

T1

Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning

1.1 Fremadregning og tilbageregning	2
1.2 Æskeregning	2
1.3 Høseringe-regning, indkodning og afkodning	3
1.4 Vandret tilbageregning, at danse en ligning	3
1.5 Lodret tilbageregning, flyt&vend-metoden (flyt over og vend regnetegnet)	3
1.6 Regneskema	3
1.7 Tabel&kurve-metoden	4
1.8 Neutralisering, vægtskålen	5
1.9 Oversigt over ligningsløsning	5
1.10 Den kvantitative litteratur	5
T1 OPGAVER	6

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik
KL	Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele
GE	Geometri: Jordmåling

MATHeCADEMY: Matematik nedefra

Vi tæller forlæns, men aldrig baglæns. Vi regner derimod både forlæns og baglæns. Tilbageregning kaldes også ligningsløsning. En ligning kan løses på flere forskellige måder.

1.1 Fremadregning og tilbageregning

Fremadregning	Tilbageregning	
I		
3 og 4 er Totalt ?	3 og ? er Totalt 7	
$3 + 4 = ?$	$3 + ? = 7$	
$3 + 4 = x$	$3 + x = 7$	
7 = x	$3 + x = (7-3) + 3$	7 omstakkes til $(7-3)+3 = 4+3$ hvoraf ses at
	$3 + x = 4 + 3$	
	x = 4	
<i>Kontrol</i>	$3 + 4 = 7$	

II		
3 4'ere er Totalt ?	? 4'ere er Totalt ?12	
$3*4 = ?$	$?*4 = 12$	
$3*4 = x$	$x*4 = 12$	
12 = x	$x*4 = (12/4)*4 = 3*4$	12 ombundtes til 4'ere hvoraf ses at
	$x*4 = 3*4$	
	x = 3	
<i>Kontrol</i>	$3 * 4 = 12$	

III		
3 4'ere plus 2 1'ere er ?	3 4'ere plus ? 1'ere er 14	? 4'ere plus 2 1'ere er 14
$3*4 + 2 = ?$	$3*4 + ? = 14$	$?*4 + 2 = 14$
$3*4 + 2 = x$	$3*4 + x = 14$	$x*4 + 2 = 14$
14 = x	$12 + x = 14$	$x*4 + 2 = (14-2) + 2$
	$12 + x = (14-12)+12$	$x*4 + 2 = 12 + 2$
	$12 + x = 2 + 12$	$x*4 = 12$
	x = 2	$x*4 = (12/4)*4$
		$x*4 = 3*4$
		x = 3
<i>Kontrol</i>	$3*4 + 2 = 14$	$3*4 + 2 = 14$

IV
5 bundter og 1 indeholder det samme som 3 bundter og 9. De $5-3 = 2$ bundter indeholder da $9-1 = 8$ styk, som ombundtes i 2'ere: $T = (8/2)*2 = 4*2$, hvoraf ses at $x = 4$:

5 bundter og 1 er lig med 3 bundter og 9	a bundter og b er lig med c bundter og d
$5 * x + 1 = 3 * x + 9$	$a * x + b = c * x + d$
$5*x - 3*x = 9 - 1$	$a*x - c*x = d - b$
$2*x = 8$	$(a-c)*x = d - b$
$2*x = (8/2)*2$	$(a-c)*x = (d-b)/(a-c)*(a-c)$
$2*x = 4*2$	$x = (d-b)/(a-c)$
$x = 4$	
<i>Kontrol</i> $5*4 + 1 = 3*4 + 9 = 21$	<i>Prøv selv!</i>

1.2 Æskeregning

En æske med ? tændstikker plus 3 løse er optalt til 7 $T = x + 3 = 7$? æsker med 4 tændstikker plus 2 løse er optalt til 14 $T = x*4+2 = 14$	3 æsker med ? tændstikker plus 2 løse er optalt til 14 $T = 3*x+2 = 14$
--	--	--

Eksempel. En stak med 3 æsker tændstikker plus 2 løse tændstikker er optalt til 14 tændstikker. Hvor mange tændstikker indeholder hver æske?

<p><i>Lodret</i></p> <p>$3*x + 2 = 14 = (14-2)+2 = 12 + 2$</p>	<p><i>Vandret</i></p> <p>$3*x + 2 = 14 = (14-2)+2$</p>
---	---

Vi fjerner enerne og opbunder 12 i 3'ere:

<p>$3*x = 12 = (12/3)*3 = 4*3$</p>	<p>$3*x = 12 = (12/3)*3$</p>
<p>$x = 4$</p>	<p>$x = 4$</p>

Heraf ses at $x = 4$, da 4 3'ere = 3 4'ere ($4*3 = 3*4$).

1.3 Høseringe-regning, indkodning og afkodning

Skrivemåden $T = 3*B + 2$ er en indkodning af f.eks. antallet $T = 3*5 + 2*1$. En afkodning kan f.eks. være spørgsmålet: ” $T = 3*B+2 = 14$, $B=?$ ” Kodningen kan f.eks. ske ved brug af høseringe, C'er eller S'er: $T = 3C'er + 2 S'er$ gælder som 14. Afkodning bliver så det samme som ligningsløsning.

1.4 Vandret tilbageregning, at danse en ligning

Regnefortællingen $3*x + 2 = 14$ fortæller følgende regnehistorie, der kan gås eller danses på gulvet:

FØRST blev x ganget med 3, og SIDEN plusset med 2, hvilket førte til 14

x	$\xrightarrow{-(3)}$	$3*x$	$\xrightarrow{-(+2)}$	$3*x + 2$	(fremadregning)
4	$\xleftarrow{-(/3)}$	12	$\xleftarrow{-(-2)}$	14	(tilbageregning)

Fortællingen kan nu vendes om: Hvis 14 bliver minusset med 2 og siden delt med 3 fører det til x . Dvs. $x = (14-2)/3 = 4$. Som kontrol kan der igen laves fremadregning.

1.5 Lodret tilbageregning, flyt&vend-metoden (flyt over og vend regnetegnet)

Først bygges regnestykket op, så brydes resultatet ned. Som kontrol bygges regnestykket atter op

<p><i>Fremad-siden</i></p> $3*x + 2 = 14$ $+2 \uparrow \downarrow -2$ $3*x = 14-2 = 12$ $*3 \uparrow \downarrow /3$ $x = 12/3 = 4$	<p><i>Tilbage-siden</i></p> $3*x + 2 = 14$ $3*x = 14-2 = 12$ $x = 12/3 = 4$	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;"><i>Frem</i></td> <td><i>Tilbage</i></td> </tr> <tr> <td>$a*x + b = c$</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>$a*x = c-b$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$x = (c-b)/a$</td> </tr> </table>	<i>Frem</i>	<i>Tilbage</i>	$a*x + b = c$			$a*x = c-b$		$x = (c-b)/a$
<i>Frem</i>	<i>Tilbage</i>									
$a*x + b = c$										
	$a*x = c-b$									
	$x = (c-b)/a$									

1.6 Regneskema

$x = ?$	$3*x + 2 = 14$
	$(3*x) + 2 = 14$
	$3*x = 14-2$
	$x = 12/3$
x	= 4
<i>Kontrol:</i>	$3*4 + 2 = 14$
	$14 = 14 \quad \text{☺}$

bemærk den skjulte parentes omkring gangestykket

$x = ?$	<i>bogstavregning</i>
$a = 3$	$a*x + b = c$
$b = 2$	$(a*x) + b = c$
$c = 14$	$a*x = c-b$
	$x = \frac{(c-b)}{a}$
	$x = \frac{(14-2)}{3}$
x	= 4
<i>Kontrol:</i>	$3*4 + 2 = 14$
	$14 = 14 \quad \text{☺}$

Ombundtning

3 kr for 4 styk: 21kr for ? styk

styk = ?	styk = styk/kr*kr
Styk/kr = 4/3	Styk = 4/3*21
kr = 21	Styk = 28

3 kr for 4 styk: ?kr for 24 styk

kr = ?	kr = kr/styk*styk
kr/styk = 3/4	Kr = 3/4*24
styk = 24	Kr = 18

Procenter

30 kr = 40%, 21kr = ?%

% = ?	% = %/kr*kr
%/kr = 40/30	% = 40/30*21
kr = 21	% = 28

30 kr = 40%, ?kr = 24%

kr = ?	kr = kr/%*%
kr/% = 30/40	Kr = 30/40*24
% = 24	Kr = 18

Pr.-regning

25kg. à 4 kr./kg. = ? kr.

T = ?	k*p = T
k = 25	25*4 = T
p = 4	100 = T

25kg. à ? kr./kg. = 200kr.

p = ?	k*p = T
k = 25	p = T/k
T = 200	p = 200/25
	p = 8

?kg. à 4 kr./kg. = 300kr.

k = ?	k*p = T
p = 4	p = T/k
T = 300	p = 300/4
	p = 75

Procentregning

25% af 200 kr. = ? kr.

A = ?	p = a/T
p = 25%	p*T = a
T = 200	25%*200 = a
	50 = a

25% af ? kr. = 40 kr

T = ?	p = a/T
p = 25%	p*T = a
a = 40	T = a/p
	T = 40/25%
	T = 160

?% af 200 kr. = 40 kr

p = ?	p = a/T
a = 40	p = 40/200
T = 200	p = 0.20
	p = 20/100
	p = 20%

Procenttilæg

200 + 25% = ?

K = ?	K = Ko*(1+r)
Ko = 200	K =
r = 25%	200*(1+0.25)
= 0.25	K = 250

? + 25% = 400

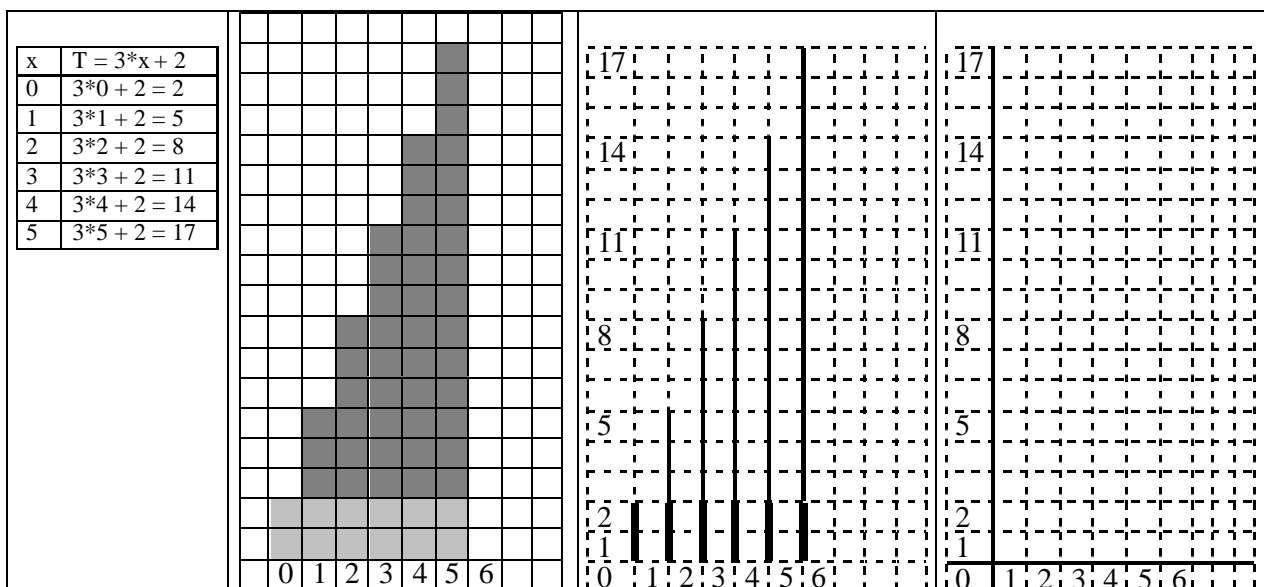
Ko = ?	K = Ko*(1+r)
K = 500	K/(1+r) = Ko
r = 25%	500/(1+0.25) = Ko
= 0.25	400 = Ko

200 + ?% = 280

r = ?	K = Ko*(1+r)
K = 280	K/Ko = 1+r
Ko = 200	(K/Ko)-1 = r
	(280/200)-1 = r
	0.40 = r
	40% = r

1.7 Tabel&kurve-metoden

En undersøgelse af de forskellige muligheder ved tabel og kurve, som kan tegnes på papir, eller bygges med legeklodser, på et perlebræt eller andet.



1.8 Neutralisering, vægtskålen

Neutraliseringsmetoden stammer fra mængde-matematikken. En regningsart kaldes her en kompositionsforskrift. En ligning ($3 \cdot x + 2 = 14$) opfattes her som et åbent udsagn, som udtrykker ækvivalensen (= opfattes som en ækvivalensrelation) mellem to tal, $3 \cdot x + 2$ og 14. Ligningsløsning opfattes her som bestemmelse af udsagnets løsningsmængde L, dvs. mængden af tal, der gør udsagnet til et sandt udsagn. Dette gøres ved at ændre de to tal på samme måde. Herved omformes udsagnet til et nyt ensbetydende udsagn, hvilket vises ved at forbinde udsagnene med ”ensbetydende-pile”:

$L = \{x \mid 3 \cdot x + 2 = 14\}$	L er mængden af x, hvorom det gælder at $3 \cdot x + 2 = 14$.
$3 \cdot x + 2 = 14$	det åbne udsagn, hvis løsningsmængde skal findes
$\updownarrow (3 \cdot x) + 2 = 14$	den skjulte parentes sættes
$\updownarrow ((3 \cdot x) + 2) + (-2) = 14 + (-2)$	for at fjerne +2 plusses dets modsatte (inverse) tal -2 på begge sider
$\updownarrow (3 \cdot x) + (2 + (-2)) = 12$	+parenteser kan hæves og sættes efter ønske (den associative lov)
$\updownarrow (3 \cdot x) + 0 = 12$	+2 og -2 neutraliserer hinanden, og +’s neutrale tal er 0
$\updownarrow 3 \cdot x = 12$	pr. definition af det neutrale tal er $a + 0 = 0 + a = a$
$\updownarrow (3 \cdot x) \cdot (1/3) = 12 \cdot (1/3)$	for at fjerne $\cdot 3$ ganges med dets modsatte tal $1/3$ på begge sider
$\updownarrow (x \cdot 3) \cdot (1/3) = 4$	\cdot tal (og +tal) kan ombyttes efter ønske (den kommutative lov)
$\updownarrow x \cdot (3 \cdot (1/3)) = 4$	\cdot parenteser kan hæves og sættes efter ønske (den associative lov)
$\updownarrow x \cdot 1 = 4$	$\cdot 3$ og $/3$ neutraliserer hinanden, og \cdot ’s neutrale tal er 1
$x = 4$	pr. definition af det neutrale tal er $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$L = \{x \mid 3 \cdot x + 2 = 14\} = \{4\}$ Løsningsmængden L. På grund af pilene behøves ingen kontrol

1.9 Oversigt over ligningsløsning

Fremskridt	$5 + 3 = ?$	$5 \cdot 3 = ?$	$5^2 = ?$	$5^3 = ?$
Tilbagegæng	$? + 3 = 8$ $? = 8 - 3$	$? \cdot 3 = 15$ $? = 15 / 3$	$?^2 = 25$ $? = \sqrt{25}$ $? = 25^{1/2}$	$?^3 = 64$ $? = \sqrt[3]{64}$
Definitioner	Ved $8 - 3$ forstås det tal, der plusses med 3 giver 8	Ved $15 / 3$ forstås det tal, der ganget med 3 giver 15	Ved $\sqrt{25}$ forstås det tal, der ganget med sig selv 2 gange giver 25	Ved $\sqrt[3]{64}$ forstås det tal, der ganget med sig selv 3 gange giver 64
Overflytningsregler	$x + 3 = 8$ $x = 8 - 3$	$x \cdot 3 = 15$ $x = 15 / 3$	$x^2 = 25$ $x = \sqrt{25}$	$x^3 = 64$ $x = \sqrt[3]{64}$
regler	+tal \leftrightarrow -tal	\cdot tal \leftrightarrow /tal	$^2 \leftrightarrow \sqrt{\quad}$	$^3 \leftrightarrow \sqrt[3]{\quad}$

1.10 Den kvantitative litteratur

Gå videre til bilaget KL: Kvantitativ litteratur

T1 OPGAVER

Spørgsmål T11: Hvordan kan vi vende en regneproses om fra fremad-regning til tilbage-regning? Svaret gives af overflytningsmetoden: $x \cdot 3 + 2 = 14$ vendes til $x = (14 - 2) / 3$. Eller generelt: $x + a = b$ vendes til $x = b - a$, $x \cdot a = b$ vendes til $x = b / a$, $x^a = b$ vendes til $x = a \sqrt[a]{b}$, $a^x = b$ vendes til $x = \log_b / \log_a$.

T11.1 Faglige opgaver

1. Isoler hver af størrelserne a, b og c i nedenstående ligninger. Afslut med prøve. Løs opgaverne inden for hver af de to løsningsmetoder: overflytning og neutralisering.

$T = a + b \cdot c$	$T = a + (1 + b) \cdot c$	$T = a + (1 - b) \cdot c$	$T = a + b \cdot (1 + c)$	$T = a + b \cdot (1 - c)$
$T = a - b \cdot c$	$T = a - (1 + b) \cdot c$	$T = a - (1 - b) \cdot c$	$T = a - b \cdot (1 + c)$	$T = a - b \cdot (1 - c)$
$T = a + b / c$	$T = a + (1 + b) / c$	$T = a + (1 - b) / c$	$T = a + b / (1 + c)$	$T = a + b / (1 - c)$
$T = a - b / c$	$T = a - (1 + b) / c$	$T = a - (1 - b) / c$	$T = a - b / (1 + c)$	$T = a - b / (1 - c)$

2. Isoler hver af størrelserne a, b og c i nedenstående ligninger. Afslut med prøve. Løs opgaverne inden for hver af de to løsningsmetoder: overflytning og neutralisering.

$T = a + b \cdot c^d$	$T = a + (1 + b) \cdot c^d$	$T = a + (1 - b) \cdot c^d$	$T = a + b \cdot (1 - c)^d$
$T = a - b \cdot c^d$	$T = a - (1 + b) \cdot c^d$	$T = a - (1 - b) \cdot c^d$	$T = a - b \cdot (1 - c)^d$
$T = a + b / c^d$	$T = a + (1 + b) / c^d$	$T = a + (1 - b) / c^d$	$T = a + b / (1 - c)^d$
$T = a - b / c^d$	$T = a - (1 + b) / c^d$	$T = a - (1 - b) / c^d$	$T = a - b / (1 - c)^d$

3. Isoler hver af størrelserne a, b og c i ligningen $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Afslut med prøve. Løs opgaven inden for hver af de to løsningsmetoder: overflytning og neutralisering.

4. Du er blevet vikar i en 10. klasse, og skal undervise denne i løsning af andengradsligninger. Skitser et alternativt undervisningsforløb (Lærebogen har ry for at være uheldig på dette punkt).

5. Færdiggør det vedlagte Excel-regneark ”Ligninger” med rutineopgaver.

T11.2 Rutineopgaver

Træn din evne til bogstavregning på nedenstående opgaver. Når du er færdig så tag udgangspunkt i et af svarene, f.eks. b =, og regn opgaverne igen. Slut af med at gøre prøve.

	Givet T, Find a, b og c	Svar:	a	b	c
1	$T = a + b \cdot c$	$T - b \cdot c$		$\frac{T - a}{c}$	$\frac{T - a}{b}$
2	$T = a - b \cdot c$	$T + b \cdot c$		$\frac{a - T}{c}$	$\frac{a - T}{b}$
3	$T = a + \frac{b}{c}$	$T - \frac{b}{c}$		$(T - a) \cdot c$	$\frac{b}{T - a}$
4	$T = a - \frac{b}{c}$	$T + \frac{b}{c}$		$(a - T) \cdot c$	$\frac{b}{a - T}$
5	$T = (a + b) \cdot c$	$\frac{T}{c} - b$		$\frac{T}{c} - a$	$\frac{T}{a + b}$
6	$T = (a - b) \cdot c$	$\frac{T}{c} + b$		$a - \frac{T}{c}$	$\frac{T}{a - b}$
7	$T = \frac{a + b}{c}$	$T \cdot c - b$		$T \cdot c - a$	$\frac{a + b}{T}$
8	$T = \frac{a - b}{c}$	$T \cdot c + b$		$a - T \cdot c$	$\frac{a - b}{T}$
9	$T = \frac{a}{b + c}$	$T \cdot (b + c)$		$\frac{a}{T} - c$	$\frac{a}{T} - b$
10	$T = \frac{a}{b - c}$	$T \cdot (b - c)$		$\frac{a}{T} + c$	$b - \frac{a}{T}$
11	$T = \frac{a}{b} + c$	$(T - c) \cdot b$		$\frac{a}{T - c}$	$T - \frac{a}{b}$
12	$T = \frac{a}{b} - c$	$(T + c) \cdot b$		$\frac{a}{T + c}$	$\frac{a}{b} - T$

13	$T = a \cdot b^c$	$\frac{T}{b^c}$	$\sqrt[c]{\frac{T}{a}}$	$\frac{\log(\frac{T}{a})}{\log b}$
14	$T = \frac{a}{b^c}$	$T \cdot b^c$	$\sqrt[c]{\frac{a}{T}}$	$\frac{\log(\frac{a}{T})}{\log b}$
15	$T = (a \cdot b)^c$	$\frac{\sqrt[c]{T}}{b}$	$\frac{\sqrt[c]{T}}{a}$	$\frac{\log T}{\log(a \cdot b)}$
16	$T = (\frac{a}{b})^c$	$\sqrt[c]{T} \cdot b$	$\frac{a}{\sqrt[c]{T}}$	$\frac{\log T}{\log(\frac{a}{b})}$
17	$T = (a + b)^c$	$\sqrt[c]{T} - b$	$\sqrt[c]{T} - a$	$\frac{\log T}{\log(a+b)}$
18	$T = (a - b)^c$	$\sqrt[c]{T} + b$	$a - \sqrt[c]{T}$	$\frac{\log T}{\log(a-b)}$
19	$T = a + b^c$	$T - b^c$	$\sqrt[c]{T-a}$	$\frac{\log(T-a)}{\log b}$
20	$T = a - b^c$	$T + b^c$	$\sqrt[c]{a-T}$	$\frac{\log(a-T)}{\log b}$
21	$T = a^{(b+c)}$	$(b+c)\sqrt{T}$	$\frac{\log T}{\log a} - c$	$\frac{\log T}{\log a} - b$
22	$T = a^{(b-c)}$	$(b-c)\sqrt{T}$	$\frac{\log T}{\log a} + c$	$b - \frac{\log T}{\log a}$

T11.3 Didaktisk opgave

Hvordan udføres tilbageregning efter naturmetoden?

1. "Tænk på et tal mellem 1 og 10. Plus med 3. Hvad blev det?" "9." " Så tænkte du på 6".
2. "Tænk på et tal mellem 1 og 10. Gang med 3. Hvad blev det?" "24." " Så tænkte du på 8".
3. "Tænk på et tal mellem 1 og 10. Gang med 3. Plus med 4. Hvad blev det?" "19." " Så tænkte du på 5".
4. "Tænk på et tal mellem 1 og 10. Plus med 4. Gang med 3. Hvad blev det?" "27." " Så tænkte du på 5".
5. "Tænk på et tal mellem 1 og 10. Gang det med sig selv. Gang med 3. Plus med 4. Hvad blev det?" "16." " Så tænkte du på 2".

Afprøv ovenstående fem "Tænk på et tal"-gættelege på en forsøgsperson A. Personen vil sikkert svare: "Det kan jeg da også gøre".

Lad A prøve alle fem tilfælde. Først i hovedet, siden med nedskrivning på papir.

Vis derefter hver af følgende ligninger til A, én ad gangen:

$x+3=9$, $x*3=24$, $x*3+4=19$, $3*(x+4)=27$, $3*x^2+4=16$. I stedet for 9, 24 osv. indsættes A's tal.

Rapporter dine observationer af hvad A gør og siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

Gentag undersøgelsen med B fra en anden aldersgruppe (f.eks. barn & ung eller voksen).