Projekter til Matematik

A

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net 2015

Indholdsfortegnelse

1. Projekt Prognoser

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at beregne to fremtidige værdier for en formue, der vokser med konstant vækst: Når formuen efter 2 og 5 måneder er hhv. 10 og 30 enheder, hvad vil den da være efter 8 måneder, og hvornår vil den være 60 eneheder?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de to ønskede værdier
4. Opstil en lineær model for væksten til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
5. Opstil en eksponentiel model for væksten til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
6. Opstil en potensmodel for væksten til at besvare de to spørgsmål algebraisk og geometrisk.
7. Opstil de tilsvarende modeller ved brug af differentialligninger.
8. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
9. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

2. Projekt Opsparing og Pension

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at sammenligne pensionsmulighederne ved fire forskellige opsparingsformer over 10 år. Ops1: Opsparing hjemme med start- og løbende indskud. Ops2: (Annuitets)opsparing i bank med start- og løbende indskud. Ops3: Opsparing i bank med startindskud. Ops4: Opsparing i bank med startindskud på 'TrippelMax'-konto, som giver 3 x rente faldende til max-beløbet, som er 3 x indskud, 10 års binding bortset fra ved dødsfald. Opsparingen bestrår af et engangsindskud på kr. 2000 samt evt. et årligt indskud på kr. 1000. Renten er 12% pro anno.

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de differentialligninger, der beskriver kapitalerne under opsparingen.
4. Bestem algebraisk og geometrisk de opsparede kapitaler efter 10 år.
5. Oplist de differentialligninger, der beskriver kapitalerne under pensionsudbetaling på c kr. /år.
6. Find det årlige pensionsudbetaling i hver af de fire modeller.
7. Bestem forholdet mellem det indskudte og det udtagne beløb.
8. Illustrer kapitaludviklingen i hver af de fire modeller.
9. Test de fundne løsninger til differentialligningerne.
10. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
11. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

3. Projekt Broen

Problem fra virkeligheden

Over en 8 meter bred kløft skal bygges en hængebro af to krydsende stålbjælker fastgjort til klippevæggen 5 meter oppe og til en 3.5 meter lang stolpe, som er anbragt 1 meter fra kløften, og som er støttet af en stålwire, der danner en vinkel på 30 grader med vandret . De tre stållængder ønskes bestemt, samt samlingspunktet over kløften.

1. Konstruer en tegning af broen i målestoksforholdet 1:100. Påfør tegningen de opgivne mål samt relevante bogstaver.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Beregn længden af stålwiren
4. Beregn længden af de to stålbjælker.
5. Indlæg et passende koordinatsystem, og opstil i dette ligningerne for de to stålbjælker.

6. Find koordinaterne til stålbjælkerens skæringspunkt C.
7. Opstil og løs en model, som bruger vektorregning.
8. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til mundtlig eksamen.
9. Skitser eventuelt et bevis til en af de brugte formler.

4. Projekt Græsplæne

Problem fra virkeligheden

I en trekantet græsplæne er det ene hjørne 60 grader og de hosliggende sider er hhv. 10 og 12 meter. Bestem de andre hjørners størrelser samt længden af den sidste side. I trekanten ønskes den indskrevne cirkel og den omskrevne cirkel bestemt. Den indre cirkel fyldes med fint ral, og det område, som kun findes i den ydre cirkel fyldes med groft ral. Hvor stort et areal er fyldt med hhv. med græs, fint, og groft ral?

1. Indtegn de given oplysninger i et koordinatsystem med centrum i A og med C på førsteaksen.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de ønskede værdier.
4. Find vinklernes punktkoordinater.
5. Find sidernes vektorkoordinater.
6. Find siderens længder.
7. Find størrelsen af de tre vinkler.
8. Find ligningerne for sidernes midtnormaler, samt koordinaterne for disses skæringspunkt.
9. Find for den omskrevne cirkel dens radius og dens ligning.
10. Find ligningerne for vinkelhalveringslinjerne, samt koordinaterne for disses skæringspunkt.
11. Find for den indskrevne cirkel dens radius og dens ligning.
12. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
13. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

5. Tetraederhal

Problem fra virkeligheden

En arkitekt ønsker at finde dimensionerne på en tetraeder-hal, som har en kugleformet hvælving med diameter 38 m.

1. I et xyz-koordinatsystem med AB ud af x-aksen får et 10x10x10 tetraeder ABCD koordinaterne A(0,0,0), B(10,0,0), C(5,yC,0) og D(5,yD,zD). Siderne AB, BC, CA, AD’s midtpunkter kaldes hhv. E, F, G og H. Trekanterne ABC, ABD, ACD og BCD’s medianskæringspunkter kaldes hhv. K, L, M og N. I en ligesidet trekant er vinkelhalveringslinje, median, højde og midtnormal ens. Den ind- og omskrevne cirkel har da samme centrum, som ligger lodret under D.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de ønskede værdier.
4. Bestem yC, yD og zD.
5. Bestem vektorerne **AB, AC, AD, BC** og **CD.**
6. Opstil tetraederets fire normalvektorer.
7. Opstil ligningerne for tetraederets fire sider.
8. Find ligningerne for skæringslinierne for planerne ABD og ACD.
9. Find vinkel v mellem planerne ABC og ABD.
10. Find vinkel u mellem plan ABC og linie AD.
11. Find kuglens centrum P udtrykt ved kuglens radius s.
12. Find s som afstanden fra P til plan ABD.
13. Find forstørringsfaktoren fra modellen til den virkelige hvælving.
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
15. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

6. Konjunktursvingninger

Problem fra virkeligheden

Erfaringen viser, at en virksomheds ugentlige salgstal er underkastet konjunktursvingninger. Forrige års ugentlige salgstal var 100, 140, 120, 90, 60 og 70 for hhv. 50, 40, 30, 20, 10 og 0 uger siden. På denne baggrund ønskes opstillet en prognose for de kommende to års ugentlige salgstal. Hvornår topper salgstallet, og hvornår bunder det? Hvornår er det over 110 units/uge? Hvor meget forventes solgt i marts måned? Hvornår forventes ansættelse og fyring af salgspersonel (når væksten i det ugentlige salgstal passerer ±2.0 u/uge pr. uge ved hhv. positiv og negativ konjunktur)? Hvornår vender konjunkturerne?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger for hver af de tre måder.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at besvare spørgsmålet.
4. Opstil en sinusregression af tabellen og kontroller grafisk om den passer nogenlunde til tabellen.
5. Fin top- og bundpunkter algebraisk og geometrisk.
6. Find perioder over 110-niveauet både algebraisk og geometrisk.
7. Find det forventede salgstal for marts måned både algebraisk og geometrisk.
8. Find hvornår der forventes ansættelse og fyring af salgspersonel både algebraisk og geometrisk.
9. Find både algebraisk og geometrisk hvornår konjunkturerne vender.
10. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
11. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

7. Projekt Vinkarton

Problem fra virkeligheden

Vi ønsker at bestemme hvordan en 3 liters vinkarton skal dimensioneres for at minimere kartonen. Vi antager, at vinkartonen bestående af 5 sider med tilhørende flapper med en højde der er halvdelen af den korteste side.

1. Lav en skitse af den udfoldede vinkarton og beskriv sidelængderne med x, y og z.
2. Vis at den brugte kartonmængde kan beregnes af formlen K = (x+2·z/2)*(3y+2z)
3. Vis at dette kan omskrives til $K = 3\cdot x\cdot y + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2\cdot y\text{^}2}$
4. Vis at hvis y er det halve af x, er $K = 1.5x\text{^}2 + \frac{21}{x} + \frac{72}{x\text{^}4}$; besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk.
5. Besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk, hvis y er lig med x
6. Besvar spørgsmålet algebraisk og geometrisk, hvis y er dobbelt så stor som x.
7. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
8. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

8. Projekt Kørsel

Problem fra virkeligheden

Ved kørsel svarer farten 100 km/t til 100*1000/(60*60) = 27.8 m/s. Under Peters kørsel blev farten målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s. Hvornår begyndte og sluttede kørslen? Hvad var farten efter 12sekunder? Hvornår var farten 25m/s? Hvornår blev der accelereret? Hvornår blev der bremset? Hvad var den maksimale fart? Hvad var accelerationen i begyndelsen af de forskellige 5sekunders intervaller? Hvor mange meter kørtes der i disse intervaller? Hvor langt kørtes i alt?

1. Opstil en tabel med de givne oplysninger.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Oplist de formler, der skal bruges til at beregne de ønskede værdier.
4. Opstil en model med et fjerdegradspolynomium for Peters kørsel.

Besvar følgende spørgsmål både algebraisk og geometrisk

5. Hvornår begyndte og sluttede kørslen?
6. Hvad var farten efter 12sekunder?
7. Hvornår var farten 25m/s?
8. Hvornår blev der accelereret?
9. Hvornår blev der bremset?
10. Hvad var den maksimale fart?
11. Hvor mange meter kørtes der i de forskellige 5sekunders intervaller?
12. Hvad var accelerationen i begyndelsen af disse intervaller?
13. Hvor langt kørtes i alt?
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
15. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

9. Projekt Newton spiller golf

Problem fra virkeligheden

Newton og hans ven bispen står på kanten af taget på Newtons flade hus. Husets kant befinder sig 7.5 meter ude og tagets højde er 3 m. Vi ønsker at bestemme om Newton kan ramme et golf-hul 40 meter ude ved at sende kuglens afsted med en lodret og vandret hastighed på hhv. 15 m/s og 10 m/s.

1. Indlæg et koordinatsystem, så Newtons golfbold befinder sig i punktet (x,y) = (7.5,3), og golfhullet i punktet (40,0).
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Den vandrette bevægelse har konstant hastighed. Vis at den vandrette bevægelse kan bekrives af formlen x = xo + vo*t, hvor t angiver tiden, og xo og vo angiver stedet og hastigheden til tiden 0, og hvor v = x'.
4. Vis at formlen for den vandrette bevægelse i dette tilfælde kan omformes til t = (x – 7.5)/10,
5. Den lodrette bevægelse har konstant acceleration. Vis at den lodrette bevægelse kan bekrives af formlen y = yo + wo*t + ½*a*t^2, hvor a angiver tyngdeaccelerationen -9.82 m/s^2, og t angiver tiden, og yo og wo angiver stedet og hastigheden til tiden 0, og hvor a = w' og w = y'.
6. Vis at formlen for den lodrette bevægelse i dette tilfælde er y = 3 + 15*t – 4.91*t^2 ,
7. Vis at de to formler kan sammensættes til formlen y = -0.049 x^2 + 2.235x – 11.00
8. Hvor rammer golfkuglen jordoverfladen? Besvar spørgsmål både algebraisk og geometrisk
9. Bestem affyringsfart og affyringsvinkel.
10. Bestem nedslagsfart og nedslagsvinkel.
11. Find den affyringsfart, som rammer golf-hullet, hvis affyringsvinklen er 0 grader.
12. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.
13. Skitser et bevis til en af de brugte formler.

10. Projekt Statistik

Problem fra virkeligheden

Fra et spørgeskema er spørgsmål s1 og s2 holdningsspørgsmål, hvor der svares fra 0 til 4 hvis man er hhv. meget uenig, uenig, neutral, enig og meget enig. Spørgsmål s5 er et tilhørsspørgsmål, hvor der kan svares kvinde eller mand. Følgende svar blev indsamlet:

S1: 2, 0, 2, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 0, 2.
S2 og S5: 3 og k, 1 og m, 3 og m, 1 og m, 2 og k, 3 og k, 1 og k, 2 og k, 3 og m, 2 og m, 3 og k, 1 og k, 3 og k, 3 og k, 1 og m, 3 og k, 2 og k, 2 og k, 2 og k, 3 og k, 3 og m, 3 og k, 1 og m, 2 og m, 1 og m, 2 og m, 2 og k, 1 og k, 1 og m, 2 og k.

Mht. S1 ønskes de mange tal sammenfattet til 2-3 tal, som beskriver tallenes midte og variation.
Mht. S2 og S5 ønskes en test af hypotesen: Gruppernes holdninger er ikke forskellige.

1. Statistik 1: Opstil de indsamlede data i en hyppighedstabel.
2. Oplist de begreber, der skal bruges til at beskrive problemet matematisk, og anfør hver gang en præcis definition af begrebet.
3. Beregn frekvenser og opsummerede frekvenser.
4. Find talmaterialets kvartilsæt, og oversæt det til journalist-sprog efter at have tegnet et boksplot.
5. Find talmaterialets middeltal og spredning, og oversæt dette til journalist-sprog.
6. Statistik 2: Opstil de indsamlede data i en krydstabel med køn vandret og holdning lodret.
7. Tilføj to kolonner med det totale antal svar i antal og den gennemsnitlige procent for hvert alternativ.
8. Tilføj en kolonne for hvert køn med de forventede antal svar, baseret på gennemsnittet.
9. Tilføj en kolonne for hvert køn til et ki^2-forskelstal (tovejs) beregnet efter formlen:
ki^2 = (observeret - forventet)^2/forventet.
10. Find det samlede ki^2-forskelstal for begge køn tilsammen.
11. Angiv antallet af frihedsgrader, og find den kritiske værdi på et 5% konfidensinterval.
12. Kan hypotesen forkastes?
13. Hvad ville konklusionen være hvis det samme svarmønster blev fundet blandt 10 gange så mange personer?
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

11. Projekt Hypotesetest

Problem fra virkeligheden

Ved 4 kast med et symmetrisk tetraeder kan resultatet ’1’ forekomme 0, 1, 2, 3 eller 4 gange med 31.6% chance for 0 gange. Men er tetraederet symmetrisk, så gevinstchancen for 1er er 25%? Vi udfører 4-serien 40 gange, og sammenligner vore eksperimentelle data med de teoretiske forventninger for at se, om tetraederet er symmetrisk.

1. Opstil et tælletræ som viser de forskellige udfaldsmuligheder.
2. Anfør hvor mange gennemløb der er til de fem forskellige muligheder.
3. Angiv den samlede sandsynlighed for de fem forskellige muligheder, dels som formel dels fundet ved hjælp af et CAS-værktøj.
4. Opret to lister, liste1 med observerede hyppigheder, og liste2 med 40*TIStat.Binompdf(4,0.25).
5. Opret liste3 med forskels-tallene (ki^2-tallene) beregnet som (liste1-list2)^2/list2, da ki^2 = Σ(To-Te)^2/Te.
6. Beregn summen af tallene i liste3.
7. Importer de to lister til formelregnerens Stats/List-editor.
8. Udfør en ki^2 GOF (Goodness of Fit) test, som viser de enkelte og det samlede ki^2 tal.
12. Kan vi acceptere hypotesen ’sandsynligheden for udfaldet 1 er 25%’?
13. Hvad ville konklusionen være hvis det samme svarmønster med 400 udførelser i stedet for 40.
14. Konkluder, og lav er rapport, som kan bruges til eksamen.

1. Projekt Prognoser

Problemstilling: Hvordan kan opstilles prognoser for en formue under antagelse af konstant vækst?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

En formue antages at vokse med konstant vækst. Ud fra to kendte datasæt ønskes opstillet prognoser for en fremtidig værdi, samt for, hvornår en bestemt værdi nås.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over den hidtidige formueudvikling, hvor x er antal dage og y er formuen

x	y = ?
2	10
5	30
8	?
?	60

Lineær vækst y = a*x + b ++ vækst	x: +1, y: +a (hældningstallet, a = Δy/Δx) y = b når x = 0	+1 → +a kr
Exponentiel vækst y = b*a^x +* vækst	x: +1, y: + r% (vækstprocenten, r = Δy/y) y = b når x = 0 (vækstfaktor a = 100%+r = 1+r)	+1 → +r %
Potens vækst y = b*x^a ** vækst	x: +1%, y: + a% (elasticiteten, a= (Δy/y)/(Δx/x) y = b når x = 1 = 100%	+1% → +a %

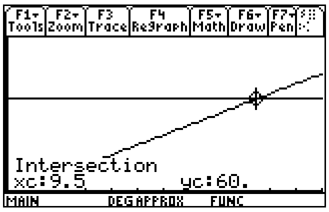
3. Løsning af det matematiske problem

Først findes ligningerne for y ved regression. Vi indtaster datasættene i formelregnerens data/matrix-editor.
Ønskes en lineær model vælges LinReg. Eller den udvidede formel y = yo+a*(x-xo) eller Δy = a*Δx
Ønskes en eksponentiel model vælges ExpReg. Eller den udvidede formel y = yo*a ^ (x-xo) eller Iy = a^Δx
Ønskes en potens model vælges PowerReg. Eller den udvidede formel y = yo*(x/xo) ^ a eller Iy = Ix^a.
Alternativt bruges løsning af differentialligninger, DE:

Lineær vækst

y = ?	y = 6.667*x – 3.333
x=8	y1(x) | x=8 give y 50
DE	y' = dy/dx = a, y(2) = 10 ∫dy = ∫a dx, y = ax – 2a + 10 (x,y) = (5,30) giver a = 6.67 Løsning: y = 6.667*x – 3.333

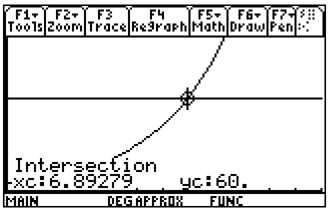
x = ?	y = 6.667*x – 3.333
y = 60	60 = (6.667*x)– 3.333 60 + 3.333 = 6.667*x 63.333/6.667 = x 9.5 = x
Test1	60 = 6.667*9.5– 3.333 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Giver x = 9.5
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 9.5 (intersection)



Eksponentiel vækst

y = ?	y = 4.807 * 1.442^x
x=8	y1(x) | x=8 giver y=90
DE	y' = dy/dx = r*y, y(2) = 10 ∫1/y dy=∫r dx, y = 10*e^r(x-2) (x,y)=(5,30) gir r = 0.336 (kontin.) Løsning: y = 4.807 * 1.442^x

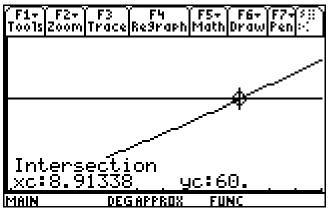
x = ?	y = 4.807 * 1.442^x
y = 60	60 = 4.807 * (1.442^x) 60/4.807 = 1.442^x ln(60/4.807)/ln 1.442 = x 6.89 = x
Test1	60 = 4.807 * 1.442^6.89 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Gi er x = 6.89
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 6.89 (intersection)



Potens vækst

y = ?	y = 4.356*x^1.199
x=8	y1(x) | x=8 giver y=52.7
DE	(dy/y)/(dx/x) = a giver y' = a*y/x, y(2) = 10 ∫1/y dy = ∫dx/x dx, y = 10*e^a(lnx-.693) (x,y) = (5,30) giver a = 1.199 Løsning: y = 4.356*x^1.199

x = ?	y = 4.356*x^1.199
y = 60	60 = 4.356*(x^1.199) 60/4.356 = x^1.199 (60/4.356)^(1/1.199) = x 8.91 = x
Test1	60 = 4.356*8.91^1.199 60 = 60
Test2	Solve(60 = y1(x),x) Giver x = 8.91
Test3	Grafisk aflæsning med y2(x)=60 giver x = 8.91



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Vi har set at vi med regressionsligninger kan opstille prognoseligningen til at forudsige fremtidige værdier, samt for, hvornår en bestemt værdi nås. De tre sæt svar er forskellige, da de bygger på forskellige antagelser.:
Lineær vækst forudsætter konstant y-tilvækst pr. x-tilvækst. Eksponentiel vækst forudsætter konstant y-vækstprocent pr. x-tilvækst. Potens vækst forudsætter at konstant y-vækstprocent pr. x-vækstprocent.

2. Projekt Opsparing og Pension

Problemstilling: Hvor meget pension kan en opsparing give?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Vi ønsker at sammenligne pensionsmulighederne ved fire forskellige opsparingsformer. Ops1: Opsparing hjemme med start- og løbende indskud. Ops2: (Annuitets)opsparing i bank med start- og løbende indskud. Ops3: Opsparing i bank med startindskud. Ops4: Opsparing i bank med startindskud på ’TrippelMax’-konto, som giver 3 x rente faldende til max-beløbet, som er 3 x indskud, 10 års binding bortset fra ved dødsfald.

2. Opstilling af det matematiske problem

Ops1: Kr. 2000 plus 1000 kr./år giver differentialligningen	y’= 1000,	yo = 2000
Ops2: Kr. 2000 plus 1000 kr./år plus 12%/år giver diff.ligningen	y’= 0.12*y + 1000,	yo = 2000
Ops3: Kr. 2000 plus renter 12%/år giver differentialligningen	y’= 0.12*y,	yo = 2000
Ops4: Kr. 2000 plus renter 3*12%/år faldende til 3*2000 kr. giver	y’= (0.36-0.36/6000*y)*y,	yo = 2000

En rente r på 36% faldende jævnt indtil y = 6000 beregnes af den lineære ligning: r = 0.36 – 0.36/6000*y.

3. Løsning af det matematiske problem

Opsparingsform 1 giver løsningen og værdi efter 10 år	y = 1000x + 2000,	y = 12.000
Opsparingsform 2 giver løsningen og værdi efter 10 år	y = 10333 * 1.128^x – 8333	y = 25.975
Opsparingsform 3 giver løsningen og værdi efter 10 år	y = 2000 * 1.128^x	y = 6.640
Opsparingsform 4 giver løsningen og værdi efter 10 år	$y = \dfrac{6000*1.433^{\wedge}x}{2+1.433^{\wedge}x}$	y = 5.689

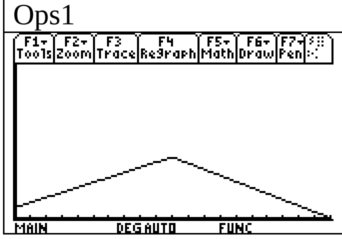
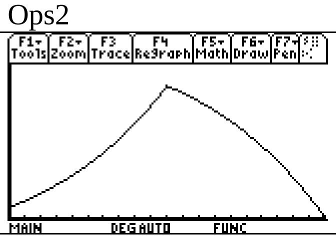
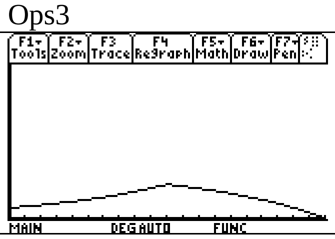
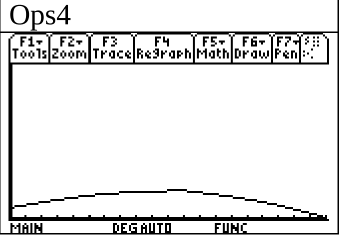
Pensionen udbetales med et konstant årligt beløb c over 10 år. Pension er løsning til differentialligningerne

Ops1:	y’= - c ,	yo = 12.000	y = 12.000 – c*x	(x,y) = (10,0) giver c = 1.200
Ops2:	y’= 0.12*y-c,	yo = 25.975	y = (25975-8.33*c)*1.128^x + 8.33*c	(x,y) = (10,0) giver c = 4.460
Ops3:	y’= 0.12*y-c,	yo = 6.640	y = (6640-8.33*c)*1.128^x + 8.33*c	(x,y) = (10,0) giver c = 1.140
Ops4:	y’= 0.12*y-c,	yo = 5.689	y = (5689-8.33*c)*1.128^x + 8.33*c	(x,y) = (10,0) giver c = 977

Pension i forhold til indskud: *Ops2-4: Gældsafvikling af de penge, banken skylder kunden.*

Ops1: 12000/(2000+10*1000)=1. Ops2: 44600/(2000+10*1000)=3.72. Ops3: 11400/2000 = 5.7. Ops4 = 9770/2000= 4.89

De ti opsparings- og afviklingsår kan grafes med Y1 = when(x<10, 1000x + 2000, 12.000 – 1.200*(x-10)) osv.

Ops1	Ops2	Ops3	Ops4
			

Kontrol af løsninger til differentialligningerne:

Kontrol	Ops1	Ops2	Ops3	Ops4
Venstre side	y’ = (1000x + 2000)’ = 1000	y’ = (10333*1,127^x-8333)’ = 1235*1,127^x	y’ = (2000*1,127^x)’ = 239*1,127^x	$y' = \left(\dfrac{6000*1,433^{\wedge}x}{2+1.433^{\wedge}x}\right)' = \dfrac{4317*1,433^{\wedge}x}{(2+1.433^{\wedge}x)^{\wedge}2}$
Højre side	1000	0.12*y + 1000 = 1240*1,127^x	0.12*y = 240*1,127^x	(0.36-0.36/6000*y)*y $= \dfrac{4320*1,433^{\wedge}x}{(2+1.433^{\wedge}x)^{\wedge}2}$

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Opsparingsmåde 2 gav den højeste pension, og opsparingsmåde 4 gav den laveste pension.
Set i forhold til egenbetalingen er opsparingsmåde 3 bedst.
Opsparingsmåde 4 lyder tillokkende, men er logistisk vækst, som overhales af opsparingsmåde 3 efter 8.3 år.
De fire modeller repræsenterer hhv. lineær vækst, annuitets-vækst, eksponentiel vækst og logistisk vækst.

3. Projekt Broen

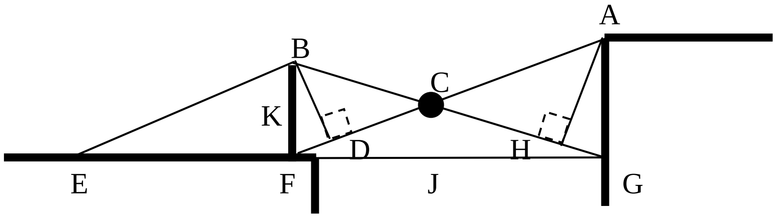
Problemstilling: Hvordan dimensioneres en bro?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

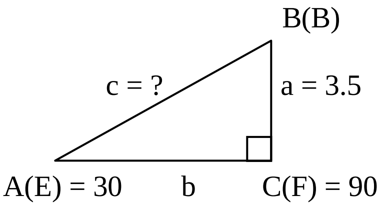
1. Problemet fra virkeligheden

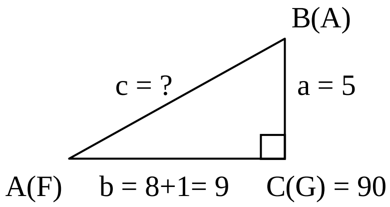
Over en kløft bygges en hængebro af stål fastgjort til klippevæggen og en stolpe. De fem stållængder ønskes bestemt, samt de tre samlingspunkter over kløften. Vinkel E = 30 grader. FB = 3.5m, FG = 8m + 1m = 9m og AG = 5m.



2. Matematisk problem

Af de retvinklede trekanter EFB, GFB og AGF beregnes BE, BG og FA. C bestemmes som skæringspunkt mellem de to rette linier BG og FA. BD og AH fines som afstanden fra punkt til en linie eller som projektion.





I et koordinatsystem med nulpunkt i F fremkommer koordinaterne:
F: (0,0) og A: (9,5), samt
B: (0,3.5) og G: (9,0).
Ligningerne for FA og BG finder ved lineær regression eller ved retnings-vektorerne **FA** = $\binom{9}{5}$ og **BG** = $\binom{9}{-3.5}$

3. Løsning af det matematiske problem

Vi opstiller formelskemaer

Trekant EFB

c = ?	sinA = $\frac{a}{c}$
A = 30 a = 3.5	sin30 = $\frac{3.5}{c}$ sin30*c = 3.5 c = 3.5/sin30 c = 7.0 = EB

NB: Sinus-relationerne kan også bruges

Trekant FGA og GFB

c = ?	$a^2 + b^2 = c^2$
a = 5 b = 9	$5^2 + 9^2 = c^2$ √(106)= c 10.30 = c = AF Tilsvarende findes BG=√(93.25)=9.66

NB: Cosinus-relationerne kan også bruges

Linierne BG og FA

BG: ?	y = ax + b
Test	y = – 0.389x + 3.5 fundet ved lineær reg. F5 Value x=0 giver y = 3.5 F5 Value x=9 giver y = 0 StatPlot passer Tilsvarende findes
FA: ?	y = 0.556x

F5 Intersection giver x = 3.71 og y = 2.06
I trekant FJC er FJ = 3.71 og JC = 2.06
Pythagoras giver: FC = √(3.71^2 + 2.06^2) = 4.24
I trekant BKC er KC =3.71 og KB =3.5-2.06 =1.44
Pythagoras giver: BC = √(3.71^2 + 1.44^2) = 3.98

AH er afstanden fra punktet (9,5) til linien 0.389x + y - 3.5 = 0: $|AH| = \frac{|0.389*9 + 1*5 - 3.5|}{\sqrt{(0.389)^2 + 1^2}} = 4.66$

BD er afstanden fra punktet (0,3.5) til linien -0.556x + y = 0: $|BD| = \frac{|-0.556*0 + 1*3.5|}{\sqrt{(-0.556)^2 + 1^2}} = 3.06$

Pythagoras giver |FD| = 1.70. GH er projektion af **GA** på **GB**: $\frac{|\mathbf{GB}*\mathbf{GA}|}{|\mathbf{GB}|} = \frac{\left|\binom{-9}{3.5}*\binom{0}{5}\right|}{\sqrt{(-9)^2+3.5^2}} = 1.81$

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

De fem stållængder er EB = 7.00 m, FA = 10.30 m, BG = 9.66, BD = 3.06 m og AH = 4.66 m.
Samlingspunkterne er FD = 1.70 m, FC = 4.24 m, GH = 1.81 m og BC = 3.98 m.
Som ekstra kontrol optegnes broen på ternet papir og bygges af piberensere i målestoksforholdet 1:100.

4. Projekt Græsplæne

Problemstilling: Hvordan dimensioneres en trekantet græsplænes indre og ydre cirkler?

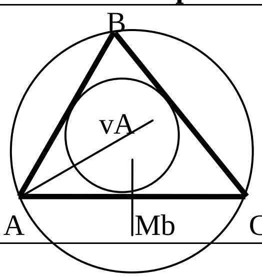
En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

I en trekantet græsplæne er det ene hjørne 60 grader og de hosliggende sider er hhv. 10 og 12 meter. Bestem de andre hjørners størrelser samt længden af den sidste side. I trekanten ønskes den indskrevne cirkel og den omskrevne cirkel bestemt. Den indre cirkel fyldes med fint ral, og det område, som kun findes i den ydre cirkel fyldes med groft ral. Hvor stort et areal er fyldt med hhv. med græs, fint, og groft ral?

2. Matematisk problem

	I trekant ABC er vinkel A = 60, og siderne er AC = 12 og AB = 10. Find vinklerne B og C samt siden BC. Find ligningen for trekantens indskrevne og omskrevne cirkler. Find arealet af hver af cirklerne og af trekanten.

3. Matematisk løsning

Vi opstiller vinklernes punkt-koordinater	A(0,0), C(12,0), B(10cos60,10sin60) = B(5,8.66)
Vi opstiller sidernes vektorer	$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}5\\8.66\end{pmatrix}$, $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix}7\\-8.66\end{pmatrix}$
Vi finder vektorernes længder	BC = √(7^2 + (-8.66)^2) = 11.1, AB = 10, AC = 12
Vi finder vinklerne med solver	$\text{Cos}B = \frac{\mathbf{BA}\bullet\mathbf{BC}}{\lvert\mathbf{BA}\rvert\cdot\lvert\mathbf{BC}\rvert} = \frac{\begin{pmatrix}-5\\-8.66\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}7\\-8.66\end{pmatrix}}{10\cdot 11.1} = \frac{40}{111}$; B = 68.9, C = 51.1
Den omskrevne cirkels centrum skal ligge lige langt fra vinkelspidserne, dvs. på sidernes midtnormaler, hvis ligninger findes på vektorform, og på normalform. Skæringspunktet findes med solver	Midtpunkt AC: (x,y) = ((0+12)/2,(0+0)/2) = (6,0) Retningsvektor for midtnormal Mb = hat(**AC**) = $\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$ Vektorligning for Mb: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$ Normal-ligning for Mb: 12(x-6) + 0(y-0) = 0 Normal-ligning for Mc: 5(x-2.5) + 8.66(y-4.33) = 0 Skæringspunkt: D(x,y) = (6, 2.31) Radius: DA = √(6^2+2.31^2) = 6.43 Ligning: (x-6)^2 + (y-2.31)^2 = 6.43^2
Den indskrevne cirkels centrum skal ligge lige langt fra siderne, dvs. på vinkelhalveringslinierne, hvis ligninger findes på vektorform, og på normalform. Skæringspunktet findes med solver	Retningsvektor for vinkelhalveringslinie vA = $\begin{pmatrix}1\\\tan30\end{pmatrix}$ Vektorligning for vA: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\\tan30\end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-\tan30\\1\end{pmatrix}$ Normalform for vA: -tan30(x-0) + 1(y-0) = 0 Vektorligning for vC: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-\tan25.6\end{pmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\tan25.6\\1\end{pmatrix}$ Normalform for vC: tan25.6(x-12) +1 (y-0) = 0 Skæringspunkt: D(x,y) = (5.44, 3.14), Radius = 3.14 Ligning: (x-5.44)^2 + (y-3.14)^2 = 3.14^2

Areal: Indskreven cirkel: π*3.14^2 = 31.0. Omskreven: π* 6.43^2 = 130. Trekant: ½* $\left|\,\left|\begin{pmatrix}5\\8.66\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}\right|\,\right|$ = 51.6

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Græs: 51.6 – 31.0 = 20.6 kvm. Fint ral: 31.0 kvm. Groft ral: 130 – 51.6 = 78.4 kvm.

5. Projekt Tetraeder-hal

Problemstilling: En arkitekt skal bygge en tetraeder-hal med en kugleformet hvælving.

En matematisk model:

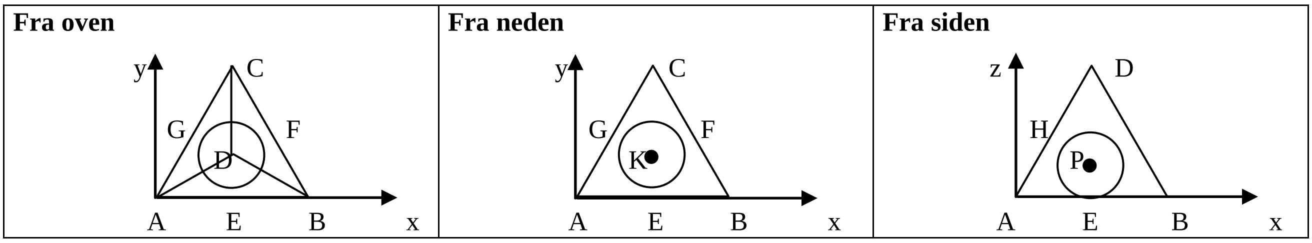
Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

En arkitekt ønsker at finde dimensionerne på en tetraeder-hal, som har en kugleformet hvælving med diameter 38 m.

2. Opstilling af det matematiske problem

I et xyz-koordinatsystem med AB ud af x-aksen får et 10x10x10 tetraeder ABCD koordinaterne A(0,0,0), B(10,0,0), C(5,yC,0) og D(5,yD,zD). Siderne AB, BC, CA, AD's midtpunkter kaldes hhv. E, F, G og H. Trekanterne ABC, ABD, ACD og BCD's medianskæringspunkter kaldes hhv. K, L, M og N. I en ligesidet trekant er vinkelhalveringslinje, median, højde og midtnormal ens. Den ind- og omskrevne cirkel har da samme centrum, som ligger lodret under D.



3. Løsning af det matematiske problem

Bestemmelse af yc = EC i den retvinklede trekant AEC: AC^2 = 10^2 = 5^2 + yc^2 giver yc = √75 = 5√3.

Bestemmelse af yd = EK: Som median-skæring i ΔABC har K koordinater ((0+10+5)/3,(0+0+5√3)/3,0) = (5, 5/√3,0)

Best. af zd= KD: $\mathbf{AD} = \mathbf{AE}+\mathbf{EK}+\mathbf{KD} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5/\sqrt3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\zD\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5/\sqrt3\\zD\end{pmatrix}$; 10^2=5^2+(5/√3)^2+zd^2 gir zd = √(200/3) = 10√(2/3).

<u>Opstilling af vektorer:</u>

$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{AC}=\begin{pmatrix}5\\5\sqrt3\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{AD}=\begin{pmatrix}5\\5/\sqrt3\\10\sqrt{(2/3)}\end{pmatrix}$, $\mathbf{BC}=\begin{pmatrix}-5\\5\sqrt3\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{BD}=\begin{pmatrix}-5\\5/\sqrt3\\10\sqrt{(2/3)}\end{pmatrix}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{CA}+\mathbf{AD}=\begin{pmatrix}-5\\-5\sqrt3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\5/\sqrt3\\10\sqrt{(2/3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-10/\sqrt3\\10\sqrt{(2/3)}\end{pmatrix}$

<u>Opstilling af normalvektorer:</u>

ABC: $\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\5\sqrt3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\50\sqrt3\end{pmatrix} = 50\sqrt3*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 50\sqrt3*\mathbf{n}ABC$, $\mathbf{n}ABD = \begin{pmatrix}0\\-2\sqrt2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{n}ACD = \left(\frac{50}{\sqrt3}\right)*\begin{pmatrix}\sqrt6\\-\sqrt2\\-1\end{pmatrix}$

<u>Opstilling af ligninger for planerne:</u>

<u>ABC</u>: 0*(x-0) + 0*(y-0) + 1*(z-0) = 0 eller <u>z = 0</u>, <u>ABD: -2√2y + 1*z = 0</u>, <u>ACD: √6x - √2y - z = 0</u>.

<u>Bestemmelse af skæringslinie</u> for planerne ABD og ACD (skulle gerne være linien gennem AD, par. test **AD**x**r** = **0**).

Solve (–2√2y + z = 0 and √6x - √2y - z = 0 and z = s) giver: $\begin{pmatrix}s*\sqrt6/4\\s*\sqrt2/4\\s\end{pmatrix}$, dvs. skæringslinie $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t*\begin{pmatrix}\sqrt6\\\sqrt2\\4\end{pmatrix}$, $t = \frac{s}{4}$

<u>Bestemmelse af vinkler:</u>

Vinkel v mellem planerne ABC og ABD: $\cos v = \frac{\mathbf{n}ABC*\mathbf{n}ABD}{|\mathbf{n}ABC|*|\mathbf{n}ABD|} = \frac{1}{1*3} = \frac{1}{3}$ giver v = 70.5

Vinkel u ml. plan ABC og linie AD: $\cos u = \frac{\mathbf{n}ABC*\mathbf{r}}{|\mathbf{n}ABC|*|\mathbf{r}|} = \frac{10\sqrt{(2/3)}}{1*10}$ = √(2/3) giver u = 35.3, dvs. w= 90 – u = 54.7

Kuglens radius = s. Kuglens centrum P: $\mathbf{OP} = \mathbf{OE} + \mathbf{EK} + \mathbf{KP} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\5/\sqrt3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5/\sqrt3\\s\end{pmatrix}$, hvor s < zd.

s = afstand fra P til plan ABD: $s = \frac{|0*5 + (-2\sqrt2)*5/\sqrt3* + 1*s + 0|}{\sqrt{((-2\sqrt2)^2 + 1^2)}} = \frac{10\sqrt{(2/3)} - s}{3}$ da s < 10√(2/3). Solve gir s = 5/√6.

Forstørring: Faktisk/model radius i hvælving = 19/(5/√6) = 19√6/5 = 9.31

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Tetraeder-hallen skal opbygges af fire ligesidede trekanter med sidelængden 9.31*10 = 93.1 meter. Hvælvingen skal påsvejses i et punkt, som ligger 9.31*5/√3 = 26.9 meter over grundliniens midtpunkt. Pladerne skal løftes 70.5 grader fra vandret, og støtte-stolperne i pladernes samlingslinier skal drejes 30 grader fra siden og derefter løftes 54.7 grader.

6. Projekt Konjunktursvingninger

Problemstilling: Hvordan forudsiger en virksomhed konjunktursvingninger?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Erfaringen viser, at en virksomheds ugentlige salgstal er underkastet konjunktursvingninger. På baggrund af forrige års ugentlige salgstal ønskes opstillet en prognose for de kommende to års ugentlige salgstal. Hvornår topper salgstallet, og hvornår bunder det? Hvornår er det over 110 units/uge? Hvor meget forventes solgt i marts måned? Hvornår vender konjunkturerne? Ansættelse og fyring af salgspersonel sker, når væksten i det ugentlige salgstal er 2 u/uge pr. uge under positiv og -2 under negativ konjunktur, hvornår er det?

2. Matematisk problem

På baggrund af tabellen opstilles en formel ved brug af regression. Følgende spørgsmål stilles: Hvad er min og max i perioden fra 0 til 104? Hvornår ligger kurven over 110? Hvad er arealet under kurven i perioden fra uge 9-13 og fra uge 61-65? Hvornår er der vendetangent? Hvornår er kurvens hældning hhv. ±2.0?

Uge x	-50	-40	-30	-20	-10	0
Salg/uge S	100	140	120	90	60	70

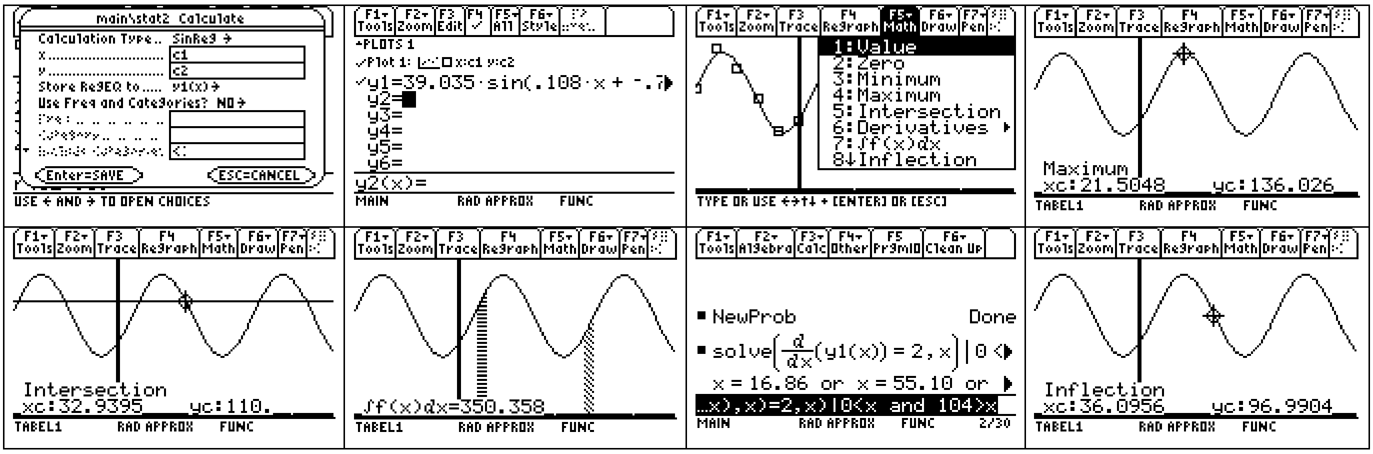
3. Løsning af det matematiske problem

Sinus-regression giver formlen S = 39.035*sin(0.108x – 0.744) + 97.0. Ved grafisk kontrol ses at formlen passer rimeligt godt til tabellens punktpar. Top- og bundpunkter findes ved Graph Maximum og Minimum, og kontrolleres ved ligningen S' = 0. Perioden over 110-niveauet findes ved Graph F5 Intersection. Da Salg/uge-tallet y varierer, findes marts måneds salgstal af differentialligningen y' = S, y(9) = 0, dvs. som arealet under S-kurven fra x = 9 til 13 og fra x = 61 til 65. Konjunkturvending i vendetangenten findes ved Graph F5 Inflection. Ansættelses- og fyringstidspunkter findes ved at løse ligningen S(x)' = 2 og S' = -2.

Alternativt kan hhv. hældningen og arealet bestemmes ved hhv. sammensat differentiation og integration:

$S(x)' = (39.035*\sin(0.108x - 0.744) + 97)' = 39.035*0.108*\cos(0.108x - 0.744) = 4.22*\cos(0.108x - 0.744)$

$\int S(x)dx = \int(39.035*\sin(0.108x-0.744)+97)dx = -39.035/0.108*\cos(0.108x-0.744)+97x = -361.44*\cos(0.108x-0.744)+97x$



4. Løsning af problemet fra virkeligheden

En prognose for de kommende to års ugentlige salgstal opstilles ved hjælp af sinus-regression.
Af denne ses, at det ugentlige salgstal forventes at toppe på 136 u/uge i uge 21 og 80, og bunde på 58u/uge i uge 51. Endvidere ses, at det ugentlige salgstal forventes at ligge over 110 u/uge i perioden fra uge 10-33 og fra uge 68-91. Endvidere ses, at det ugentlige salgstal for 4 uger i marts måned de to kommende år forventes at ligge på hhv. 454 u. og 350 u. Positiv og negativ konjunktur aflæses som positiv og negativ krumning.
Dvs. konjunkturerne forventes at vende i ugerne 7 og 36 og 65 og 94 med positiv konjunktur fra uge 0 til uge 7 og fra uge 36 til uge 65 og fra uge 94 til uge 104, og med negativ konjunktur fra uge 7 til uge 36 og fra uge 65 til 94. Dvs. fyringer forventes i ugerne 26 og 84, og ansættelser forventes i uge 55.

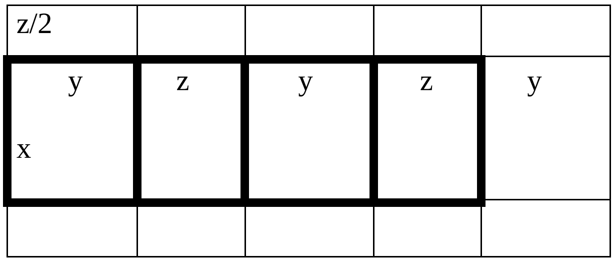
7. Projekt Vinkarton

Problemstilling: Hvordan skal en 3 liters vinkarton dimensioneres for at minimere kartonen?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden
Vin kan sælges i flaske eller i karton. Til en 3liters karton skal udskæres et stykke karton.



2. Opstilling af det matematiske problem
Vi indfører betegnelser for de forskellige sider målt i dm, og opstiller ligningen for kartonens volumen V målt i dm^3 = liter og for det brugte kartonareal K:
V = x·y·z = 3 og K = (x + 2·z/2) · (3y + 2z)

3. Løsning af det matematiske problem
Vi bruger formelregnerens expand til at samle de to formler:
K = expand((x + 2·z/2) · (3y + 2z)) giver K = 3xy + 2xz + 3yz + 2z^2
I denne formel indsættes nu z = 3/(x*y) så K-tallet kun afhænger af to variable x og y:

K = 3xy + 2xz + 3yz + 2z^2 | z = 3/(x·y) giver K = $3\cdot x\cdot y + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2\cdot y\text{^}2}$

Scenarium A. Vi antager at x skal være dobbelt så stor som y, dvs. at y = 0.5*x
Indsættes denne begrænsning fås

K = $3\cdot x\cdot y + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2\cdot y\text{^}2}$ | y = 0.5*x giver K = 1.5x^2 + $\frac{21}{x} + \frac{72}{x\text{^}4}$, og $\frac{dK}{dx} = 3x - \frac{21}{x\text{^}2} - \frac{288}{x\text{^}5} = 0$ for x = 2.4

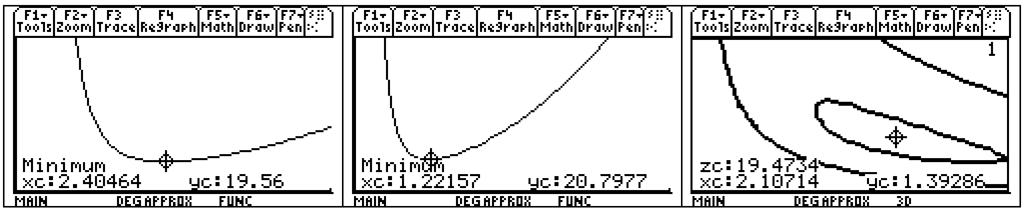
Vi grafer K-formlen i et vindue med DM =]0,5] og VM =]0, 100] og finder minimumspunktet:
x = 2.4 og K = 19.56, dvs. y = 0.5*x = 0.5*2.4 = 1.2, og z = 3/(2.4*1.2) = 1.0

Scenarium B. Vi antager at x skal være halvt så stor som y, dvs. at y = 2*x
Indsættes denne begrænsning fås

K = $3xy + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2\cdot y\text{^}2}$ | y = 2x giver K = 6x^2 + $\frac{12}{x} + \frac{4.5}{x\text{^}4}$, og $\frac{dK}{dx} = 12x - \frac{12}{x\text{^}2} - \frac{18}{x\text{^}5} = 0$ for x = 1.2

Vi grafer K-formlen i et vindue med DM = [0,5] og VM = [0, 100] og finder minimumspunktet:
x = 1.2 og K = 20.80, dvs. y = 2x = 2*1.2 = 2.4 , og z = 3/(1.2*2.4) = 1.0

Faktisk løsning. Vi benytter metoden til at bestemme lokale ekstrema for formler af to variable z = f(x,y).
Akse-hældningerne er Kx = dK/dx = 3y – 9/x^2 – 35/(x^3·y^2) og Ky = dK/dy = 3x – 6/y^2 – 35/(x^2·y^3).
Nul-hældninger giver to ligninger Kx = 0 og Ky = 0 med løsningen (xo,yo) = (2.08,1.39), og K = 19.47
Krumningerne: Kxx = 18/x^3+108/(x^4·y^2), Kyy = 12/y^3+108/(x^2·y^4), Kxy= Kyx= 3+72/(x^3·y^3)
I (xo,yo) er Jacobi-determinanten = Kxx·Kyy - Kxy·Kyx = 5·11.25 - 6·6 = 20.25 >0. Da Kxx=5>0 er (xo,yo) lok. min.



Scenarium A　　Scenarium B　　Uden begrænsninger, konturlinier
(Konturlinier: Mode 3D, K ind på y-liste. Window x: 0.5-3, y: 0.5-3, z: 0-30, F1 9 Format: Rect, Off, Off, Countour level. F3 Trace)

4. Løsning af problemet fra virkeligheden
Vi ser, at den minimale kartonmængde er lidt over 19 dm^3. Ved hjælp af konturlinier eller et Excel-regneark kan bestemmes, at den optimale løsning er x = 2.1 og y = 1.4 og z = 1.0, hvilket giver et K-tal på 19.47 dm^3.

(Bemærk: Som graf giver formlen K = $3\cdot x\cdot y + \frac{9}{x} + \frac{6}{y} + \frac{18}{x\text{^}2\cdot y\text{^}2}$ ikke en 2D-kurve, men en 3D-flade.
Ved gennemgangning med x^5 fås 6.te gradsligningen dK/dx = 0 = 3x^6 – 21x^3 – 288, som kan løses med h = x^3).

8. Projekt Kørsel

Problemstilling: Hvor langt, hvor længe og hvordan kørte Peter?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Ved kørsel svarer farten 100 km/t til 100*1000/(60*60) = 27.8 m/s. Under Peters kørsel blev farten målt hvert 5'te sekund til hhv. 10m/s, 30m/s, 20m/s, 40m/s og 15m/s. Hvornår begyndte og sluttede kørslen? Hvad var farten efter 12sekunder? Hvornår var farten 25m/s? Hvornår blev der accelereret? Hvornår blev der bremset? Hvad var den maksimale fart? Hvad var accelerationen i begyndelsen af de forskellige 5sekunders intervaller? Hvor mange meter kørtes der i disse intervaller? Hvor langt kørtes i alt?

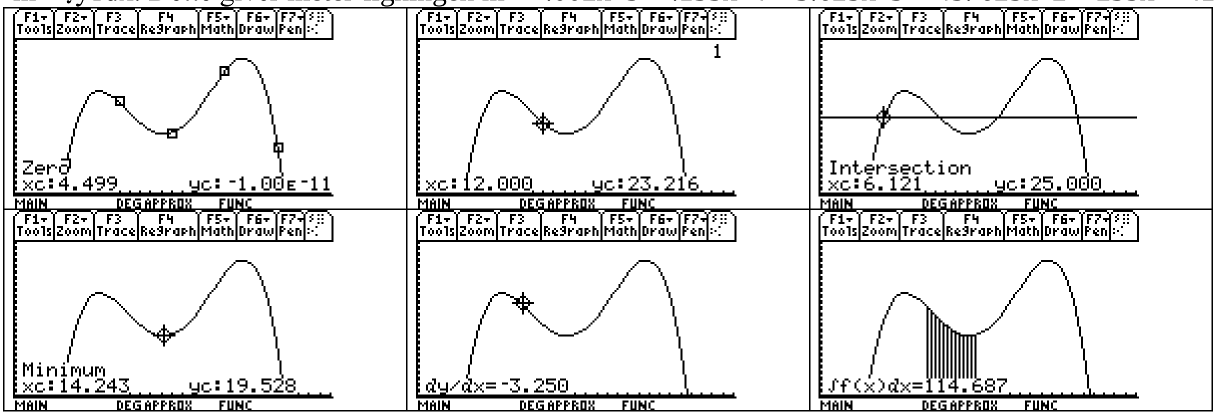
2. Opstilling af det matematiske problem

Vi opstiller en tabel over tid x og fart y.
Tabellens gyldighedsområde (definitionsmængde) antages at være $0<x<30$.

Tid x sek	Fart y m/s
5	10
10	30
15	20
20	40
25	15

3. Løsning af det matematiske problem

På TI-89 indlægges x-tal og y-tal i data-matrix eller som listerne L1 og L2. Med 5 talpar vælges kvartisk regression (et 4.grads polynomium med en 3-dobbelt parabel), der giver formlen $y = -0.009x^4 + 0.53x^3 - 10.875x^2 + 91.25x - 235$, som indlægges som y1(x). Herefter besvares de stillede spørgsmål ved brug af ligningsskemaer og grafisk aflæsning. Start- og sluttidspunkt findes med ''F5 Zero'. Y-tal bestemmes med 'F5 Value'. X-tal bestemmes med 'F5 Intersection'. Maximum og minimum med F5 Maximum/Minimum'. Acceleration fås som hældning på fartkurven med 'F5 dy/dx'.
Da fart = sted' fås det samlede meter-tal m ved at løse differentialligningen m' = y1, m(4.5) = 0, dvs. $m = \int y1dx$. Dette giver meter-ligningen $m = -.002x^5 + .133x^4 – 3.625x^3 + 45.625x^2 – 235x + 412.91$.



y = ?	y = y1(x)
x=12	y = y1(12) = 3.667
Test	Grafisk aflæsning med F5 Value og x = 12 giver y 23.216

x = ?	y = y1(x)
y = 25	F2 solve (y1(x) = 25,x) giver x = 6.12, 11.44, 16.86 og 24.47
Test1	y1(6.12) = 25, y1(11.44)= 25 osv.
Test2	Grafisk aflæsning med y2 = 25 giver x = 6.12, 11.44, 16.86 og 24.47 (F5 intersection)

ymax=?	y = y1(x)
	Calc maximum Giver y = 7.042 ved x = 5.5
Test	dy/dx = 0 ved x = 5.5

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Kørslen begyndte efter 4.50 sek og sluttede efter 25.6 sek. Efter 12sekunder var farten 23.2 m/s. Farten var 25m/s efter 6.12 sek, 11.4 sek, 16.9 sek og 24.5 sek. Der blev accelereret i tids-intervallerne (4.50; 8.19) og (14.2; 21.7). Der blev bremset i tids-intervallerne (8.19;14.2) og (21.7;25.6). Max-fart var 44.3 m/s = 159 km/t. efter 21.7 sek. I de forskellige tids-intervaller (5;10), (10;15), (15;20) og (20;25) kørtes der hhv. 143 m, 115 m, 143 m og 190 m. Accelerationen i enderne af disse intervaller var hhv. 17.8, -3.25, 1.25, 4.25, -21.3 m/s^2. I alt kørtes der 597 m.

Bemærkning. På baggrund af de netop nævnte accelerationstal kan opstilles en tabel med 5 punktpar, som med kvartisk regression giver accelerationsligningen $a = v' = m'' = -0.036x^3 + 1.59x^2 – 21.75x + 91.25$, med begyndelsesbetingelser v = m' = 0 og m = 0 for x = 4.5. Løses denne differentialligningen fås de ovenstående v- og m-ligninger.

9. Projekt Bispen og Newton spiller golf

Problemstilling: Hvordan kan Bispen og Newton ramme et golf-hul 40 meter ude?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Newton og hans ven Bispen står på kanten af taget på Newtons flade hus og diskuterer, hvordan man kan ramme et golf-hul 40 meter ude. Husets kant befinder sig 7.5 meter ude og tagets højde er 3 m.

2. Opstilling af det matematiske problem

Vi indlægger et koordinatsystem, så Newtons golfbold befinder sig i punktet (x,y) = (7.5,3), og golfhullet i punktet (40,0). Hvilken lodret og vandret hastighed skal Newton give bolden, for at der bliver 'hole-in-one'.

3. Løsning af det matematiske problem

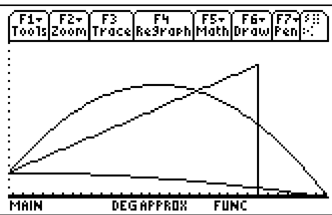
Bispen: Golfbolden vil adlyde Herrens vilje. Først vil den bevæge sig i en lige linie, indtil Herren bestemmer, at nu skal den falde, og da falder den lige ned. Så hvis man vil have, at den skal begynde sit fald lige over golfhullet, må man tro, gå i kirke og bede til Herren. Uden Herrens nåde rammer man aldrig. Se her.
Newton: Jeg vælger i stedet at vide, gå i skole, og lære vækstregning, calculus, så jeg kan løse første og anden ordens differentialligninger med integralregning. Så kan jeg se, at jeg vil få 'hole-in-one ved at tildele bolden en lodret begyndelseshastighed på 15m/s, og en vandret begyndelseshastighed på 10m/s:

Vandret bevægelse	a = 0, a = v', dvs. differentialligning **v' = 0, v(0) = 10**	Ingen vandret **kraft**: ingen vandret **acceleration**
	Løsning: v = 10, og x'=v, dvs. diff.lign. **x'=10, x(0)=7.5**	Acceleration = hastighed diff., a = (m/s)/s
	Løsning: x = 10t + 7.5, dvs. t = (x – 7.5)/10	Hastighed = sted differentieret, v = m/s
Alternativ	**x'' = 0, x'(0) = 10, x(0) = 7.5** giver x = 10·t + 7.5	Acceleration = sted dobbelt-differentieret
Lodret bevægelse	a = -9.8, a = v', dvs. diff.lign. **v' = -9.8, v(0) = 15**	Lodret acceleration = tyngdeacceleration 9.8
	Løsning: v = -9.8·t + 15, og y' = v Dvs. diff. lign. **y' = -9.8·t + 15, y(0) = 3**	Acceleration = hastighed differentieret
	Løsning: y = -4.9·t^2 + 15·t + 3	Hastighed = sted differentieret
Alternativ	**y'' = -9.8, y'(0) = 15, y(0) = 3** giver y = -4.9t^2+15t+3	Acceleration = sted dobbelt-differentieret
Banekurve	y = -4.9·t^2+15·t + 3 | t = (x – 7.5)/10 giver	y = -0.049·x^2 + 2.235·x – 11.001, en parabel
Nedslag y=0	Solve (0 = -0.049 ·x^2 + 2.235·x – 11.00,x) giver	x = 40 (og x = 5.61)

Newton: Golfbolden følger, ikke Herrens vilje, men tyngdens vilje, tyngdekraften. Og da en kraft vil ændre bevægelsen, kan jeg ved hjælp af ændringsregning, som jeg selv har opfundet, sørge for, at jeg får 'hole-in-one'.

Affyrings-fart & vinkel: √(15^2+10^2) = 18.0, tan-1(15/10), u = 56.3. Flyvetid: 40 = 10t + 7.5, t = 3.25 sek.
Nedslagshastigheder: x'(3.25) = 10, y'(3.25) = -9.8·3.25 + 15 = -16.9.
Nedslags-fart og vinkel: √(16.9^2+10^2) = 19.6, tan-1(16.9/10), u = 59.4.

Bispen: Skyder du bolden opad, påkalder du Herrens opmærksomhed. Åbenbart er Herren dig nådig, ikke mig.
Newton: Jeg kan da også skyde bolden ligeud med en vandret begyndelseshastighed på c m/s.

Vandret bevægelse	Ingen vandret acceleration: a = x'' = 0 Vandret starthastighed = c Differentialligning: **x'' = 0, x'(0) = c, x(0) = 7.5** Løsning: x = c·t + 7.5, dvs. t = (x – 7.5)/c	
Lodret bevægelse	Lodret acc. = tyngdeacceleration **y'' = -9.8, y'(0) = 0, y(0) = 3** giver y = -4.9t^2 + 3 y'': en andenordens differentialligning	
Banekurve:	y = -4.9·t^2 + 3 | t = (x – 7.5)/c giver	y = -4.9/c^2*(x-7.5)^2 + 3
Finde c	Solve (0 = -4.9/c^2*(40-7.5)^2 + 3,c) giver	c = 41.54
Banekurve:	y = -4.9·t^2 + 3 | t = (x – 7.5)/41.54 giver	y = -0.00284 ·x^2 + 0.0426·x + 2.840
Nedslag y=0	Solve (0 = -0.00284 ·x^2 + 0.0426·x + 2.840, x) giver	x = 40 (og x = -25)

4. Løsning af problemet fra virkeligheden

Golf-hullet kan nås ved vandret hhv. lodret starthastighed 10m/s hhv. 15m/s; eller ved 41.5m/s hhv. 0m/s.
Kirken sagde, at månen bevæger sig mellem stjernerne og adlyder en metafysisk uforudsigelig vilje.
Newton bestred dette: Månen bevæger sig ikke mellem stjernerne, den falder mod jorden ligesom æblet. Begge adlyder en fysisk vilje, tyngdekraften, der er forudsigelig, fordi den kan sættes på formel, hvorefter banekurven kan beregnes ved at løse differentialeligninger ved at finde stamfunktioner. Herved kan Keplers love testes med bolde i stedet for med planeter.

10. Projekt Spørgeskema

Problemstilling: Hvordan typer informationer kan man få af spørgeskemaer?

En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden
Hvordan kan data fra en spørgeskemaundersøgelse bearbejdes, så resultaterne kan præsenteres overskueligt.

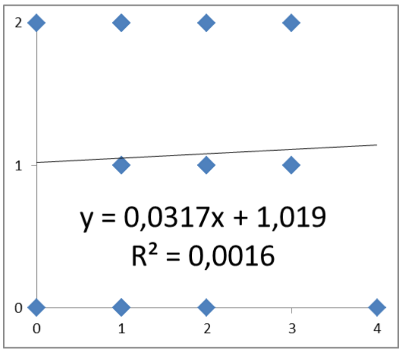
2. Opstilling af det matematiske problem
I spørgeskemaundersøgelse er indsamlet 30 svar, som indtastes i en tabel (de første 18 svar vist). Spørgsmål 1-4 er grads-spørgsmål 'Hvor enig er du?' (kvantitative data), og 5-7 er gruppe-spørgsmål 'ja/nej', køn (kvalitative data). Kvantitative data kan evt. grupperes. To kvantitative variable sammenlignes ved korrelation, ellers ved forskelsvurdering (ki^2-test).

Tabel med svar (database)

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
#1	1	2	1	2	k	j	a
#2	2	0	0	1	m	j	a
#3	1	2	0	2	m	n	a
#4	0	0	2	1	m	j	a
#5	1	1	2	1	k	j	a
#6	3	2	3	3	k	j	a
#7	0	0	1	2	k	j	a
#8	1	1	2	1	k	n	a
#9	3	2	2	3	m	n	a
#10	3	1	3	2	m	n	a
#11	1	2	1	2	k	j	b
#12	1	0	2	2	k	n	a
#13	1	2	2	2	k	j	a
#14	0	2	2	0	k	n	a
#15	1	0	1	1	m	n	b
#16	4	2	2	3	k	j	b
#17	2	1	2	2	k	n	a
#18	1	1	3	3	k	j	b

Korrelation mellem s1 og s2

Korrelation: Positiv, men lille (hældning 0,032) og svag (troværdighed 0.2%)



Krydstabel (pivot-tabel) s2 og s5

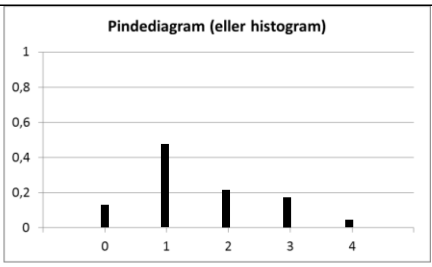
Antal	s5		
s2	k	m	Total
1	**3**	**6**	9
2	**7**	**3**	10
3	**8**	**3**	11
Total	18	12	30

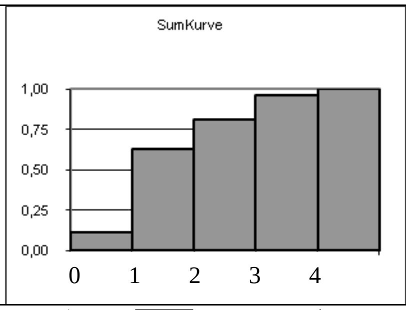
3. Løsning af det matematiske problem
A. Kvantitative data opstilles i tabeller, hvoraf beregnes middeltal (hvis alle observationer var ens) og spredning (hvis alle afvigelser fra middeltallet var ens); eller kvartilsættet bestående af median og 1. og 3. kvartil med tilhørende box-plot.

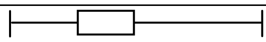
Obs	Hyp	Frek	Kum	Gns.
0	4	0.133	0.133	0
1	14	0.467	0.600	0.467
2	6	0.2	0.8	0.4
3	5	0.167	0.967	0.5
4	1	0.033	1.000	0.132

Gennemsnit = 1.50, Spredning = 1.04

1.kvarti l = 1, median = 1, 3.kvartil = 2







B. Kvantitative data sammenlignes i krydstabeller, hvoraf kan beregnes korrelation.

C. Kvantitative/kvalitative (eller kval/kval) data sammenlignes i krydstabeller, f.eks. mening med gruppe, s2 med s5. Vi tilføjer en kolonne med den gennemsnitlige procent som giver to kolonner med de forventede antal svar. Så to kolonner med ki^2-forskelstallene beregnet som ki^2 =(observeret - forventet)^2/forventet. Det samlede ki^2-forskelstal er 3.83. Antallet af frihedsgrader er (3-1)*(2-1) = 2. Med en kritisk værdi på 5.991 ved et 5% konfidensinterval kan hypotesen 'Grupperne er ikke forskellige' ikke forkastes, hvad den ville kunne ved samme mønster ved 10 gange så mange svar.

	Observeret		
	k	m	Total
1	**3**	**6**	9
2	**7**	**3**	10
3	**8**	**3**	11
Total	18	12	30

	Observeret			Forventet			Ki^2-afvigelser		
	k	m	Total	Pct.	k	m	k	m	
1	**3**	**6**	9	0,300	**5,4**	**3,6**	1,07	1,60	
2	**7**	**3**	10	0,333	**6**	**4**	0,17	0,25	
3	**8**	**3**	11	0,367	**6,6**	**4,4**	0,30	0,45	
Total	18	12	30				1,53	2,30	**3,83**

4. Løsning af problemet fra virkeligheden
Resultaterne fra en spørgeskemaundersøgelse kan præsenteres med en median- og gennemsnitsbeskrivelse. Sammenhænge mellem svarene kan undersøges med korrelation eller med ki^2-tests i krydstabeller.

11. Projekt Hypotesetest

Problemstilling: Hvordan kan vi teste hypotesen: Dette tetraeder er symmetrisk?

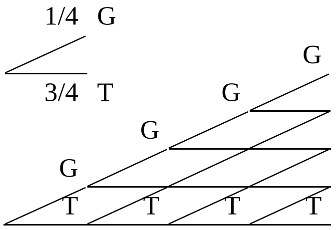
En matematisk model:

Matematik	Problem	→	Løsning
	↑		↓
Virkelighed	Problem		Løsning

1. Problemet fra virkeligheden

Ved 4 kast med et symmetrisk tetraeder kan resultatet '1' forekomme 0, 1, 2, 3 eller 4 gange med 31.6% chance for 0 gange. Men er tetraederet symmetrisk, så gevinstchancen for 1er er ¼? Vi udfører 4-serien 40 gange, og sammenligner vore eksperimentelle data 16, 14, 7, 2, 1 med de teoretiske forventninger for at teste, om tetraederet er symmetrisk.

2. Opstilling af det matematiske problem



Gevinst	Resultat	Gennemløb	Sandsynlighed	TIStat.Binompdf(4,0.25)
4	4 G og 0 T	1	1*(1/4)^4*(3/4)^0	0,004
3	3 G og 1 T	4	4*(1/4)^3*(3/4)^1	0,047
2	2 G og 2 T	6	6*(1/4)^2*(3/4)^2	0,211
1	1 G og 3 T	4	4*(1/4)^1*(3/4)^3	0,422
0	0 G og 4 T	1	1*(1/4)^0*(3/4)^4	0.316

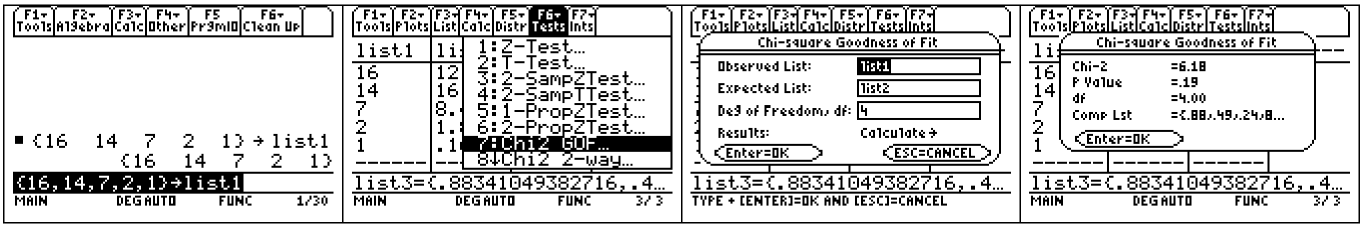
Ved fire gentagelser af et eksperiment med to udfald Gevinst og Tab optræder binomialtal, som nCr(4,2) = 6, samt binomialfordelingen TIStat.Binompdf(4,0.25) med n=4 (4 gentagelser) og p=0.25 (gevinstchance 25%).
Vi ser, at sandsynligheden for at vinde r gange af n er P(n,r) = nCr * p^r * (1-p)^(n-r).
Vi tester nul-hypotesen 'sandsynligheden for udfaldet 1 er 25%.'

3. Løsning af det matematiske problem

Vi opretter to kolonner.
Kolonne 1 indeholder de observerede hyppigheder To.
Kolonne 2 indeholder med de forventede hyppigheder Te = 40*TIStat.Binompdf(4,0.25).
Kolonne 3 indeholder forskels-tallene (ki^2-tallene) beregnet som ki^2 = Σ(To-Te)^2/Te.
Dette giver et samlet ki^2 forskelstal på 6.18.

Gev.	Obs.	Forv.	Afv.	Afv.^2	Ki^2
4	**1**	**0,16**	0,84	0,71	4,56
3	**2**	**1,88**	0,13	0,02	0,01
2	**7**	**8,44**	-1,44	2,07	0,24
1	**14**	**16,88**	-2,88	8,27	0,49
0	**16**	**12,66**	3,34	11,18	0,88
					6,18

Med CAS importeres de to lister til formelregnerens Stats/List-editor. Så udføres en ki^2 GOF (Goodness of Fit) test, som dels viser de enkelte ki^2 tal, samt det samlede ki^2-tal 6.18.



Er de observerede og forventede tal ens, vil ki^2 = 0. Så der er forskel på de to tal. Spørgsmålet er om forskellen er så stor, at den er kritisk. De kritiske forskelstal findes i en ki^2-tabel (5% signifikans).

Først findes antallet af frihedsgrader. Med 5 kategorier kan de 4 variere frit, hvorimod den femte altid vil kunne beregnes som 'resten'. Tilsvarende vandret: med to kategorier kan kategori 1 variere, men ikke den sidste, der altid vil være resten. Så antallet af frihedsgrader vil kunne beregnes af formlen frihedsgrader = (rækker – 1)*(kolonner – 1).
I vores tilfælde gælder da frihedsgrader = (5 – 1)*(2 – 1) = 4. Af tabellen ses, at ved 4 frihedsgrader er den kritiske grænse 9.49, hvis vi ønsker 5% signifikans (fejl-sandsynlighed), og dermed 95% sandsynlighed for et korrekt svar.

Frihedsgrader	1	2	3	4	5	6	7	8
Kritisk forskel	3.841	5.991	7.815	9.488	11.07	12.592	14.067	15.507

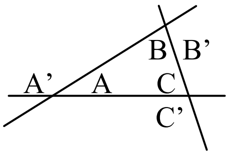
4. Løsning af problemet fra virkeligheden

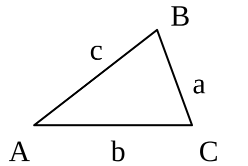
Hypotesen 'dette tetraeder er symmetrisk' testes med 40 udførelser af en 4-serie kast. Vi forventer at få tal, som har binomialfordelingens form, men må konstatere, at vore målinger afviger fra disse. Afvigelsen måles med en ki^2 GOF test på 5% signifikansniveau, og denne viser at forskellen mellem to talsæt er 6.18, dvs. mindre end den kritiske forskelsværdi på 9.49 ved 4 frihedsgrader. Vi kan derfor konkludere, at forskellen ikke er kritisk, så vor nul-hypotese accepteres på et 5%-signifikansniveau, dvs. at der er 95% chance for at undersøgelsens svar er korrekt. Havde den samme fordeling vist sig ved 80 gentagelser, havde ki^2 tallet været det dobbelte, og hypotesen måtte da forkastes.

12. Historisk matematik med klassiske beviser

A. Antikken.

Matematikken (læren om mange) opstår samtidig med overgang fra jæger-samler til agerbrugskultur i floddalene (Nilen (Ægypten), Eufrat-Tigris (Arabien), Indus (Indien), den gule flod (Kina). Handel mellem Europas højland og Østens lavlande består af sølv i bytte med især krydderi og silke. Grækernes sølv finansierede den græske kultur. Grækerne talte med bogstaver: alfa, beta, gamma og kan ikke udregne plusstykker. I stedet udvikler grækerne den tal-frie geometri med beviser, påbegyndt med Pythagoras to beviser: A+B+C = 180 og a^2 + b^2 = c^2. Trigonometri behøver tre ligninger til at beregne de tre ukendte sider, og ekstra ligninger kommer fra arabernes sinus, cosinus og tangens. Romerne talte på fingrene og kan ikke udregne gangestykker. Araberne tæller ved at ti-bundte, så et antal angives som f.eks. 234, dvs. 2 ti-bundter af ti-bundter plus 3 ti-bundter plus 4 ubundtede, eller som et polynomium: 2*10^2 + 3*10 + 4.





Pythagoras: A+B+C=180, A+A'=180 (supplementvinkler),
A+B+C+A'+B'+C' = 3*180, men A'+B'+C'=360.
Vektorer: **AB** = **AC** + **CB**, med c = |**AB**| er **AB*AB** = c^2
AB*AB = (**AC**+**CB**)*(**AC**+**CB**)= **AC***AC + **CB***CB – 2***CA*CB**
Dvs. c^2 = b^2 + a^2 – 2*a*b*cos C = b^2 + a^2 hvis C = 90.

B. Renæssancen.

Grækernes sølvminer blev tømt på 100 år. Romernes spanske sølvminer blev erobret af vandaler (Andalusien = Vandal-landet, Vandal = Vendel?). Kort efter år 1000 findes sølv i Harzen (dollar = thaler). Sølvet bringes til Norditalien, og med arabiske mellemhandlerne genopstår øst-handlen. Den opsamlede kapital skaber bankvæsen i Italien, som udskifter romertal med arabertal, og udvikler gange, potens, rod og logaritme.

Kapital: K = Ko*(1 + R) = Ko*(1 + r)^n = Ko*e^(kn). Dvs. e^k = 1+r, eller k = ln(1+r). Og R = n*r + rentesrente
Samlet rente R: 1+R = (1+r)^n. Fordobling: 2*Ko = Ko*(1 + r)^x, dvs. x = ln2/ln(1+r).
Kontinuert rentetilskrivning af 100%: 1+R = (1+1/n)^n = e, n stor: (1+1/n)^n -> e = 2.7182818 for n-> ∞.
Opsparing med konstant indskud på a kr og rente r%: På konto 1 indsættes a/r, den årlige rente a/r*r = a overføres til konto 2 som fast årligt indskud a sammen med årlig rente til konto 2. Konto 2 vil da indeholde dels en opsparing A, dels den samlede rente R af a/r, altså a/r*R. Dvs. A = a/r*R eller A/a = R/r.

C. Den moderne tid.

Englænderne kan sejle og erobre spansk sølv, men skal sejle på åbent hav til Inden for at undgå Portugals befæstning af Afrikas kyst. Breddegrad bestemmes let (nordstjerne og sydkors). Længdegraden bestemmes ved månens position mellem stjernerne, men hvordan bevæger månen sig? Kirken: Mellem stjernerne, følgende den metafysiske Herres uberegnelige vilje, hvorfor vi blot skal tro, bede og gå i kirke. Descartes har opfundet koordinatsystemet, som koordinerer geometri og algebra, så man kan regne på kurver, og grafe ligninger. Med dette værktøj og på baggrund af Brahes tabeller over månens bevægelse siger Newton: Månen falder mod jorden som æblet, begge følgende deres egen fysiske vilje, der er beregnelig idet viljen (eller kraften) ÆNDRER bevægelse, hvorfor der er behov for at udvikle ændringsregning (differential- og integralregning), så man kan løse ændringsligninger (differentialligninger) ved integration. Englænderne foretrækker dog bomuld for silke, og flytter bomuldsproduktionen til Nordamerika, hvilket skaber en sølvfri bytte-økonomi, trekantshandel (Bomuld <-> Jern & Våben <-> Arbejdskraft (sorte slaver) <-> Bomuld <-> osv.) Samtidig udvikles Oplysningstiden: Når æbler følger egen vilje og ikke en metafysisk formynders, kan mennesker gøre det samme og erstatte metafysisk formynderi med demokrati. To oprettes, et i USA og et i Frankrig. Demokratiet sejrer i WW2, som udvikler computere, for at styre våbenforsyningen til kamppladser.

Ændringsregning: Et rektangel har to sider f og g, dvs. med areal A = f*g (antagelse f > 0, g > 0, df > 0, dg > 0).
Ændres x med dx, ændres f med df og g med dg, dvs. arealet A ændres med tre stykker df*g + f*dg + df*dg.
Ændringsforholdet dA/dx bliver da: dA/dx = df/dx*g + f*dg/dx + df/dx*dg = f'*g + f*g' (+f'*dg) da dg -> 0 for dx->0.
Dvs. dA/dx = A' = (f*g)' = f'*g + f*g'.

Med x^2 = x*x = fås (x^2)' = (x*x)' = x'*x + x*x' = 2x. Med x^3 = x*x^2 fås (x^3)' = 3x^2. Med x^4 = x*x^3 osv.

Med d(x^(a+1))/dx = (a+1)*x^a gælder ved overflytning af differentiation som det modsatte, dvs. integration:
x^(a+1) = (a+1) ∫ x^a dx, da gange-konstanter hverken differentieres eller integreres, ∫ x^a dx= x^(a+1)/(a+1).

Hvis x vokser med dx, vokser arealet A under kurven y=f(x) med strimlen dA = højde*bredde = f(x)*dx. Det samlede areal fås da ved at opsummere strimlerne, ∫f(x)dx, eller af ændringsligningen dA = f(x) dx, eller dA/dx = f(x), eller A(x)' = f(x), dvs. som stamfunktion F(x) til f(x). Så arealet fra a til b = tilvæksten i arealet fra a til b = ΔF = F(b) – F(a).

På en enhedscirkel vil en lille x-tilvækst dx skabe en lille ensvinklet vækstrekant med vandret side –d(cosx), lodret side d(sin x), og skrå side dx. Af tilvækst-trekanten fås da: d(sinx)/dx = cosx og d(cosx)/dx = -sinx