S1

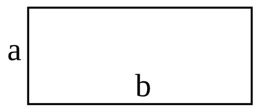
Stakke i rum, geometri

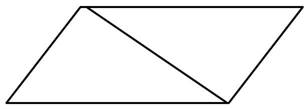
C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

En stak udgør en rumlig form, der kan udforskes, først konkret gennem flytning, siden abstrakt gennem beregning.

1.1 Areal, flademål





En a*b stak (et rektangel) kan ombundtes til (a*b) 1ere, og har derfor flademålet eller arealet T = a*b = højde*grundlinie

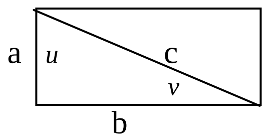
I en stak er a drejet ¼ omgang (90 grader) i forhold til b.

Ved at flytte en trekant kan en skæv stak (et parallelogram) ændres til en normal stak med arealet T = højde*grundlinie.

En trekant udgør halvdelen af en skæv stak, og har derfor arealet T = ½ * højde*grundlinie.

Læs videre i kapitel GE5 og GE11.

1.2 Diagonal-vinklen



Tegn diagonalen c i en a*b stak.

Ombundt (optæl) a i b'er: a = a/b*b = tanA*b
Ombundt (optæl) a i c'er: a = a/c*c = sinA*c
Ombundt (optæl) b i c'er: a = b/c*c = cosA*c

Bestem den ene vinkel v, dels ved måling, dels ved tilbageregning med ligningerne

tan v = a/b (v = (tan-1)(a/b))
sin v = a/c (v = (sin-1)(a/c))
cos v = b/c (v = (cos-1)(b/c))

Bestem den anden vinkel u, dels ved måling, dels af ligningen

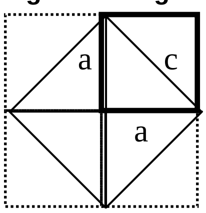
tan u = b/a (u = (tan-1)(b/a)).
sin u = b/c (v = (sin-1)(b/c))
cos u = a/c (v = (cos-1)(a/c))

Bevis og eftervis og bevis følgende regler:

u+v = 90 tan v = (sin v)/(cos v) (sin v)^2 + (cos v)^2 = 1

Læs videre i kapitel GE3.

1.3 Diagonal-længden, de 3 Pythagoras'er



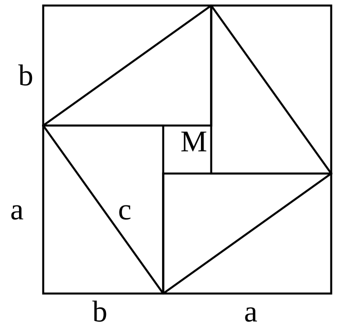
Mini-Pythagoras:

Tegn diagonalen c i en a*a stak. Drej stakken om diagonalens endepunkter, så der dannes en c*c stak.

Bevis mini-Pythagoras:

a^2 + a^2 = c^2

Midi-Pythagoras:



Tegn diagonalen c på 4 ark A4-papir (en a*b stak). Anbring de 4 ark som vist, så der dannes en (a+b)*(a+b) stak samt en c*c stak.

Der findes mange beviser for Pythagoras' læresætning:

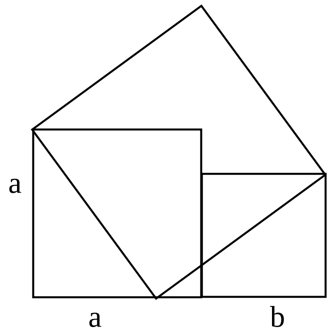
a^2 + b^2 = c^2

Flyttebevis:

Flyt først det der ligger uden for c*c stakken, dvs. 4*½ ark = 2 ark.

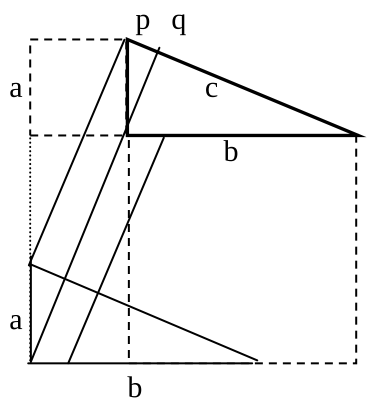
Flyt i stedet de to øverste ark. Tilbage er da a^2+b^2

Dvs. a^2 + b^2 = c^2



Regnebevis1:

c^2 = M + 4*½*a*b
= (b-a)^2 + 2*a*b
= a^2 + b^2 - 2*a*b + 2*a*b
= a^2 + b^2



Vridebevis:

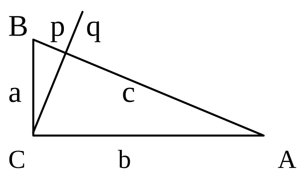
Kvadratet a^2 vrides to gange så højden og arealet bevares.

Først drejes de to vandrette sider, dernæst de to lodrette, så a^2 bliver, først til a^2, dernæst til p*c

Kvadratet b^2 vrides to gange så højden og arealet bevares.

Først drejes de to lodrette sider, dernæst de to vandrette, så b^2 bliver, først til b^2, dernæst til q*c

Dvs. a^2 + b^2 = p*c + q*c = (p + q)*c = c*c = c^2



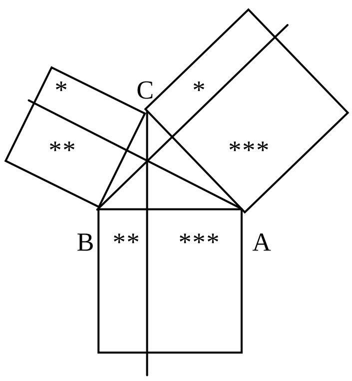
Regnebevis2:

Højden fra C deler den retvinklede trekant i to retvinklede trekanter. A og B's cosinustal kan nu beregnes både i den store og den lille trekant:

Cos A = b/c = q/b, dvs. b^2=c*q og Cos B = a/c = p/a, dvs. a^2=c*p

Dvs. a^2 + b^2 = c*p+c*q = c*(p+q) = c*c = c^2

Maxi-Pythagoras:



Også ved ikke-retvinklede trekanter kan vi tegne de ydre kvadrater. Disse opdeles af højderne i to stykker hver, som er parvis lige store. Dette kan udtrykkes i cosinus-relationerne:

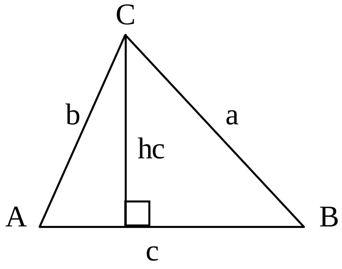
c^2 = a^2 + b^2 – 2*a*b*cosC

b^2 = a^2 + c^2 – 2*a*c*cosB

a^2 = b^2 + c^2 – 2*b*c*cosA

Læs mere i kapitel GE8 og GE9.

1.4 Sinus-relationerne



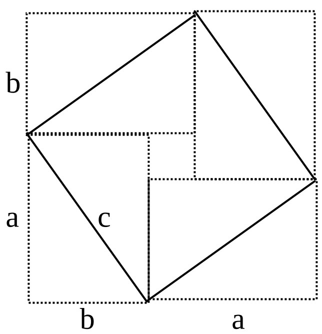
Sinus-relationerne fremkommer af højderne:

hc: a*sinB = b*sinA, dvs. a/sinA = b/sinB

hb: a*sinC = c*sinA, dvs. a/sinA = c/sinC

ha: b*sinC = c*sinB, dvs. b/sinB = c/sinC

1.5 Indbyrdes vinkelrette linier



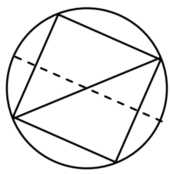
Indbyrdes vinkelrette (ortogonale) diagonaler

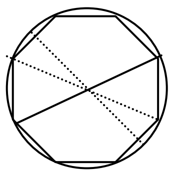
Da de fire diagonaler har hældningstallene(stigningstallene) hhv. –a/b og b/a, gælder:

To linier står vinkelret på hinanden hvis deres hældningstal er indbyrdes reciprokke og har modsat fortegn:

Linie l ⊥ linie m : hældning for l * hældning for m = -1

1.6 Cirklens omkreds og areal





En regulær firkant (et kvadrat) indpakkes i en cirkel med radius 1.

Vis at længden af siden (korden) er k4 = 2* sin(180/4).

Vis at firkantens omkreds er K4 = 4 * 2 sin(180/4).

Vis at firkantens areal er A4 = 4 * sin(180/4) * cos(180/4).

Firkanten forvandles til en regulær ottekant ved at sidernes midtpunkter trækkes ud på cirklen.

Vis at længden af siden (korden) er k8 = 2* sin(180/8).

Vis at ottekantens omkreds er K8 = 8 * 2 * sin(180/8).

Vis at ottekantens areal er A8 = 8 * sin (180/4) * cos(180/4).

Ved at forsætte får vi følgende tilnærmelsesligninger

Cirklens omkreds ≈ Kn = n * 2 * sin(180/n).

Cirklens areal ≈ An = n * sin (180/n) * cos(180/n).

For n = 1000 fås:

Cirklens omkreds ≈ 1000 * 2 * sin(180/1000) = 6,28317

Cirklens areal ≈ 1000*sin (180/1000)*cos(180/1000) = 3,14157

Vi ser her at forholdet mellem cirklens omkreds og diameter kan udtrykkes ved tallet pi π = 3,141592654, samt at pi kan beregnes som en grænseværdi (en række stadig mere nøjagtige cirkaværdier)

n*sin(180/n) -> π for n -> ∞, eller

$\lim_{n \to \infty} (n \cdot \sin(180/n)) = \pi$, hvor lim betyder grænseværdi.

1.7 Dimensioner
Det fysiske rum har 3 dimensioner: Ud, Op og Hen.

Et liniestykke (en linie) har 1 dimension, og dens punkter kan derfor beskrives ved et tal, ud-tallet x.

En stak (en plan) har 2 dimensioner, og dens punkter kan derfor beskrives ved to tal, ud-tallet x og op-tallet y.

En kasse (et rum) har 3 dimensioner, og dets punkter kan derfor beskrives ved 3 tal, ud-tallet x, op-tallet y og hen-tallet z.

1.8 Rumlige figurer
Kasse. En 3*4 stak fremkommer ved at stakke 3 ens 4bundter. Tallet 3*4 kaldes også stakkens fladetal, dækningstal eller areal A = højde*grundlinie

En 3*4*5 kasse fremkommer ved at stakke 3 ens 4*5stakke. Tallet 3*4*5 kaldes kassens rumfang eller volumen V = højde*grundflade

Forskydes bundterne i en stak, fremkommer der et trappe-parallelogram med samme areal.

Forskydes stakkene i en kasse, fremkommer der et trappe-parallelepipidum med samme rumfang.

Cylinder. Stakkes n cirkelskiver med fladeareal A fås en cylinder med rumfang V = n*flade = højde*flade.
(Et præcis bevis fås ved at integrere omdrejningslegemet frembragt af kurven y = r, se senere).

Prisme. Stakkes n p-kanter med fladeareal A fås et prisme med rumfang V = n*flade = højde*flade.

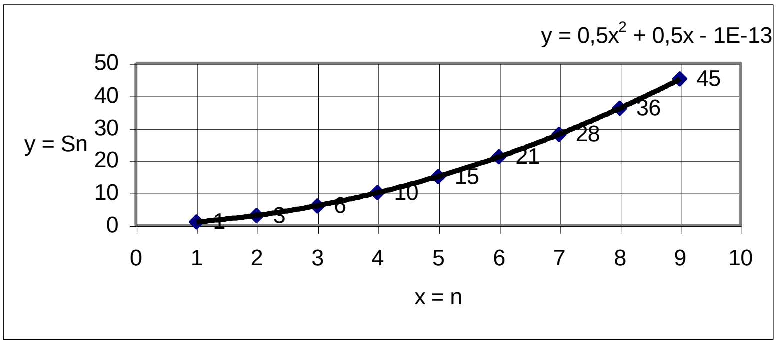
Flad pyramide. Formindskes bundterne i en stak fremkommer en flad pyramide, en trekant:

S1=1, S2=1+2=3, S3=1+2+3=6, S4=1+2+3+4=10, S5=1+2+3+4+5=15

Er der et mønster? Vi prøver selv, og kan måske se, at S5 = 15 = ½*30 = ½*(5^2+5).

Eller vi beder EXCEL om en kurve og en tendenslinie:

	1	
n	n	Sn
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45



dobbeltklik og rediger

Hypotese: Sn=½*(n^2+n)

Test4: S4=½*(4^2+4)=10 OK, Test6: S6=½*(6^2+6)=21 OK, osv.

Alment bevis I:
Sn = 1 + 2 + 3 + ... +(n-2) + (n-1) + n
Sn = n +(n-1) +(n-2) + ... + 3 + 2 + 1
2*Sn = (n+1)+(n+1)+(n+1)+ …+(n+1) +(n+1) +(n+1) = n*(n+1) = n^2 + n
Sn = ½*(n^2+n)

Alment bevis II (induktionsbevis):

1) vis det gælder i bunden for n=1.
2) vis at det gælder for den næste, dvs. hvis det gælder for n gælder det også for n+1 (induktion)

Bunden: S1 = ½*(1^2+1) = ½*2 = 1 OK

Næste: Givet at Sn = ½*(n^2+n). Bevis at S(n+1) = ½*((n+1)^2+(n+1))

Beviskasse:

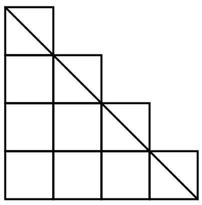
S(n+1)	=?	½*((n+1)^2+(n+1))
Sn+ (n+1) ½*(n^2+n) + n + 1 ½*n^2 + ½*n + n + 1 ½*n^2 + 3/2 *n + 1	=? =? =!	½*(n^2 + 2*n + 1 + n + 1) ½*(n^2 + 3*n + 2) ½*n^2 + 3/2 *n + 1

Induktionen medfører da, at HVIS formlen er rigtig for n SÅ er den også rigtig for n+1

Bunden medfører da, at DA formlen er rigtig for n=1 SÅ er den også rigtig for 1+1=2. Og DA formlen er rigtig for n=2 SÅ er den også rigtig for 2+1=3. Og DA formlen er rigtig for n=3 SÅ er den også rigtig for 3+1=4. Osv.

Dvs. formlen er rigtig for alle n. Thi antag at den ikke gælder for n = k. Modstrid, fordi k induktioner vil vise at den gælder for n = k. (indirekte bevis: Vis at en antagelse fører til modstrid).

Alment bevis III, geometrisk bevis + substitutionsbevis:



Af tegningen ses, at

Areal af 4*4 trappe = areal af halv 4*4stak + n * arealet af en halv 1*1stak = ½*4^2 + ½*4*1

Substitueres 7 for 4 fås: Areal af 7*7 trappe = ½*7^2 + ½*7*1

Substitueres n for 4 fås: Areal af n* trappe = ½*n^2 + ½*n*1 = ½*(n^2 + n)

Hvis n er stor (10^6) har kun n^2 leddet betydning: A = ½*10^6^2 + ½*10^6 ≈ ½*10^12.

En trappe med mange trin er næsten en trekant: A ≈ ½*n^2 = ½*n*n = ½*højde*grundlinie.

Arealer kan også beregnes som integraler, som netop er arealer under kurver, her kurven y = x:

$$A = \int_0^n x \, dx = \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_0^n = \tfrac{1}{2} n^2$$

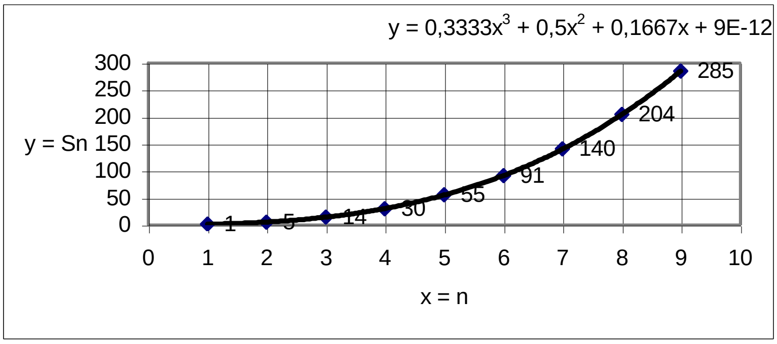
Rumlig pyramide. Formindskes stakkene i en kasse fremkommer en rumlig pyramide

S1=1, S2=1+2^2=5, S3=1+2^2+3^2=14, S4=1+2^2+3^2+4^2=30, S5=1+2^2+3^2+4^2+5^2=55

Er der et mønster? Vi prøver selv, og kan måske se, at S5 = 55 = 1/3*5^3 + ½*5^2 + 1/6*5

Eller vi beder EXCEL om en kurve og en tendenslinie:

	2	
n	n	Sn
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	285



dobbeltklik og rediger

Hypotese: Sn= 1/3*n^3 + ½*n^2 + 1/6*n

Test4: <udfør selv , Test6: <udfør selv> , osv.

Alment bevis II (induktionsbevis): 1) vis det gælder i bunden for n=1. 2) vis at det gælder for den næste, dvs. hvis det gælder for n gælder det også for n+1 (induktion)

Bunden: S1 = 1/3*1^3 + ½*1^2 + 1/6*1 = 1/3 + ½ + 1/6 = 1

Næste: Givet at Sn = 1/3*n^3 + ½*n^2 + 1/6*n.

Bevis at S(n+1) = 1/3*(n+1)^3 + ½*(n+1)^2 + 1/6*(n+1)

Beviskasse: <udfør selv>

S(n+1)	= ?	1/3*(n+1)^3 + ½*(n+1)^2 + 1/6*(n+1)

Hvis n er stor (10^6) har kun n^3 leddet betydning: V = 1/3*10^6^3 + ½*10^6^2+1/6*10^6 ≈ 1/3*10^18.

En rumlig trappe med mange trin er næsten en pyramide: V ≈ 1/3*n^3 = 1/3*n*n^2 = 1/3*højde*grundflade.

Rumlig kegle. En kegle fremkommer ved at stakke cirkelskiver med aftagende radius.

K1=π*1=π*S1, K2= π*1+ π*2^2= π*K2, osv. Dvs. Kn = π*Sn

Et volumen kan beregnes som et integrale af en omdrejningskurve, her kurven y = x:

$$V = \pi * \int_0^n x^2\, dx = \pi*[1/3*x^3]_0^n = \pi*1/3*n^3 = 1/3*\ n * \pi*n^2 = 1/3*\text{ højde } * \text{ grundflade}$$

Rumlig kugle. En kugle fremkommer ved omdrejning af en halv cirkelbue:

Cirklen med radius r har ligningen x^2 + y2 = r^2, eller y2 = r^2 - x^2

$$V = 2*\pi*\int_0^r y^2\, dx = 2*\pi*\int_0^r (r^2-x^2)\, dx = 2*\pi*[(r^2*x-1/3*x^3)]_0^r = 2*\pi*[(r^2*r-1/3*r^3) - 0]$$

= 2*π*(r^3-1/3*r^3) = 2*π*2/3*r^3 = π*4/3*r^3 = 2*(2*(1/3*r* (π*r^2))) = 2*(2*(1/3*r* grundflade))

= 2*(2*(kegle)) = 2*dobbelt-kegle

1.9 Overførsel af rumlige figurer til planen

Anbring en terning, så den hviler på 4-siden. Terningen kan ses på tre forskellige måder: fra 1-siden (frontsyn), fra 2-siden (sidesyn) eller fra 3-siden (topsyn). Betragtes terningen nedefra til venstre kan vi se 1-, 4- og 5-siden samtidig (isometrisk skævsyn).

Betragt en kasse fra frontsyn. Tegnes en identisk kasse og rykkes denne en smule nedad til venstre, ses kassen nu i skævsyn. Vi har da tegnet en rumlig figur i planen ved at bevare afstandene (iso-metri, samme-mål). I virkeligheden bør målet aftage da kassens bagside er længere væk. Tages hensyn til dette fås en perspektivtegning. I en perspektivtegning vil parallel linier i samme afstand til øjet forblive parallelle, hvorimod parallelle liner i voksende afstand fra øjet vil synes at nærme sig hinanden i et forsvindingspunkt ud for øjet.

Læs videre om rumlige figurer i kapitlerne GE12, GE13, GE14, GE16, GE17, GE18, GE19, og GE22.

1.10 Geometri nedefra

Gå vider til bilaget GE geometri nedefra.

S1 OPGAVER

Spørgsmål S11: 1) Hvordan kan vi beskrive stakkes rumlige egenskaber som areal og diagonal? Hvordan kan vi beskrive figurers rumlige egenskaber? Svar: Ved den Græske geometris 3 Pythagoras'er, mini, midi og maxi.

Svar: Ved den arabiske geometris 3 vinkel-side relationer sinA=a/c, cosA=b/c og tanA=a/b. Ved rumfangsformler, samt ved forskellige typer 2-dimensional afbildning af 3-dimensionale figurer.

S11.1 Faglige opgaver

1. Bevis mini-, midi- og maxi-Pythagoras. Vis at Pythagoras kan erstattes af bl.a. a = c*sin(cos-1(b/c)) eller a = b*tan(cos-1(b/c)). Find tilsvarende formler for b=? og c=?.

2. Bevis regel 4 og 5 i GE.5, samt regel 2 i GE.9.

3. Lav en rod-spiral ved at løse øvelse 13 i GE.21. Tip: Lav hele tiden en ny retvinklet trekant ved at gøre hypotenusen til katete og tilføj en ny katete med længden 1.

4. Vis formlerne for overflade og rumfang for en cylinder

5. Vis formlerne for overflade og rumfang for en kegle

6. Vis formlerne for overflade og rumfang for en keglestub

7. Lav selv tegningen af huset i GE.18 set fra forskellige synsvinkler og suppler med et skævsyn.

8. Find formlen for opsummerede kubiktal Sn = 1 + 2^3 + 3^3 +…+ n^3

9. Færdiggør den indlagte Excel-fil "Geometri" med rutineopgaver.

10. (Frivillig). Geometri på en kugleoverflade (se kapitel GE14). Tegn en retvinklet trekant med den rette vinkel i Nordpolen og kateter a. På en kugleoverflade hedder Pythagoras (a^2+a^2 = k*c^2). Vis at ved højderne 90, 60, 30, 0, -30, -60 har k værdierne 1, 8/9, 32/27, 2, 128/27, 200/9. Tegn en cirkel med centrum i Nordpolen. På en kugleoverflade gælder omkreds/diameter = n. Vis at ved højderne 90, 60, 30, 0, -30, -60 har n værdierne 3.14, 3, 2.60, 2, 1.30, 0.60. Hvad ved –90?

S11.2 Rutineopgaver

1. Gennemregn keglen og keglestubben på kryds og tværs så alle de indgående størrelser kan beregnes.

2. Gentag opgaven mht. pyramidestubben

S11.3 Didaktisk opgave

Projekt Afskåret terning.

Byg en hel 5*5*5 terning: Indtegn den på kvadreret papir som et kors bestående af 5 sammenstødende 5*5 kvadrater (husk flapper til sammenlimning). Hvad er overflade og rumfang af en terning? Efterprøv evt. rumfanget ved at hælde sand i.

Byg en overskåret 5*5*5 terning: Indtegn den som et kors bestående af 4 sammenstødende 5*5 kvadrater + 1 5*7 (egentlig 5√2=7.07) rektangel. To af kvadraterne skal udklippes som halve kvadrater (husk flapper til sammenlimning). Hvad er overflade og rumfang af en overskåret terning? Efterprøv evt. rumfanget ved at hælde sand i.

Byg en sammensnørret 5*5*5 terning: Indtegn den som et kors bestående af 3 sammenstødende 5*5 kvadrater + 2 5*7 (egentlig 5√2=7.07) rektangler (som er naboer). Alle figurer på nær den midterste skal udklippes som halve kvadrater(husk flapper til sammenlimning). Hvad er overflade og rumfang af en sammensnørret terning? Efterprøv evt. rumfanget ved at hælde sand i.

Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

Projekt Hypotetisk deduktiv metode.

Også i geometrien møder vi matematikfagets kerne, at kunne bestemme mangfoldighed både ved tælling og ved beregning.

Tegn 3 forskellige a*b stakke. Diagonalens længde og vinkel bestemmes ved "bagudsigelse": Først tælling (måling), så beregning. Brug regneskemaet fra fagbilag 7.7 til beregningerne.

Tegn 3 andre a*b stakke. Diagonalens længde og vinkel bestemmes ved "forudsigelse": Først beregning, så tælling (måling). Brug regneskemaet fra fagbilag 7.7 til beregningerne.

I B møder du den såkaldte "hypotetisk-deduktive" metode, som er grundlaget for al naturvidenskab, og dermed for det moderne samfund, som varede ca. 300 år, fra oplysningstiden år 1700 til det postmoderne samfund år 2000.

I korthed går den hypotetisk-deduktive metode ud på, at vi med en hypotese kan forudsige (deducere) hvad der vil ske under bestemte omstændigheder: "Hvis jeg tegner en 3*4 stak, så kan jeg ud fra hypotesen a^2+b^2=c^2 forudsige, at diagonalens længde nødvendigvis vil blive 5. Og ligeledes kan jeg ud fra hypotesen tanA = a/b forudsige, at diagonalens vinkel med vandret nødvendigvis vil blive 36.9".

Den hypotetisk-deduktive metode viser således, at visse fysiske ting er styret af over-fysiske (metafysiske) love, som er hævet over demokratiet. Der er indtil dato kun påvist tre typer metafysiske nedslag i den fysiske verden. Pythagoras viste at toner og geometriske figurer adlyder metafysiske tal-love. Newton påviste at fysisk bevægelse adlyder metafysiske tal-love.

Pythagoras forførte Platon til at påstå, at alt fysisk er styret af metafysiske love, som kun kendes af filosofferne (græsk for de bedrevidende). Kristendommen overtog platonismen ved at hævde, at kun den metafysiske Gud kender disse metafysiske love. Newton forførte det moderne universitet til at genoplive Platon, men kalde filosofferne for forskere.

Det postmoderne genopliver før-platonisterne, sofisterne (græsk for de vidende), og deres påstand om at det er vigtigt at skelne mellem videnskab og demokrati, mellem natur og vedtægt, mellem information og debat, mellem udråbstegn og spørgsmålstegn. Kort sagt skelne mellem tal og ord: En sætnings grundled kan verificere tal, men ikke ord (blyantsdilemmaet: Anbragt mellem en lineal og en ordbog kan en blyant vise sin længde men ikke sin betegnelse).

Ifølge de postmoderne sofister eller socialkonstruktivister gælder: Tal kommer af fysisk nødvendighed og afspejler naturlig korrekthed. Ord kommer af kulturel fortolkning og afspejler politisk korrekthed. Inden for tekstfortolkning kaldes postmodernisme for poststrukturalisme eller dekonstruktivisme.

Skriv et brev til din kusine, hvori du på ca. en A4 side fortæller hvordan du i B oplevede dit møde med den hypotetisk-deduktive metode.