S2

Stakke i gitre, koordinatgeometri

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

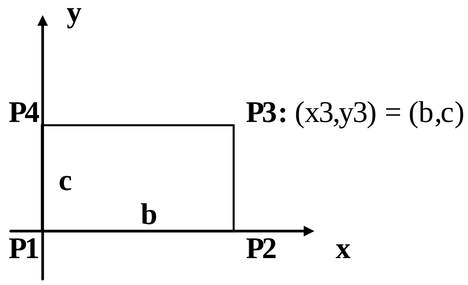
En mangfoldighed kan optegnes som en stak. En stak har fire hjørner. Det nederste venstre hjørne anvendes normalt som udgangspunkt, hvorfra der kan tælles i vandret retning (1. aksen, x-aksen) og i lodret retning (2. aksen, y-aksen). De to tal kaldes så 1. og 2. koordinaten (x1,x2) = (x,y) = (frem-tal, op-tal). De to tallinier kaldes under ét for Descartes koordinatsystem. Fordelen ved koordinat-geometri er at vi så kan regne på vor tegning.

1.1 Descartes' koordinatsystem forener regning og tegning i analytisk geometri

Punkter

En c*b stak har således fire hjørnepunkter med koordinaterne

P1(x1,y1) = (0,0)
P2(x2,y2) = (b,0)
P3(x3,y3) = (b,c)
P4(x3,y3) = (0,c)



Linier

De fire kanter har ligningerne

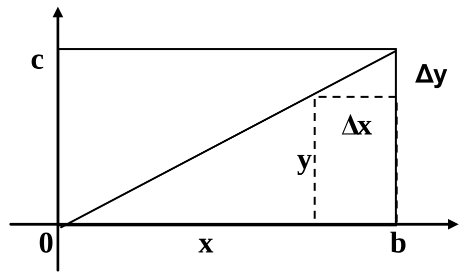
P1P2: y=0, P2P3: x=b, P3P4: y=c, P1P4: x=0

De to diagonaler har ligningerne:

P1P3: Δy = Δy/Δx*Δx
y-0 = (c-0)/(b-0)*(x-0)
y = c/b*x

eller y = tanv*x, hvor v er diagonalen vinkel med vandret.

P4P2: Δy = Δy/Δx*Δx = (0-c)/(b-0)*Δx = -c/b*Δx, eller y-c = -c/b*(x-0), eller y = -c/b*x + c



Skæringspukter. De to diagonaler har skæringspunktet S(x,y):

(x,y) = ?	y = y
y = c/b*x	c/b*x = -c/b*x + c
y = -c/b*x+c	2*c/b*x = c
	x = b/2
	y = c/b*b/2 = **c/2**
Kontrol:	_c/b*b/2 = -c/b*b/2 + c_
	_c/2 = -c/2 + c_
	_c/2 = c/2_

(x,y)=?	y = y
y = a1x+b1	a1x+b1 = a2x+b2
y = a2x+b2	x(a1-a2) = b2-b1
D = a1b2-a2b1	x = (b2-b1)/(a1-a2)
$= \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$	y = a1x+b1
	= (a1*(b2-b1)+ b1*(a1-a2))/(a1-a2)
	= (a1*b2-a1*b1+ b1*a1-b1*a2)/(a1-a2)
D: Determinant	= (a1b2 - a2b1)/(a1-a2)
	= D/(a1-a2)
a1 = c/b, b1 = 0	x = (c-0)/(c/b+c/b) = b/2
a2 = -c/b, b2 = c	y = (c/b*c-(-c/b)*0)/(c/b+c/b) = c/2

Afstande. Vandrette og lodrette afstande findes som forskellen mellem koordinaterne:

|P1P2| = |b-0| = b, |P4P1| = |0-a| = a, hvor |b| betyder den numeriske værdi af b: |±3| = 3.

Diagonalens længde kan findes ved hjælp af Pythagoras:

|P1P3|^2 = |P1P2|^2 + |P2P3|^2 = (x2-x1)^2 + (y3-y2)^2 = (b-0)^2 + (a-0)^2 = b^2 + a^2.

Punktet P3's afstand fra diagonalen P2P4 fås ved at indsætte P3's koordinater i afstandsformlen:

Afstand = |a1x+b1y+c|/√(a1^2+b1^2)

1.2 Keglesnit
Betragt en lodret kegle, hvis side hælder v grader. Snittes keglen i en vinkel u fremkommer keglesnittene (som under ét ligningen y^2 = 2x – (1-e^2)*x^2, hvor e kaldes excentriciteten)

Cirkel (u=0, e=0), ellipse (0<u<v, 0<e<1), parabel (u=v, e=1), hyperbel (u=90, e>1).

Centrum i (0,0)

Cirkel. En cirkel er de punkter P(x,y) som har konstant afstand r til et givet centrum C = P1(0,0):

x^2 + y^2 = r^2 (= IPCI^2). Cirkeltangenten gennem P(xo,yo) har ligningen xxo+yyo=r^2.

Ellipse. En ellipse er de punkter P(x,y) som har konstant afstands-sum til to givne brændpunkter B1 og B2. En ellipse har en vandret halvakse b og en lodret halvakse c:

(x/b)^2 + (y/c)^2 = 1. Ellipsetangenten gennem P(xo,yo) har ligningen xxo/(c^2) + yyo/(b^2)=1.

Hyperbel. En hyperbel er de punkter P(x,y) som har konstant afstands-differens til to givne brændpunkter B1 og B2. En hyperbel har en vandret halvakse b og en lodret halvakse c:

(x/b)^2 - (y/c)^2 = 1. Hyperbeltangenten gennem P(xo,yo) har ligningen xxo/(c^2) - yyo/(b^2)=1.

Normalt er hyperblen drejet 45 grader, og får da ligningen y = k/x.

Parabel. En parabel er de punkter P(x,y) som har samme afstand til en ledelinie og et brændpunkt B. I en parabel er parameteren p den dobbelte afstand mellem brændpunktet og ledelinien:

y = a*x^2 har parameteren 1/a. Parabeltangenten gennem P(xo,yo) har ligningen y+yo = 2*a*xo*x.

Centrum i (xo,yo)

Parallelforskydning. Vi betragter to koordinatsystemer K’ og K. K’ fremkommer ved at parallelforskyde K xo frem og yo op. Begyndelsespunktet i K’ har derfor koordinaterne (x,y) = (xo,yo) i K, og (x’,y’) = (0,0) i K’. Sammenhængen mellem koordinaterne er da: x’ = x-xo og y’ = y-yo.

Linie. En linie går gennem (x’,y’) = (0,0), og har derfor ligningen y’ = a*x’ i K’. I K har linien derfor ligningen y-yo = a*(x-xo) som kan udregnes til y = a*x + b, hvor b = yo-a*xo er liniens skæringspunkt med y-aksen.

Cirkel. Betragt en cirkel med radius r. I K’ har centrum koordinaterne (x’,y’) = (0,0), og cirklen har her ligningen x’^2+y’^2 = r^2. I K har cirklen derfor ligningen (x-xo)^2+(y-yo)^2=r^2.

Ellipse. Betragt en ellipse med halvakser b og c. I K’ har centrum koordinaterne (x’,y’) = (0,0), og ellipsen har her ligningen (x/b)^2 + (y/c)^2 = 1. I K har ellipsen derfor ligningen ((x-xo)/b)^2+((y-yo)/c)^2=1.

Parabel. Betragt en parabel, hvis toppunkt i K’ har koordinaterne (x’,y’) = (0,0), og som har ligningen y=a*x’^2. I K har parablen derfor ligningen y-yo=a*(x-xo)^2. Dette kan omformes:

y = yo + a*(x^2+xo^2-2*x*xo) = a*x^2 + (-2*a*xo)*x + (yo+a*xo^2) = a*x^2 + b*x + c

Da –2*a*xo = b, er xo = -b/(2*a).

Da yo+a*xo^2 = c, er yo = c - a*xo^2 = c – a*b^2/(4a^2) = -(b^2 – 4*a*c)/4a = -D/4a.

Heraf ses, at parablens toppunkt I K har koordinaterne (xo,yo) = (-b/(2a), -D/(4a)), hvor diskriminaten D = b^2-4*a*c.

1.3 Kurvetilpasning
Opgaven i kurvetilpasning er at tilpasse en kurves ligning til et bestemt antal punkter.

Her kommer eksempler på tilpasning af polynomier til givne punkter.

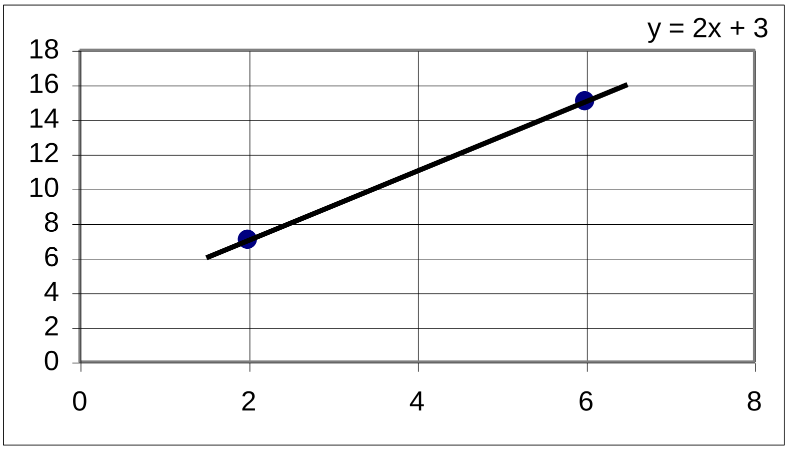
1 punkt. Gennem 1 punkt kan der gå uendelig mange linier.

2 punkter. Gennem to punkter (x1,y1) og (x2,y2) kan der gå uendelig mange parabler, men kun en linie y = b + a*x. b er begyndelses-niveau, og a er stigningstallet eller hældningstallet. a og b findes ved at løse 2 ligninger med 2 ubekendte, eller ved hjælp af funktionen ’tilføj tendenslinie’ i Excel.

b= ?, a = ?	y = b + a*x (I)	y = b + a*x (II)
(x1,y1) = (2,7) (x2,y2) = (6,15)	7 = b + a*2 7 = 15 - a*6 + a*2 a*4 = 8 a = 8/4 **a = 2** indsættes i II →	15 = b + a*6 15 - a*6 = b indsættes i I ← 15 – 2*6 = b **3 = b**

2 punkter

	x	y
Punkt 1	2	7
Punkt 2	6	15



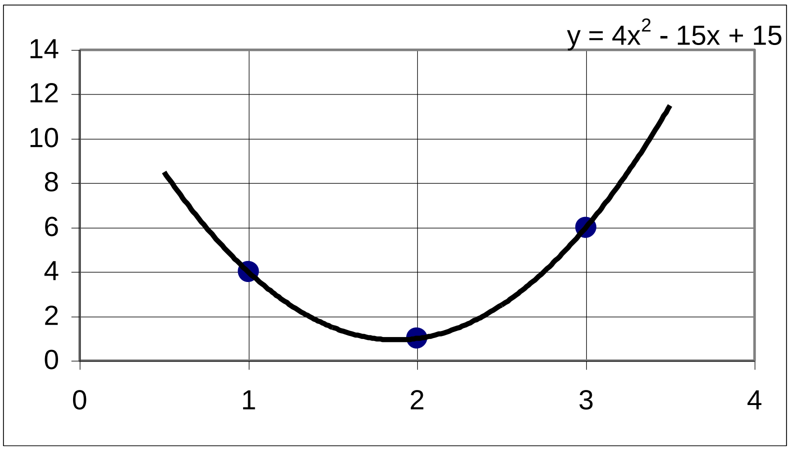
Dobbeltlik og rediger

3 punkter. Gennem tre punkter (x1,y1), (x2,y2) og (x3,y3) kan der gå uendelig mange 3.gradskurver, men kun én parabel y = a*x^2 + b*x + c. c er begyndelses-niveau, b er begyndelses-stigning, og a er krumning. a, b og c findes ved at løse 3 ligninger med 3 ubekendte, eller ved hjælp af funktionen 'tilføj tendenslinie' i Excel.

b= ?, a = ?	y = c + b*x + a*x^2 (I)	y = c + b*x + a*x^2 (II)	y = c + b*x + a*x^2 (III)
(x1,y1) = (1,6) (x2,y2) = (2,7) (x3,y3) = (4,3)	6 = c + b*1 + a*1 6 = 3 - b*4 - a*16 + b*1 + a*1 15*a = -3 - 3*b 15*a = -3 - 3*(-2 – 6*a) 15*a = -3 + 6 + 18*a - 3 = 3*a -3/3 = a **-1 = a** indsættes i II og III →→	7 = c + b*2 + a*4 7 = 3 - b*4 - a*16 + b*2 + a*4 2*b = -4 – 12*a b = (-4 – 12*a)/2 b= -2 – 6*a indsættes i I ← b= -2 – 6*(-1) **b = 4** indsættes i III →	3 = c + b*4 + a*16 3 - b*4 - a*16 = c indsættes i I og II ←← 3 - b*4 – (-1)*16 = c 19 – b*4 = c 19 - 4*4 = c **3 = c**

3 punkter

	x	y
Punkt 1	1	4
Punkt 2	2	1
Punkt 3	3	6

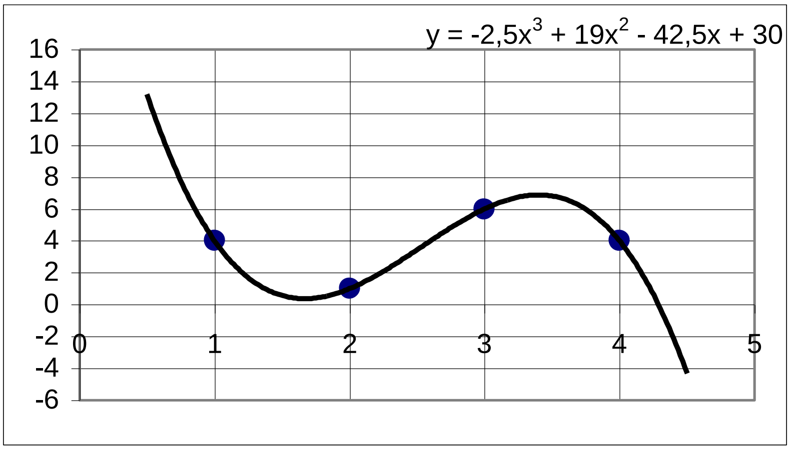


Dobbeltklik og rediger

4 punkter. Gennem fire punkter (x1,y1), (x2,y2), (x3,y3) og (x4,y4) kan der gå uendelig mange 4.gradskurver, men kun én 3.gradskurve y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d. d er begyndelses-niveau, c er begyndelses-stigning, b er begyndelses-krumning, og a er modkrumning. a, b, c og d findes ved at løse 4 ligninger med 4 ubekendte, eller ved hjælp af funktionen 'tilføj tendenslinie' i Excel.

4 punkter

	x	y
Punkt 1	1	4
Punkt 2	2	1
Punkt 3	3	6
Punkt 4	4	4



Dobbeltklik og rediger

1.4 Standardmetode til opstilling af ligningen for en ret linie

Punkt&punkt:

Find ligningen for den rette linie gennem punkterne (5,3) og (7,9)

$y = ?$	$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} * \Delta x$
$\Delta y = y - 3$ $\Delta x = x - 5$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-3}{7-5} = \frac{6}{2} = 3$	$y - 3 = 3*(x - 5)$ $y = 3*x - 15 + 3$ $y = 3*x - 12$

Punkt&hældning:

Find ligningen for den rette linie gennem punktet (5,3) med hældningen 2

$y = ?$	$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} * \Delta x$
$\Delta y = y - 3$ $\Delta x = x - 5$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$	$y - 3 = 2*(x - 5)$ $y = 2*x - 10 + 3$ $y = 2*x - 7$

2. Stakke i rum III, vektorer og matricer

I et koordinatsystem får hvert punkt tilordnet et talsæt, punktetes koordinat-par. Talsæt optræder imidlertid mange andre steder, for med indførelse af computeren kan vi nu regne på sæt af tal, vektorer, og på sæt af vektorer, matricer.

2.1 Blandingsregning, vejet gennemsnit

<u>Kg. og kr. I</u>

	kg.	kr./kg.		kr.	
15 kg. à 4 kr./kg.	15	4	=	60	= 15*4
+ 35 kg. à 6 kr./kg.	35	6	=	210	= 35*6
= 50 kg. à ? kr./kg.	50	x	=	270	= 50*x
Dvs. 4 kr./kg. + 6 kr./kg. = 5.4 kr./kg. her		5.4	=	270/50	= x

<u>Kg. og kr. II</u>

	kg.	kr./kg.		kr.	
40 kg. à 4 kr./kg.	40	4	=	160	= 40*4
+ 10 kg. à 6 kr./kg.	10	6	=	60	= 10*6
= 50 kg. à ? kr./kg.	50	x	=	220	= 50*x
Dvs. 4 kr./kg. + 6 kr./kg. = 4.4 kr./kg. her		4.4	=	220/50	= x

Vi bemærker at vi skal passe på, når vi lægger pr.tal sammen, idet 4 kr./kg. + 6 kr./kg. kan give alt mellem 4 kr./kg. og 6 kr./kg. Summen kaldes et vejet gennemsnit, hvor vægtene udgøres af de respektive kg.tal.

2.2 Vektorer

Vi kan også beskrive kg.tallene og kr/kg-tallene ved talsæt, vektorer, som kan skrives både lodret og vandret:

	kg.tallene	kr/kg-tallene	Kr.tal
I	$\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 15 & 35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 15*4 + 35*6 = 270$ $\begin{pmatrix} 15 & 35 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} = 15*4 + 35*6 = 270$
II	$\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 40 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 40*4 + 10*6 = 220$ $\begin{pmatrix} 40 & 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} = 40*4 + 10*6 = 220$

2.2.1 Vektorregning

Vektorer kan lægges sammen: $\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+40 \\ 35+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \end{pmatrix}$

Vektorer kan ganges sammen (et skalarprodukt): $\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 15*4 + 35*6 = 270$

Dette gælder uanset hvor mange tal der indgår i vektorens talsæt:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+40 \\ 35+10 \\ 10+5 \\ 12+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 15 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} = 15*40 + 35*10 + 10*5 + 12*30 = 1360$$

2.3 Tilbageregning med vektorer

Både ved tal og vektorer kan vi tale om fremad- og tilbageregning.

Eksempel.

7 kg. á x kr/kg + 5 kg. á y kr/kg = 7*x + 5*y = 29 kr

8 kg. á x kr/kg + 3 kg. á y kr/kg = 8*x + 4*y = 25 kr

Eller formuleret med vektorer idet der anvendes en blanding af vandrette og lodrette vektorer i ligninger:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7*x + 5*y = 29$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8*x + 3*y = 25$$

Vi kan forenkle denne skrivemåde ved at indføre et vektor-sæt, en matrice:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*x+5*y \\ 8*x+3*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Løsning af en vektorligning

En vektorligning kan have udseendet $\begin{pmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1*x+a2*y \\ b1*x+b2*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \end{pmatrix}$

En vektorligning kan løses på to måder, traditionelt i et regneskema eller ved indførelse af en matrices determinant som:

Determinant $\begin{pmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix} = a1*b2 – a2*b1$

a1*x + a2*y = c1 (I)		b1*x + b2*y = c2 (II)
a1*x = c1 - a2*y a1*b1*x = c1*b1 - a2*b1*y →	a1*c2 – a1*b2*y = c1*b1 - a2*b1*y a1*c2 - b1*c1 = a1*b2*y - a2*b1*y a1*c2 - b1*c1 = (a1*b2 - a2*b1)*y $\frac{a1*c2 - b1*c1}{a1*b2 - a2*b1} = y$ $\frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ b1 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}} = y$	b1*x = c2 - b2*y a1*b1*x = a1*c2 – a1*b2*y ←
a2*y = c1 - a1*x a2*b2*y = c1*b2 - a1*b2*x →	c1*b2 - a1*b2*x = a2*c2 - a2*b1*x c1*b2 - a2*c2 = a1*b2*x - a2*b1*x c1*b2 - a2*c2 = (a1*b2 - a2*b1)*x $\frac{c1*b2 - a2*c2}{a1*b2 - a2*b1} = x$ $\frac{\begin{vmatrix} c1 & a2 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}} = x$	b2*y = c2 - b1*x a2*b2*y = a2*c2 – a2*b1*x ←

Vi kan nu løse vektorligningen ved hjælp af determinantmetoden, idet determinanterne beregnes i Excel:

Eksempel 1. Løs vektorligningen $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*x+5*y \\ 8*x+3*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix}$

Dette svarer til at løse 2 ligninger med 2 ubekendte: 7*x + 5*y = 29 og 8*x + 3*y = 25

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c1 & a2 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 5 \\ 25 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-38}{-19} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ b1 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 29 \\ 8 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-57}{-19} = 3$$

Determinant	Matrice		
-57	7	29	
	8	25	
-38	3	5	6
	2	4	3
	6	4	2

Dobbeltklik og rediger

Eksempel 2. Løs vektorligningen som fremkommer ved at der indgår tre sorter i en theblanding:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*x+5*y+6*z \\ 2*x+4*y+3*z \\ 6*x+4*y+2*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Dette svarer til at løse 3 ligninger med 3 ubekendte: 3*x + 5*y + 6*z = 52 og 2*x + 4*y + 3*z = 31 og 6*x + 4*y + 2*z = 42.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 52 & 5 & 6 \\ 31 & 4 & 3 \\ 42 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-152}{-38} = 4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 52 & 6 \\ 2 & 31 & 3 \\ 6 & 42 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-76}{-38} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 52 \\ 2 & 4 & 31 \\ 6 & 4 & 42 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-190}{-38} = 5$$

2.4 Koordinatgeometri med vektorer

Eksempel. En trekant har sine vinkelspidser i A(2,1), B(6,3) og C (4,6). Beregn trekantens stykker.

Metode 1. Indramning og bortskæring: Trekanten fremkommer ved at bortskære tre retvinklede trekanter fra et rektangel. Opgaven kan så løses ved regning på retvinklede trekanter, trigonometri.

Metode 2. Trekantens vektorer opstilles:

AB = (6-2, 3-1) = (4,2), BC = (4-6, 6-3) = (-2,3), og AC = (4-2, 6-1) = (2,5).

Herefter kan trekanten gennemregnes ved hjælp af vektorregninges formler.

Sidelængde AB: |AB| = √(AB*AB) = √(4,2)*(4,2) = √(4*4 + 2*2) = √20

Vinkel A: AB*AC = |AB|*|AC|*cosA

Arealet: Areal = ½* |AB*ÂB| = ½* determinant(AB, AC), hvor ÂB er AB's tværvektor.

2.5 Transformationer med vektorer

Vektorer og matricer kan bruges til at udføre transformationer i et koordinatsystem.

2.5.1 Forskydning

En forskydning kan beskrives ved hjælp af en forskydningsvektor $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$.

Vektoren $\begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ forskydes $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ til vektoren med

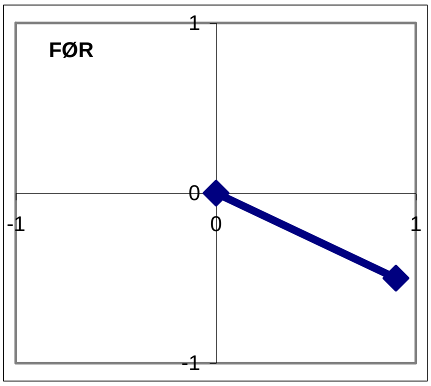
begyndelsesespunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og

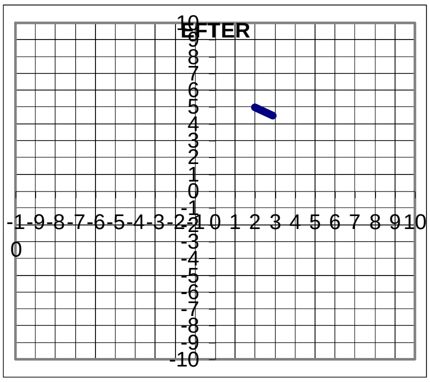
endepunkt i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

Flytning *Indtast Δx og Δy, samt punkt 2 før*

Δx	2
Δy	5

		Punkt 1	Punkt 2
Før	x	*0*	*0,9*
	y	*0*	*-0,5*
Efter	x	*2*	*2,9*
	y	*5*	*4,5*





Dobbeltklik og rediger

2.5.2 Drejning

En vektor kan drejes v grader om sit startpunkt ved hjælp af en drejningsmatrix: $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$

Punktet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ drejes 78 grader til vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 78 & -\sin 78 \\ \sin 78 & \cos 78 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 78 \\ \sin 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.208 \\ 0.978 \end{pmatrix}$$

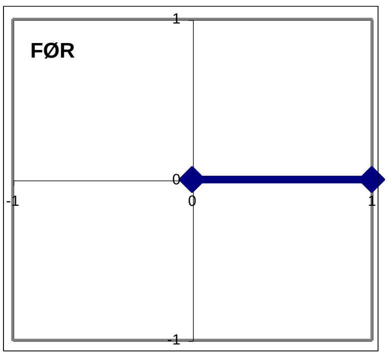
Drejning

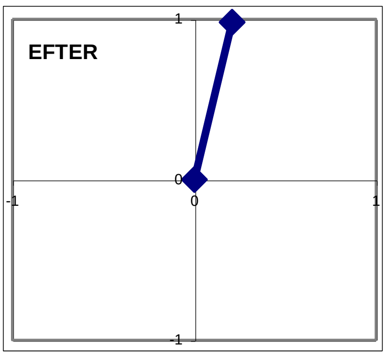
Vinkel: 78

Drejningsmatrix

0,208	**-0,978**
0,978	**0,208**

		Punkt 1	Punkt 2
Før	x	**0**	**1**
	y	**0**	**0**
Efter	x	**0**	**0,208**
	y	**0**	**0,978**





S2 OPGAVER
Spørgsmål: Hvordan kan vi regne os frem til punkter og linier? Svaret er indførelse af koordinatsystemet: Hvis Po(x,y) = (3,4) og Δy/Δx = (y-4)/(x-3) = 2, så er P1(8,y) = (8,2*(8-3)+4) = (8,14).

Spørgsmål: Hvordan kan vi bruge den nye regneteknologi? Svar: Med indførelse af computeren kan vi nu regne på sæt af tal, vektorer, og på sæt af vektorer, matricer.

S21.1 Faglige opgaver
1a. Tegn en spidsvinklet trekant i et koordinatsystem. Indtegn de tre højder, først antikt (passer og lineal), så moderne (lineal, trekant og vinkelmåler). Hvad gælder om højdernes skæringspunkter?
1b. Tegn en retvinklet trekant i et koordinatsystem. Indtegn de tre højder, først antikt (passer og lineal), så moderne (lineal, trekant og vinkelmåler). Hvad gælder om højdernes skæringspunkter?
1c. Tegn en stumpvinklet trekant i et koordinatsystem. Indtegn de tre højder, først antikt (passer og lineal), så moderne (lineal, trekant og vinkelmåler). Hvad gælder om højdernes skæringspunkter?
1d. Lav et geometrisk tegnebevis for at højderne skærer hinanden i samme punkt.
1e. Lav et talregnings-bevis for at højderne skærer hinanden i samme punkt (brug koordinaterne).
1f. Lav et bogstavregnings-bevis for at højderne skærer hinanden i samme punkt.
1g. Har højdernes skæringspunkt en geometrisk betydning?

2. Gentag 1a-1g, men nu med medianerne.

3. Gentag 1a-1g, men nu med vinkelhalveringslinierne.

4. Gentag 1a-1g, men nu med midtnormalerne.

5. Givet linien y = ax + b, cirklen x^2 + y^2 = r^2, parablen y = c*x^2, og hyperblen y = c/x. Beregn skæringspunkterne for alle par af figurer. Brug bogstavregning.

6. Færdiggør Excel-regnearket ”punkt&linie”.

7. Lav et Excel-regneark om til et stykke kvadreret papir med et antal tern svarende til et normalt A-4 papir. Indtegn en racerbane. Hvilket team-medlem kan gennemkøre banen med færrest antal streger (vektorer)? En vektor er en streg med en længde og en retning, dvs. med koordinater (a,b). Under kørslen må begge koordinater ændres med højst 1 pr. gang.

S21.2 Rutineopgaver
Tegn to geometriske figurer i et koordinatsystem. Find skæringspunkter ved aflæsning og beregning. Gentag øvelsen mange gange med andre typer figurer. Suppler eventuelt med Excel-beregninger.

S21.3 Didaktisk opgave
Projekt Billardbord

Projekt billardbord går ud på at studere en billardbolds forløb på forskellig typer billardborde: Rektangulære, trekantede, runde, og ellipseformede. Der udarbejdes en individuel problemformulering, som f.eks. bl.a. kan indeholde følgende formulering:

”Optegn et billardbord på 200x100mm. Indtegn centrene C1(500,500) og C2(1000,500) og C3(1500,500). Indtegn epicentrene E11(750,500), E12(500,750), E13(250,500), E14(500,250), samt E21(1250,500), E22(1000,750), E23(750,500), E24(1000,250), samt E31(1750,500), E32(1500,750), E33(1250,500), E34(1500,250).

Placer en kugle i C1 og send den af sted, så den passerer tæt på E31 under andet forløb (mellem første og andet bandesammenstød). Beskriv kuglens bevægelse ved at angive koordinaterne for sammenstødsstederne med de tre første bander. Hvor tæt kommer kuglen på E31 i sit første, andet og tredje forløb?

Gentag forsøget med et nyt udgangspunkt og sigtepunkt. Gentag forsøget med en indlagt cirkelbande, f.eks. med centrum i C2 og radius10 mm. Gentag forsøget med borde af andre former.

Findes der stabile baner, som bolden hele tiden holder sig til?

Rapporter dine observationer af hvad du gør og tænker (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på assimilering og akkommodering (genkendelse og erkendelse).

Projekt Jorddeling

A. Afmærk på et gulv eller en mark et område på 300 centimeter x 400 centimeter. Afmærk positionen A(110cm,230cm) og B(190cm,110cm). Opdel området mellem A og B efter princippet ”lige langt til grænsen”.

Udtag om muligt to personer til at løse opgaven og vær selv observatør og konsulent. Hvis ikke løs da opgaven sammen med én anden person.

Opmål grænseliniens længde og vinkel med siderne samt afstand til A og B. Bestem de to områders areal ved triangulering, og gennemfør trianguleringen helt igennem til retvinklede trekanter.

Find beliggenhed og radius af den største cirkel, der kan ligge inden for hvert af områderne.

Indlæg et rektangel, der rører områdets kant med alle fire hjørner. Find beliggenhed og størrelse af det rektangel, der har det største areal. Find beliggenhed og størrelse af det rektangel, der har den mindste omkreds.

B. Gentag opgaven på et stykke ternet papir i størrelsesforholdet 1 tern = 10cm

Rapporter dine observationer af hvad A og B gør og siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på assimilering og akkommodering (genkendelse og erkendelse).

C. Efter at have bestemt vi en række mangfoldigheder (størrelser) ved tælling (måling) vil vi nu bestemme de samme størrelser ved beregning, idet vi bruger en formelsamling for gymnasiematematik på B-niveau.

Længden AB			Midtpunkt af AB	
AB = ?	AB^2 = (x2-x1)^2+(y2-y1)^2		(xm,ym) = ?	(xm,ym)= ((x2+x1)/2,(y2+y1)/2)
x1=110 y1=230 x2=190 y2=110	AB^2 = (190-110)^2 + (110-230)^2 AB^2 = 80^2 + 120^2 AB^2 = 20800 AB = √20800 AB = 144,2		x1=110 y1=230 x2=190 y2=110	

Hældning af AB			Hældning af midtnormal	
a = ?	a = (y2-y1)/(x2-x1)		a = ?	a*b = -1
x1=110 y1=230 x2=190 y2=110			b = -3/2	

Midtnormalens ligning			Midtnormalens vinkel med vandret	
y = ?	y-y1 = a*(x-x1)		v = ?	Tan v = a
x1= y1= a =			a =	

Skæring P mellem midtnormal og linien x = 0			Skæring Q mellem midtnormal og linien y = 300	
y = ?			x = ?	

Midtnormalens længde			Eventuelle højdeberegninger	
PQ = ?			= ?	

Areal af A’s område			Areal af B’s område	
Areal = ?			Areal = ?	

S22.1 Faglige opgaver
1. Indtegn i et koordinatsystem ∆ABC med koordinaterne A(2,1), B(6,3) og C(4,6). Bestem trekantens stykker både ved hjælp af trigonometri og ved hjælp af vektorregning.

2. Medianer i ∆ABC: Bestem ligning, længde, skæringspunkt med hinanden og med den modsatte side samt vinkel med vandret.

3. Højder i ∆ABC: Bestem ligning, længde, skæringspunkt med hinanden og med den modsatte side samt vinkel med vandret.

4. Vinkelhalveringslinier i ∆ABC: Bestem ligning, længde, skæringspunkt med hinanden og med den modsatte side samt vinkel med vandret.

5. Midtnormaler i ∆ABC: Bestem ligning, længde, skæringspunkt med hinanden og med den modsatte side samt vinkel med vandret.

6. Bevis determinantformlen for 3 ligninger med 3 ubekendte.

7. Lav et regneark som kombinerer forskydning og drejning.

8. (Svær). Find en matrix som drejer en 3dimensional vektor.

S22.2 Rutineopgaver

1. Indtegn i et koordinatsystem en ∆ABC . Bestem trekanten som ovenfor både ved hjælp af trigonometri og ved hjælp af vektorregning.

S23.3 Didaktisk opgave
Blandingsregning optræder i forskellige former næsten overalt inden for matematik. Formuler 1-2 opgaver i blandingsregning inden for hver af de 12 kapitler.

Rapporter dine observationer af hvad du gør og tænker (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på assimilering og akkommodering (genkendelse og erkendelse).