udsagn uden mening, som blot skal læres udenad for at bestå eksamen.

Med mindre eleverne konstruerer deres egen mening, f.eks. ved at bruge en metafor som “overbærer” af mening fra det samme abstraktionsniveau: “En funktion <u>er ligesom</u> en maskine, der behandler tal”. Konstruktivistisk matematik svarer således “oppefra og indefra”, og betragter begreber som noget, den individuelle elev konstruerer gennem aktivitet eller samtale. Teoretikere er Piaget, Vygotsky m.fl.

Poststrukturel matematik svarer “nedefra og udefra” ved som Euler i 1748 at fremstille abstrakte begreber som navne for mindre abstrakte begreber, opstået af social praksis: “En funktion <u>er et navn for</u> et regnestykke med variable tal”. (Denne “sociologiske sociale konstruktivisme” anser begreber som konstrueret af social praksis. Den er forskellig fra Vygotskys “psykologiske sociale konstruktivisme”, som anser begreber for at være universelle.) Denne fremstillingsmåde forbinder et abstrakt begreb med et mindre abstrakt begreb. Eleverne hører dette som “bublibub er et navn for et regnestykke”, dvs. som et udsagn, hvor noget ukendt får mening nedefra. I dette tilfælde behøver eleverne derfor ikke konstruere deres egen mening. Udfordringen er at give fortællingerne om disse sociale praksiser eventyrets form, hvorved skolen måske kan gå over til automatisk prøvefri læring, som antydet af at eventyr har kunnet overleve i en skolefri, ikke-skriftlig, førførmoderne kultur. Teoretikere er Foucault, SSK (Sociology of Scientific Knowledge), m.fl.

Praksislæring, situeret læring, som f.eks. mesterlære svarer "nedefra og indefra". Lærlingene konstruerer mening ved at observere og deltage i social praksis: "En funktion er for eksempel 2+x eller 2*s, men ikke 2+3." Denne fremstillingsmåde forbinder et abstrakt begreb med et væld af eksempler fra begrebets eksempelfylde. Matematik vil fremvokse gradvist (dels som italesat viden, kvalifikationer, dels som tavs viden, kompetencer) gennem gradvis deltagelse i den sociale praksis, som har skabt tallene, algebraen og geometrien, altså mødet og arbejdet med mangfoldighed, bundtning & stakning og jordmåling. Teoretikere er Lave m.fl.

Inden for den moderne mængde-matematiks lejr er der i dag opstået den såkaldte matematikkrig mellem gymnasieniveauets formidlere og grundskolens konstruktivister. Begge anser matematikken for at være universel, men hvor formidlerne er tror at "dannelsen sker gennem det sætningsfyldte møde med sætningens grundled", mener konstruktivisterne, at "dannelsen sker gennem det sætningsfrie møde med sætningens grundled", hvor eleverne så tillades at danne des egne sætninger som så tilpasses i en indre dialog med sig selv (Piagets radikale konstruktivisme) eller i en ydre dialog med andre (Vygotksys sociale konstruktivisme). Ved overgangen mellem de to uddannelsesniveauer vil konstruktivistiske elever ofte mangle en række sætninger (om bl.a. brøkregning) som gymnasieniveauet forudsætter, hvilket får matematikkrigen til at blusse op igen og igen.

Forskellen på matematik oppefra og matematik nedefra er, at matematik oppefra har mængden som grundled i sine sætninger, medens matematik nedefra har mangfoldigheden som grundled i sine sætninger. Inden for matematik nedefra er der den samme forskel på formidlere og konstruktivister om hvorvidt dannelsen sker gennem det sætningsfyldte eller det sætningsfrie møde med sætningens grundled. Dette løses ved at lægge hovedvægt på sætningsfrie møder i barneskolen og sætningsfyldte møder i ungdomsskolen.

A08 Konstruktivisme-matematik

Konstruktivisme-matematik svarer som sagt "indefra" på spørgsmålet "hvordan kommer begreber ind i hovedet på elever, udefra eller indefra?": vi kan ikke hælde begreber på elever (tankpasser-tænkning), eleverne konstruerer selv deres egne versioner af begreberne. Følgelig skal elever ikke tvinges til at følge bestemte algoritmer, men tillades at udvikle deres egne algoritmer.

Konstruktivisme bygger på den såkaldte kognitive psykologi, herunder især Piaget. I korthed kan Piagets teori formuleres som "først gribe - så begribe": Biologisk kan pattedyr nøjes med at føde få børn, som bliver robuste ved at blive plejet medens de lærer at tilpasse sig omgivelserne (adaption). Denne tilpasning finder sted ved at individet modtager impulser fra omverdenen og på baggrund heraf udvikler kompetencer ved at danne skemaer i hjernen. Skemaerne bruges til at assimilere nye impulser med (genkendelse, det er ligesom …, det er et eksempel på …, osv.). Impulser der ikke kan assimileres giver anledning til at de eksisterende skemaer omformes (erkendelse, akkommodation), eller at der dannes nye skemaer.

Ifølge Piagets radikale konstruktivisme udvikler elevens begreber sig altså i samvær med ting. Det er derfor lærerens opgave at sikre en righoldighed af konkrete materialer til støtte for elevernes begrebsudvikling.

Ifølge Vygotskys sociale konstruktivisme udvikler elevens begreber sig derimod i samvær med mennesker. Dels med andre elever, hvorfor undervisningen også må omfatte tid til interne elevdialoger. Dels med læreren som må forsøge at få elevens dagligdagsbegreber (førsteordens sprog) til at udvikle sig så det kan nå op til fagets videnskabelige begreber (andenordens sprog) ved at "stilladsere" elevens begrebsudvikling. Derfor må læreren kunne differentiere sin undervisning til den enkelte elev, så undervisningen vil foregå i elevens "nærmeste udviklingszone". Og eleven bør udstyres med en individuel portefølje til dokumentation af sin læringsproces.

Konstruktivisme-matematikken har haft stor succes i de første skoleår, men den har skabt store overgangsvanskeligheder mellem barne- og ungdomsskole, idet eleverne her møder op med vidt forskellige forudsætninger sammenholdt med at eleverne ved afslutningen skal til en fælles eksamen. Dette misforhold er en af de primære grunde til at der er udbrudt en matematik-krig mellem mængde- og konstruktivisme-matematik.

A09 Kompetence-matematik

Kompetence-matematik er et dansk fænomen, som muligvis vil brede sig internationalt, til trods for at dens kompetencebegreb strider mod det forskningsbaserede kompetencebegreb som det f.eks. kommer til udtryk i sociologen Giddens' skelnen mellem diskursiv og praktisk (tavs) bevidsthed. Den udspringer af professor Mogens Niss's kompetencerapport som forligger i to udgaver, en fuld version på 336 sider og en ”pixi”-udgave på 51 sider. I det følgende henvises til pixi-udgaven.

Kompetence-matematikken tager sit udgangspunkt i matematik-krigen med en irritation over at matematikken fortolkes forskelligt på de forskellige steder i uddannelsessystemet:

”Vi har også … hæftet os ved sammenhængs-, overgangs- og progressionsproblemer i matematikundervisningen. Sammenhængsproblemet består i, at det fag, der bærer navnet matematik, i virkeligheden er så forskelligt tænkt, fortolket og realiseret i de forskellige dele af uddannelsessystemet, at det kan være svært at får øje på, hvad er er fælles for faget. (side 6)”.

Disse forskellige matematiksyn ønsker rapporten afløst af ét fælles matematiksyn:

”…er én forudsætning afgørende … Det er at matematikundervisningsaktørerne … tænker på det samme fag, når de taler om matematik, og ikke kun på en ydre etiket, og at de opfatter deres opgave som værende på hver deres måde at bidrage til, at børn og unge op igennem uddannelsessystemet udvikler og udbygger deres matematiske kompetence. Med andre ord er det centralt at matematikundervisningens aktører alle betragter sig som del af det samme overordnede undervisningsprojekt og ikke som aktører i en række adskilte projekter, der enten ikke har noget særligt med hinanden at gøre, eller som direkte kan komme hinanden på tværs. (side 9)”.

Alle undervisere skal åbenbart være ”missionærer” med samme mission, hvor afvigende fortolkninger kan gribe forstyrrende ind og derfor ikke kan tolereres. Hvad denne fælles mission er fremgår af kapitel 5.3 og 5.4 samt af side 12 og 13, hvor den moderne mængdematematiks fagområder oplistes samtidig med at der tages afstand til alternative opfattelser, som f.eks. de angelsaksiske ”fænomenologiske kategorier”: Rum, form og mønstre, forandring og vækst, måling, mm.

Tidligere havde læreren ellers metodefrihed inden for sin fortolkning af fagets mål og midler. Dette vil kompetence-matematikken nu sætte en stopper for. Der er kun én fælles tolkning af fagets mål og midler, og der er kun én metode, kompetenceudvikling. Det er nemlig vigtigt at ikke kun fagområderne formidles til elverne, men at også fagligheden formidles, altså et eleverne ikke kun lærer matematik, men også lærer at ”gebærde sig i og med matematik (side 23)” ved at lære 4 ”i-kompetencer” og 4 ”med-kompetencer”, som samles i en 8-bladet kompetenceblomst (side 22).

Andre skelner mellem kvalifikationer og kompetencer som hhv. italesat og tavs viden, eller som hhv. færdighed og viden. Kompetence-matematikken samler det hele under betegnelsen kompetence som defineres som indsigtsbaseret handleparathed:

”Vi kan også sige, at en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer. (side 21)”

En kompetence er altså indsigtsbaseret og kan derfor først udøves når indsigten er til stede, dvs. når stoffet er lært. Herefter kan indsigten bruges til at handle med i forhold til ” matematiske udfordringer” dvs. matematik kan så anvendes på matematikken selv og ikke på områder uden for matematikken. Så kompetence-matematikken gentager den moderne mængde-matematiks fejltagelse ved igen at gøre matematikken selvrefererende.

Undervisningen organiseres i en matrix-struktur: ”Det vil være nærliggende for hvert undervisningstrin at tænke i en matrixstruktur, hvor de matematiske stofområder udgør f.eks. rækkerne og de otte kompetencer søjlerne. Matricen skal så betragtes som en opgørelse over, hvordan den enkelte kompetence udøves i forhold til det enkelte stofområde. (side 40).”

Undervisningsmatrix	Kompetence 1	Kompetence 2	…	Kompetence 8
Stofområde 1				
Stofområde 2				
…				
Stofområde 10				

Med de otte kompetencer skal eleverne ikke kun lære matematik, men også lære at anvende matematik på matematik. Men matematikkens historie viser at matematikken ikke har skabt sig selv, men er blevet skabt af problemer uden for matematikken, og stadig i dag anvendes på mange områder uden for matematikken. Dette forhold tager kompetence-matematikken højde for ved at indføre tre ”meta-kompetencer” som kaldes overblik og dømmekraft:

”De omtalte kompetencer har som nævnt alle et handlingspræg, derved at de er rettet mod omgangen med forskellige typer af udfordrende matematiske situationer. Udover de sider af matematisk faglighed, som vi med disse kompetencer forsøger at indfange, har vi fundet det ønskeligt at operere med en type ”aktive indsigter” vedrørende matematikkens karakter og rolle i verden, som ikke har adfærdspræg i direkte forstand. … Det drejer sig om på baggrund af viden og kunnen at besidde overblik og dømmekraft vedrørende a) matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder, b) matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning, og c) matematikkens karakter som fagområde. (side 33)”

Igen kan forholdet til omverdenen først udvikles når det sker ”på baggrund af viden og kunnen”, dvs. efter at matematikken er lært. Herved forstærkes kompetence-matematikkens budskab om at matematik er til for matematikkens egen skyld. Kompetence-matematikken er således moderne mængde-matematik i ny forklædning, som forsøger at vinde matematikkrigen mod konstruktivisterne ved et kup. I stedet for at vedkende sig forskelligheden og benytte denne til en frugtbar dialog mellem ligeværdige partnere, forsøger kompetence-matematikken at tilsløre forskelligheden ved at overtage konstruktivisternes centrale begreb, kompetence, men ændre begrebets indhold fra tavs viden til det modsatte, indsigtsbaseret handleparathed.

Kompetence er altså ikke mere noget alle pattedyr automatisk udvikler i samvær med deres omgivelser, men noget som artige elever udvikler i samvær med kompetente kompetenceformidlere.

Den franske post-strukturalist Foucault har indført begrebet ”pastoralmagt” om institutioner som skaber klienter ved at indføre nye talemåder. Talemåden ”frelse” skaber den ufrelste, syndige klient. Talemåden ”dannelse” skaber den udannede klient. Talemåden ”kvalificeret” skaber den ukvalificerede klient. Talemåden ”kompetent” skaber den inkompetente klient. Osv.

Men pastoren er klar til at hjælpe klienten: ”Du er udannet, men frygt ikke, thi vi de dannede skal nok hjælpe dig. Du skal blot indrømme din udannethed, angre den og komme til min uddannelsesinstitution og gøre hvad jeg siger, så skal du nok blive frelst.”

Først forsøgte mængde-matematikken at disciplinere eleverne med talemåden “ansvar for egen læring”. Men eleverne tog denne talemåde alvorligt og vendte ryggen til mængde-matematikkens ”meta-matik” og dens meningstomme selvreference (en funktion er et eksempel på en mængderelation: Bublibub er et eksempel på bablibab). Nu forsøger mængde-matematikken så et come-back ved at ændre sit navn til kompetence-matematik, som søger at disciplinere og umyndiggøre lærerne ved at konstruere dem som inkompetente med deraf følgende behov for kompetenceudvikling gennem massiv efteruddannelse.

Kompetence-matematikken er ganske snedig ved at udskifte talemåden kvalifikation med talemåden kompetence: “Kvalifikation” skaber den ukvalificerede, og “kompetent” skaber den inkompetente. Men hvor den ukvalificerede kan kurere sig selv ved at kvalificere sig, så kan den inkompetente ikke kurere sig selv ved at “kompetencere” sig, og er dermed overladt til at blive kureret af andre, de kompetence-kompetente, ved at melde sig på disses kompetenceudviklingskurser, som ofte begynder med at kursisten får udleveret et blankt stykke papir, hvor vi skal skrive hvilke kompetencer vi ønsker at får udviklet. Kafka har således ikke skrevet ”Processen” forgæves.

Ved at udelade kompetencen ”at eksperimentere” viser kompetence-matematikken, at den kun respekterer videnskaben, og hverken videnskabelsen eller det videnskabende. Samt at den ikke respekterer den måde hvorpå børn og unge tilegner sig viden gennem selvaktivitet og ”sladder”-fortællinger. Ved at definere kompetence som indsigtsbaseret forudsætter kompetence-matematikken, at matematikken allerede er lært, hvorefter resten af tiden så kan bruges på at anvende matematikken, ikke på omverdenen, men på sig selv gennem otte interne kompetencer til udøvelse af matematikfaglighed. Herved bliver kompetence-matematikken en “katolsk” matematik med otte sakramenter, gennem hvilken mødet med videnskaben kan finde sted.

Heroverfor står så mangfoldigheds-matematikken med sin “protestantiske” matematik, som betoner vigtigheden af det direkte møde mellem individet og det videnskabende (mangfoldigheden), og som kun har to sakramenter, tælle og regne. Gennem dette læringsmøde udvikler eleven en, ikke matematisk, men kvantitativ kompetence, som er tavs, og kvalifikationer, som omfatter dels talsproglige kvalifikationer i at kunne bruge talsproget til at ital-sætte verden, dels talgrammatiske kvalifikationer i at kunne bruge tale-sproget til at itale-sætte tal-sproget.

A10 Mangfoldigheds-matematik

Matematikkrigen er en borgerkrig inden for mængde-matematikkens egen lejr, idet både kompetence-matematikken og konstruktivisme-matematikken anser matematikkens begreber som universelle, og derfor begge må betragtes som strukturalister i videnskabskrigen mellem strukturalister og post-strukturalister. Et tredje alternativ kan derfor findes hos post-strukturalisterne.

I videnskabskrigen er strukturalisterne er repræsenteret af den moderne mængde-matematik, som tror på at der findes en universel struktur, mængden, som hele matematikken kan fremstilles som eksempler på. Post-strukturalisterne er repræsenteret af den postmoderne mangfoldigheds-matematik, som tror på at geometri og algebra er vokset op af de sociale praksiser, de benævner, jorddeling og produktdeling. Mængde-matematikken negligere Russells typeteori og indfanges derfor i syntaksfejl. Mangfoldigheds-matematikken accepterer Russells typeteori og undgår derfor syntaksfejl.

Syntaksfejl undgås ved kun at acceptere mangestakke, polynomier, decimaltal som tal, og acceptere at rationale og irrationale tal som brøker, rødder, logaritmer mm. er regnestykker, som kan udregnes til en række forskellige tal alt efter kravet til nøjagtighed. Og ved at være meget påpasselig med funktionsbegrebet, og nøjes med det Eulerske funktionsbegreb, som i øvrigt også fysikfaget bruger i sine formler. Samt gøre matematikken funktionsfri indtil funktionsbegrebet bliver autentisk der hvor det opstod historisk i forbindelse med differential- og integralregningen.

Abstraktionsfejl undgås ved at være omhyggelig med at vi kun plusser benævnte tal og brøker, så vi er sikker på at tallenes enheder en ens ved at sætte den fælles benævnelse uden for parentes. Ellers skal enheden først omveksles/ombundtes ved hjælp af omvekslings/ombundtningsligningen $T = (T/b)*b$. Hvilket vil sige at gange og division bliver mere grundlæggende end plus og minus.

Forskellen mellem strukturalistisk og post-strukturalistisk matematik er den, at den første formidler mængde-fortællinger, medens den anden formidler mangfoldigheds-fortællinger. Begreberne er de samme, men fremstilles hhv. oppefra som eksempler af mere abstrakte begreber, og nedefra som abstraktioner fra mindre abstrakte begreber. Også talemåderne er forskellige:

<table>
<tr><td>Moderne mængde-matematik
(KOM-rapporten side 41-42)</td><td>Postmoderne mangfoldigheds-matematik
(KOMMOD-rapporten, side 2-3)</td></tr>
<tr><td>Tal: Naturlige, hele, rationale, reelle, komplekse. Positionssystemet.</td><td>Tal: Bundtning og stakning, tal og antal, decimaltal, konstante og variable tal, styktal, pr.tal.</td></tr>
<tr><td>Aritmetik: Regningsarterne plus, minus, gange, division, procentregning.</td><td>Regning: (om)bundtningsligningen $T = (T/b)*b$
(om)stakningsligningen $T = (T-b)+b$.</td></tr>
<tr><td>Algebra: Ligninger, kompositioner, algebraiske strukturer (grupper, ringe, legemer, vektorrum).</td><td>Algebra, genforenings-regning:
Forening af variable og konstante styktal og pr.tal til totaler ved hjælp af plus, gange, integration og potens.
Opdeling af totaler i variable og konstante styktal og pr.tal ved hjælp af minus, division, differentiation og rod/logaritme.
Frem- og tilbageregning.</td></tr>
<tr><td>Geometri: Plan og rum, koordinatgeometri, deduktiv geometri.</td><td>Geometri, jorddelings-regning:
Triangulering af figurer, trigonometri som procentregning.
Runde figurer. Rumlige figurer. Plane tegninger af rumlige figurer.</td></tr>
<tr><td>Funktioner: Funktion som mængderelation, polynomier, rationale, trigonometriske, potens-, eksponential- og logaritmefunktioner.</td><td rowspan="3">Variablers variation: Vækst-regning
Funktion som et regnestykke med variable tal.
Konstant variation:
I tal: Lineær +vækst $\Delta y=a\$$, $y = b+a*x$
I procent: Eksponentiel *vækst $\Delta y/y=r\%$, $y = b*(1+r)^x$
I tal&procent: Opsparingsvækst $\Delta y=a\$\&r\%$, $y = a*R/r$
Variabel forudsigelig variation:
Krum vækst: $dy = fdx$, $y = b+\int fdx$
Variabel uforudsigelig variation:
Stokastisk variation: $\Delta y=?$, $y = ygns. \pm 2*\Delta ygns.$</td></tr>
<tr><td>Infinitesimalregning: Kontinuitet, grænseværdi, differentiation, ekstrema, integration, differentialligninger.</td></tr>
<tr><td>Sandsynlighedsregning: Kombinatoriske sandsynligheder, stokastiske variable, standardfordelinger
Statistik: Beskrivende statistik, parameterestimation, hypotesetestning.</td></tr>
<tr><td></td><td>Kvantitativ litteratur, de tre genrer:
Fakta, FritFaldsberegninger: DaSå-beregninger
Fiktion, Affaldsberegninger: HvisSå-beregninger
Fidus, Dødsfaldsberegninger: HvadSå-beregninger</td></tr>
</table>

Mangfoldigheds-matematik kan også kaldes ”matematik nedefra, efter naturmetoden”. Den opfatter matematik som mangfoldighedslære ved at fortælle matematikken som 7 fortællinger om mangfoldighed, som det fremgår af den vedhæftede folder.

A11 Postmoderne matematik til postmoderne elever?

Enhver debat om matematikundervisning bør udover faget også omfatte de lærende, eleverne. Er elevtyper noget konstant eller noget, som ændres med tiden? Er der både moderne og postmoderne elever?

Mennesket har huller i hovedet for at kunne dannes af mad til kroppen og fortællinger til hjernen. Men maden skal have vitaminer, og fortællingerne skal have mening, ellers sker der misdannelse. Inspireret af psykologen Ausubel kan vi sige, at meningsfuld læring finder sted når eleven får et svar på sit ”sladderlærings”-spørgsmål: “Fortæl mig noget jeg ikke ved, om noget jeg ved.”

Den moderne samfund troede på strukturalismen: Verden ekkoer metafysiske strukturer, der kan opdages gennem forskning og blive til videnskab, der ekkoes gennem lærebøger og lærere ud til skolens elever. Moderne elever spurgte: “Fortæl os hvad vi skal kunne til eksamen”, og skolens svarede: “Ekko, og bestå”. Ekko-undervisning og ekko-læring var som skræddersyet til det moderne “ekko-samfund” og dens ekkoproduktion af standardvarer. Det var nemt at få identitet i det moderne ”standard-samfund”, vi skulle blot at ekkoe en standardidentitet.

Imidlertid er det moderne vare-samfund blevet afløst af et postmoderne informationssamfund med introduktion af det globale TV i lokale kulturer. vi kan ekkoe ét standardsvar, men ikke flere samtidige svar. Med globale modsvar til lokale standardsvar bliver identitet forvandlet til selvidentitet, et refleksivt projekt, hvor individet må opbygge sin egen biografiske selvfortælling gennem autenticitet og meningsfuldhed, som beskrevet af sociologen Giddens. Det er svært at få identitet i det postmoderne “dilemma-samfund”, der tvinger postmoderne elever til at opbygge selvidentitet ved hele tiden at stille ”sladderlærings”-spørgsmålet “fortæl mig noget jeg ikke ved, om noget jeg ved”.

Top-Down “ekko-undervisning” definerer noget abstrakt som eksempel på noget endnu mere abstrakt (en funktion er et eksempel på en relation mellem to mængder). Top-Down definitioner bliver derved “ukendt-ukendt” relationer, som ikke kan forankres i elevens eksisterende selvfortælling. Eleven hører dem som “bublibub er et eksempel på bablibab”. De bliver meningsløse, hvorfor postmoderne elever vil vælge “ekko-vægring”, hvor moderne elever valgte ”ekko-læring”.

Bottom-Up undervisning definerer noget abstrakt som navn for et fællestræk ved konkrete eksempler (en funktion er et navn for regnestykker med variable tal, Euler 1748). Bottom-Up sætninger bliver derved “ukendt-kendt” relationer, der meningsfyldt kan forankres i elevens eksisterende læringsfortælling og dermed udvide denne: “Jeg ved ikke hvad bablibab er. Men jeg ved, hvad et regnestykke er. Jeg vidste ikke, det kunne hedde en funktion, men det ved jeg nu. For du har fortalt mig noget jeg ikke ved, om noget jeg ved. Kan du også fortælle mig noget jeg ikke ved om funktioner?”

A12 Konklusion

Alle de fire kendte metafysiske nedslag i verden er baseret på tal. Inspireret af denne succes opstod formodningen om, at også tallene havde en metafysisk kilde, og at matematik og logik kunne forenes til ét fag. Den moderne mængde-matematik var svaret på denne formodning.

Mængde-matematikken strandede dog på at den er bygget på selvreference, og dermed er behæftet med de syntaksfejl, selvreferencen medfører. Den negligerer imidlertid sine syntaksfejl og forsøger nu et come-back i skolen under navnet kompetence-matematik.

Det der derfor på tide at tage opgive troen på, at også tallene har en metafysisk kilde, og at bruge Russells typeteori som grundlag for at opbygge en postmoderne mangfoldigheds-matematik nedefra til afløsning af den moderne mængde-matematik oppefra.

A13 KOMMOD-rapporten

KOMMOD-rapporten giver et alternativt svar til KOM-projektets kommissorium i forventning om at dettes giver, Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet, ønsker at respektere almindelig demokratisk IDB-tradition med Information og Debat mellem alternativer inden en Beslutning tages. Rapporten besvarer nedenstående spørgsmål vedrørende matematikundervisningen:

a Hvad er samfundets krav til undervisningen?
b I hvilken udstrækning er der behov for at forny den eksisterende undervisning?
c Hvordan kan undervisningen tage hensyn til den nye elevtype?
d Hvilket indhold kan der være i et tidssvarende matematikfag?
e Hvordan kan fremtidens undervisning være organiseret?
f Hvordan kan progression og sammenhæng i undervisningen sikres?
g Hvilke konsekvenser vil en ændret undervisning få for læreruddannelsen?
h Hvilke kompetencer og kvalifikationer kan erhverves på de forskellige stader af undervisningen?
i Hvordan kan kompetencer og kvalifikationer måles?
j Hvordan kan fremtidens undervisningsmaterialer se ud?
k Hvordan kan en løbende udvikling af undervisningen sikres?
l Hvordan kan Danmark udveksle erfaringer om undervisningen med udlandet?

Ad a. Vort demokratiske samfund har behov for, at borgere og specialister har et fælles talsprog, som de kan kommunikere i om kvantitative forhold og beregninger. Samfundet har behov for, at matematik bliver en menneskeret, både som diskursiv kvalifikation og som tavs kompetence.

Ad b. Der er behov for at forny den nuværende matematikundervisning for at løse dens tre hovedproblemer: 1. Der findes en udbredt talsprogs-analfabetisme, hvor mange borgere vægrer sig ved at benytte talsproget. 2. Der er store overgangsproblemer mellem primær, sekundær og tertiær uddannelse. 3. Der er en vigende tilgang til matematikbaseret videreuddannelse inden for naturvidenskab, teknologi og økonomi, samt en stor mangel på nye gymnasielærere i matematik.

Ad c. Fremtidens matematikundervisning bør respektere nutidens demokratiske, anti-autoritære ungdom og dens krav om mening og autenticitet. Dette kan opnås hvis faget begynder at respektere sine historiske rødder, og rehumaniserer sig ved at fremstille sine abstraktioner som abstraktioner og ikke som eksempler, dvs. som abstraktioner fra eksempler (en funktion er et navn for et regnestykke med variable tal), og ikke som eksempler på endnu mere abstrakte abstraktioner (en funktion er et eksempel på en mængderelation). Kort sagt, faget bør fremstille sig som *mate-matik*, der erkender at det har fysiske rødder og er vokset op nedefra gennem abstraktioner. Og faget må sige farvel til den nuværende *meta-matik* og dens tro på at faget har meta-fysiske rødder og er vokset ned oppefra gennem eksempler. Endelig må faget respektere, at mennesker lærer forskelligt. Børn lærer ved at mærke verden, dvs. gennem kompetenceopbygning. Unge lærer ved at lytte til verden, dvs. gennem fortællings- og kvalifikationsopbygning ud fra læringsspørgsmålet "fortæl mig noget jeg ikke ved, om noget jeg ved" (sladder-læring).

Ad d. Matematikken må respektere sin historie som fremvokset gennem abstraktioner, og dermed også sin konstruktion som talsprogets grammatik, der først kan introduceres efter at talsproget er udviklet. Talsproget er vokset ud af mødet med kvantitet i tid (gentagelse) og i rum (mangfoldighed). Dette møde har affødt konstruktion af tal til at beskrive totalen, enten gennem optælling i styk, bundter, bundter af bundter, bundter af bundter af bundter osv. Eller hurtigere ved gennem beregning at opsamle og opdele styktal (3 kr.) og pr.tal (3 kr./dag, 3%): Plus og minus opsamler og opdeler variable styktal (3+5 = ?, 3+? = 8). Gange og division opsamler og opdeler konstante styktal (3*5 = ?, 3*? = 15). Potens og rod&logaritme opsamler og opdeler konstante pr.tal (3 gange 5% = ?%, 3 gange ?% = 20%, ? gange 5% = 20%). Integration og differentiation opsamler og opdeler variable pr.tal (5 sekunder á 2m/s voksende jævnt til 4m/s = ?m, 5 sekunder á 2m/s voksende ? til 4m/s = 18m). Kort sagt, faget må respektere, at geometri er vokset ud af det, ordet betyder på græsk, jordmåling. Samt at algebra er vokset ud af det, ordet betyder på arabisk, genforening, dvs. opsamling og opdeling af konstante og variable styktal og pr.tal. Geometri og algebra må altså respektere deres historiske rødder som fremvokset af landbrugskulturens to hovedspørgsmål: "Hvordan deler vi jorden, og det den producerer?" Talsproget har en række typiske anvendelsesområder: Geometri regner på former og figurer. Handelsregning regner på niveautal. Vækstregning regner på forudsigelig variation. Statistik/sandsynlighedsregning regner på uforud-sigelig (men "bagud-sigelig") variation. Det er vigtigt at sikre, at undervisningen renses for "dræber-matematik" (dvs. matematik, der ikke forekommer uden for klasseværelset, og som kun kan anvendes til én ting, at dræbe elevers interesse). Plus bør kun forekomme inden for den parentes, der sikrer at enhederne er ens (T = 2*3 + 5*3 = (2+5)*3 = 7*3 = 21). Brøker bør kun optræde sammen med deres totaler (1/2 af 2 + 2/3 af 3 = 3/5 af 5). Ligninger bør løses ved tilbageregning. Da jagten på et veldefineret mængdebegreb er opgivet bør dette fjernes, og funktion udskydes til det dukker op historisk efter differentialregning.

Ad e. Fremtidens matematikundervisning kan organiseres i to hovedområder: Barnets matematik og ungdommens matematik, svarende til hhv. 1-7 skoleår og 8-12 skoleår. Gennem mødet med matematikkens rødder, gentagelse og mangfoldighed, udvikles fagets to kernekompetencer: tælle og regne.

Ad f. Progression og sammenhæng i undervisningen kan sikres ved at barnets matematik vokser ud af den lokale mangfoldighed, agerbrugskultur med land og by, og ved at ungdommens matematik vokser ud af industrikulturens globale mangfoldighed. Samt ved at barnet primært arbejder med styktal, og ungdommen primært med pr.tal.

Ad g. Med en opdeling af matematikundervisningen i barnets matematik og ungdommens matematik vil det også være naturligt at opdele læreruddannelsen i barneskolelærer og ungdomsskolelærer, på samme måde som det sker næsten overalt i udlandet. Det betyder at al fremtidige læreruddannelse samles på collegeniveauet, enten på et universitet eller på et CVU. På sigt vil det falde sammen med den opdeling af skolen i en barneskole og en ungdomsskole, der vil finde sted inden for det næste tiår i forbindelse med gymnasiets sammenbrud på grund af øget lærerpensionering og mangelfuld tilgang af nye lærere inden for matematik og naturvidenskab.

Ad h. Gennem mødet med gentagelse og mangfoldighed udvikler barnet kompetencer i at opsamle og opdele konstante og variable styktal. På marken fører bundtning og ombundtning til gangning og division. I byen fører stakning og omstakning til plus og minus. Gennem fortællinger om beregning af gentagelse og mangfoldighed udvikler den unge kvalifikationer i at opsamle og opdele konstante og variable pr.tal. Den totale rente fører til potens, rod og logaritme. Den totale vejstrækning fører til integral- og differentialregning.

Ad i. Kompetencer er tavs viden og kan derfor hverken beskrives eller måles, men vil udvikle sig automatisk gennem mødet med meningsfulde og autentiske situationer, og vokse ud fra mange konkrete oplevelser med gentagelse og mangfoldighed, bundtning og stakning, opsamling og opdeling, styktal og pr.tal. Kvalifikationer kan som nu måles gennem løsning af tre typer opgaver: Rutineopgaver, tekstopgaver og projekter.

Ad j. Fremtidens undervisningsmaterialer bør være kortfattede for at der kan afsættes tid til elevernes læring gennem selvaktivitet. Materialet bør respektere, at eleverne har to hjerner, en krybdyrhjerne til rutiner og en menneskehjerne til begribelse. Der bør derfor være dels træningsopgaver med elevsvar, så den enkelte elev kan gå frem i sit eget tempo og træne efter eget behov. Dels kortfattede lærebøger der fortæller hvordan faget er vokset op fra praksis gennem lag af abstraktioner, og som accepterer forskellige betegnelser for fagets begreber, så disse navngives både nedefra og oppefra (plusvækst og lineær vækst/funktion mm.).

Ad k. En løbende udvikling af undervisningen kan sikres ved til stadighed at validere undervisningen i forhold til sine rødder og ikke i forhold til den aktuelle politiske korrekthed.

Ad l. Udveksling af erfaring med udlandet kan ske gennem at etablere en dansk uviklingsforskning, hvor praktikere får mulighed for at bestride kombinationsstillinger som forsker på et universitet/CVU og samtidig forbliver tilknyttet et lærerteam på en skole. Herved undgås den nuværende golde "spøgelsesforskning" udført af forskere uden erfaringsbaggrund i undervisningens praksis. Udviklingsforskningen bør være opdagelsesforskning (Askepot-forskning), der bruger praksisbaseret fantasi til at opdage og afprøve skjulte alternativer.

Forskelle på KOM- og KOMMOD rapporterne. Matematikundervisningens to hovedspørgsmål lyder: "Hvordan kommer begreber ind i verden, og ind i elevens hoved - udefra eller indefra"? Disse spørgsmål afføder forskellige svar. Gymnasiets *strukturalister* siger udefra-udefra: Begreber findes i det meta-fysiske, opdages af forskere og formidles af lærere. Folkeskolens *konstruktivister* siger udefra-indefra: Begreberne findes i det meta-fysiske, men opdages gennem eksperimenter, hvor den enkelte elev selv konstruerer sin egen viden og kunnen (skemaer og kompetencer), der begge er "tavse" og kun kan iagttages gennem brug. *Post-strukturalister* siger indefra-udefra: Begreber opstår af det fysiske gennem opfindelse og social konstruktion, og bør fortælles sådan. *Mesterlæren* siger indefra-indefra: Begreber konstrueres af lærlingen under deltagelse i mesterens praksis.

Over det meste af verden raser to videns-krige, en matematik-krig mellem strukturalister og konstruktivister, og en videnskabs-krig mellem strukturalister og post-strukturalister. I stedet for at vedkende sig forskelligheden forsøger KOM-rapporten at tilsløre denne ved at overtage konstruktivisternes centrale talemåde, kompetence, men give den et strukturalistisk indhold (indsigtsbaseret handleparathed). Den franske filosof Foucault har påvist, hvordan nye talemåder skaber nye klienter: "Kvalifikation" skaber den ukvalificerede, og "kompetent" skaber den inkompetente. Men hvor den ukvalificerede kan kurere sig selv ved at kvalificere sig, så kan den inkompetente ikke kurere sig selv ved at "kompetencere" sig, og er dermed overladt til at blive kureret af andre, de kompetence-kompetente. Overtagelse og ændring af talemåden kompetence kan derfor tolkes som strukturalisternes forsøg på at kuppe sig til en sejr i matematik-krigen, i stedet for at benytte denne til en frugtbar dialog med ligeværdige parter.

Først forsøgte strukturalisterne at løse matematik-krisen gennem talemåden "ansvar for egen læring". Eleverne tog denne talemåde alvorligt og vendte ryggen til "meta-matik"-undervisningens meningstomme selvreference (en funktion er et eksempel på en mængderelation: bublibub er et eksempel på bablibab). Nu søges lærerne disciplineret og umyndiggjort ved at konstruere dem som inkompetente med deraf følgende behov for kompetenceudvikling gennem massiv efteruddannelse.

Ved at udelade kompetencen "at eksperimentere" viser KOM-rapporten, at den kun respekterer videnskaben, og hverken videnskabelsen eller det videnskabende. Samt at den ikke respekterer den måde hvorpå unge og især børn tilegner sig viden gennem selvaktivitet og læring. Ved at definere kompetence som indsigtsbaseret forudsætter KOM-rapporten, at matematikken allerede er lært, hvorefter resten af tiden så kan bruges på at anvende matematikken, ikke på omverdenen, men på sig selv gennem otte interne kompetencer til udøvelse af matematikfaglighed. Herved bliver KOM-matematikken en "katolsk" matematik med otte sakramenter, gennem hvilken mødet med videnskaben kan finde sted. Heroverfor står så KOMMOD-rapportens "protestantiske" matematik, der betoner vigtigheden af det direkte møde mellem individet og det videnskabende (mangfoldigheden) og dennes to sakramenter, tælle og regne. Og vigtigheden af, at sproglig kompetence går forud for grammatisk kompetence. Også ved kvantitativ kompetence kommer talsprog før talsprogets grammatik, matematik. Og som ved talesproget forbliver grammatik en tavs kompetence for de fleste.

Skal matematik-krigen afsluttes med et KOM-kup, eller skal den bilægges gennem demokratisk forhandling med MOD-opfattelser? Valget er dit, og med KOMMOD-rapporten får du mulighed for at validere argumenterne, ikke oppe fra den politiske korrekthed, men nede fra matematikkens historiske rødder. Held og lykke.

Mængdebaseret meta-matik - eller mangfoldighedsbaseret mate-matik: Dannelsesmødet med videnskaben – eller med det videnskabende

<table>
<tr><th>1-2</th><th>3-4</th><th>5-6</th><th>6-7</th><th>8-9</th></tr>
<tr>
<td>MÆNGDER forenes:
addition

2 + 3 = 5
47 + 85 = 135
82 - 65 = 17

PROBLEM:
PLUS er falsk abstraktion:
2 m + 3 cm = 203 cm
2 uger + 3 dage = 17 dage
2 C + 3 D = 23 D
3 sten = sten + sten + sten</td>
<td>MÆNGDER gentages:
multiplikation

2 · 3 = 6
7 · 85 = 595
372/7 = 53 1/7
Byen: Stakke & omstakke
T = 653 + 289 = ?
653 = 6·C & 5·D & 3·1
279 = 2·C & 8·D & 9·1
T = 8·C & 13·D & 12·1
T = 8·C & (13+1)·D & (12-10)·1
T = (8+1)·C & (14-10)·D & 2·1
T = 9·C & 4·D & 2·1 = 942</td>
<td>MÆNGDER opdeles:
brøker

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=?$
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$

PROBLEM:
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{(1+2)}{(2+3)}=\frac{3}{5}$ hvis
1 cola blandt to flasker plus
2 cola blandt tre flasker er
(1+2) cola blandt (2+3) fl.</td>
<td>løsnings-MÆNGDER:
åbne udsagn (ligninger)
2 + 3·x = 8 | 3·x = 6
(2+3·x)-2=8-2 | (3·x)/3=6/3
(3·x+2)-2 = 6 | (x·3)/3 = 2
3·x+(2-2) = 6 | x·(3/3) = 2
3·x + 0 = 6 | x·1 =2
L = {x∈ R | 2+3·x=8} = {2}

PROBLEM:
Vægtskåls-metaforen skjuler regneprocessen, og skaber mange fejlmuligheder:
2 + 3·x = 8, dvs. 5·x = 8</td>
<td>MÆNGDER forbindes:
funktioner
Funktion: et eksempel på en relation mellem to mængder, hvorom der gælder at ...
eks. f(x) = 2 + 3x
funktionens værdi og graf

PROBLEM:
Funktionsbegrebet opstod efter differentialregning! Syntaksfejl ved at sammenblande sprog og metasprog: Funktionens værdi svarer til udsagnsordets slips.</td>
</tr>
<tr>
<td>Landet: Bundte&ombundte
GANGE er sand abstraktion:
3 sten = 3 gange sten =3·sten
2·3·dage = 6·dage
2·m·3·cm=6·mcm = 600·cm^2
Bundtning og ombundtning:
Total = 6 1’ere = ? 2’ere
Svar: 6·1 = 6 = 6/2·2 = 3·2
Ombundtnings-regel: T = T/b·b
6/2: Optælling i 2’ere
6·2: Optælling af 2’ere
Totalen findes ved tælling eller regning: Ombundtning (division)
Gangning ombundter i tiere:
T = 8·3 = 24 = 2·D & 4·1
Gangning er division!
Max-højde 3:
T = 8 3’ere = overlæs!
T = 8·3 = 2·3^2 & 2·3
Ubundtede kan også bundtes i delbundter, f.eks. til 5’ere:
T = 8·3 = 24/5·5 = 4·5&4·1 = 4·5 & 4/5·5= (4 4/5)·5</td>
<td><u>Omstaknings-regel: T = T–b+b</u>
T = 654 - 278 = ?
653 = 6·C & 5·D & 4·1
278 = 2·C & 7·D & 8·1
T = 4·C & -2·D & -4·1
= (4-1)·C & (-2+10)·D & -4·1
= 3·C & (8-1)·D & (-4+10)·1
= 3·C & 7·D & 6·1 = 376

T = 7·653 = ?
T = 7·(6·C & 5·D & 3·1)
= 42·C & 35·D & 21·1
= 42·C & (35+2)·D & (21-20)·1
= (42+3)·C & (37-30)·D & 1·1
= 45·C & 7·D & 1·1 = 4571

T = 653/7 = ?
T = 6/7·C & 5/5·D & 3/7
= 65/7·D & 3/7
= (65-2)/7·D & (20+3)/7
= 9·D & 23/7
= 9·D & 3 2/7 = 93 2/7
(dobbelt bogholderi)</td>
<td>Byen: Vægtet gennemsnit
T = $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 3 = 3 = \frac{3}{5}\cdot 5$
eller
T = $\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{2}{3}\cdot 3 = 4 = \frac{4}{7}\cdot 7$
dvs. mange forskellige svar til
spørgsmålet $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=?$
men ALDRIG større end 1!
Handelsregning
5 kg koster 60 kr, 3 kg koster ? kr
ombundt kr | ombundt kg
kr = kr/kg·kg | 3kg = 3/5·5kg
= 60/5·3 | = 3/5·60kr
= 36 | = 36 kr
Procentregning 1
• 8 har 2, 100 har ?
100 = 100/8·8 har 100/8·2 = 25
• 100 har 25, 8 har ?
8 = 8/100·100 har 8/100·25 = 2
• 100 har 25, ? har 2
2 = 2/25·25 haves af 2/25·100 = 8</td>
<td>Slot & Kloster: Ind- & afkodning
Kodning: 2+(3·5)=17->2+(3·x)=T
Afkodning (ligningsløsning):
Omstakning fra 8-stak til 2-stak:
2 + (3·x) = 8 = 8–2+2
3·x = 8-2 = 6
Ombundtning fra 1’er til 3’er:
3·x = 6 = 6/3·3
x = 6/3 = 2
Frem- og tilbageregning:
Overflyt med modsat regnetegn
<u>frem</u> <u>tilbage</u>
2 + 3·x = 8
+2 ↑↓ -2
3·x = 8 - 2 = 6
·3 ↑↓ /3
x = 6/3 = 2
Procentregning 2
• 25% af 8 er ?
0.25 · 8 = x
• 25% af ? er 2
0.25 · x = 2, så x = 2/0.25 = 8
• ?% af 8 er 2
x · 8 = 2, så x = 2/8 = 0.25 = 25%</td>
<td>Byen: Handel og skat
Per-tal: Skat, told, kurser, renter, fortjeneste, tab, værdipapirer.
Forening af per-tal: 3 kg á 4 $/kg + 5 kg á 6 $/kg giver 8 kg á ? $/kg
Geometri: Areal og rumfang af flade og rumlige former. Retvinklede trekanter: Pytagoras, sinus, cosinus og tangens.
Lineær funktion, lineær vækst eller PLUS-vækst:
T = b +a+a+a+... = b + a·n
En funktion er et navn for et regnestykke med et variabelt tal , f.eks. T = 2 + 3x. (Euler 1748)
Regnestykker giver faste tal, og funktioner giver variable tal.
Funktionens variation kan vises i tabeller og på kurver.
Kroen: Omfordeling gennem spil
Gevinst på tips, lotto, roulette mm
Statistik over gevinstgange
Risiko=Konsekvens·sandsynligh.</td>
</tr>
</table>

10	11	12
Mængdelære Funktionsteori: Definitions- og værdimængde. Algebraiske funktioner: Polynomier og polynombrøker. Første- og andengradspolynomier. Polynomiers division. Trigonometri. Analytisk geometri.	Funktionsteori: Omvendt og sammensat funktion. Ikke-algebraiske funktioner: Trigonometriske funktioner. Logaritme- & eksponentialfunktioner som homomorfier: $f(x*y) = f(x)\#f(y)$ Stokastiske funktioner. Differentialregning.	Vektorrum. Integralregning. Enkle differentialligninger.
Renæssancen: Konstante per-tal Tal som mange-bundter (polynomier): $T = 2345 = 2\cdot B^3 + 3\cdot B^2 + 4\cdot B + 5\cdot 1$ Tilbage-regning ved potenser: $B^4 = 81$ $4^n = 1024$ $B = \sqrt[4]{81}$ $n = \log 1024/\log 4$ Enkeltrente r, samlet rente R, rentes-rente RR $(1+r)^n - 1 =$ R $= n\cdot r + RR$ Vækst med konstant per-tal og procent-tal: x:+1 -> T:+a lineær vækst $T = b + a\cdot x$ x:+1 -> T:+r% eksponentiel vækst $T = b\cdot(1+r)^x$ x:+1% -> T:+r% potens vækst $T = b \cdot x^r$ x:+1 -> T:+r%+a opsparing $T = a\cdot R/r$ Vækst med uforudsigelig (stokastisk) variation $\Delta T = ?$ $T = MID \pm 2\cdot SPR$ Forening af procent-tal: 300 á 4% og 500 á 6% er 800 á ?%. Vækstprocentregning: $T = a\cdot b$: $\Delta T/T \approx \Delta a/a + \Delta b/b$ $T = a/b$: $\Delta T/T \approx \Delta a/a - \Delta b/b$ Trigonometri: SIN & COS: de korte sider i procent af den lange. TAN: den ene korte side i procent af den anden.	**Industrien: Variable per-tal** Koordinatgeometri: Regning på tegning. Kurvetilpasning med polynomier: $T = A + B\cdot x + C\cdot x^2 + D\cdot x^3$ (eller f(x): $A+Bx+C\cdot x^2$) A: niveau, B: stigning, C: krumning, D: modkrumning Vækst med variabel, forudsigelig tilvækst: Differentialregning: $dT = dT/dx\cdot dx = T'\cdot dx$ Det ikke-lineære er lokalt lineær: $(1+r)^n \approx 1+ n\cdot r$ ($=1+n\cdot r+RR$: ved små renter kan rentes-renten negligeres) $T = x^n$: $dT/T = n\cdot dx/x$, $dT/dx = n\cdot T/x = n\cdot x^{(n-1)}$ Optimeringsopgaver fra teknik og økonomi. Integralregning: $\Delta T = T2 - T1 = \int dT = \int f\cdot dx$, Samlet tilvækst = sluttal–starttal = summen af enkelt-tilvæksterne, *uanset antal enkelt-tilvækster!* Integration sker ved omskrivning til tilvækstform: Da $6x^2+8x = d/dx(2x^3+4x^2) = d/dx(T)$ så er $\int (6x^2+8x)dx$ $= \int d(2x^3+4x^2)$ $= \int dT$ $= \Delta T = T2-T1$ Kumuleringsopgaver fra teknik og økonomi.	**Hovedværker i den kvantitative litteratur:** Geometri, Handel, Økonomi, Fysik, Biologi. De tre genrer for kvantitativ litteratur: - Fakta eller da-så beregninger kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige: Da prisen er 4 kr/kg, så koster 6 kg $6\cdot 4 = 24$ kr. - Fiktion eller hvis-så beregninger kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige: Hvis indkomsten er 4 mio$/år, så vil 6 års indkomst være $6\cdot 4 = 24$ mio$. - Fidus eller hvad-så beregninger kvantificerer det ikke kvantificerbare: Hvis konsekvensen "brækket ben" K sættes til 2 mio$, og hvis sandsynligheden S sættes til 30%, så vil risikoen R være $R = K\cdot S = 2\cdot 0.3 = 0.6$ mio$. De tre handlemuligheder: Fakta kontrolberegnes, fiktion scenarieberegnes, fidus henvises til kvalitativ behandling. Vækstligninger løst ved numerisk integration. Funktioner af to variable. Differentiation og integration. Optimering og kumulering. Vektorregning inden for handel og inden for bevægelse på flade og i rum.