Afviste indlæg

Disse indlæg er alle blevet afvist af LMFK-bladet i marts 2015

Brøkparadoksets løsning

Brøkparadokset kan illustreres med en dialog. Læreren spørger: ”Hvad er en over to plus to over tre?” En elev siger: ”Ja, en og to er tre, og to og tre er fem, så svaret må være tre over fem.” ”Nej,” svarer læreren. ”Brøker kan først adderes, når deres nævner er ens. Derfor skal brøken en over to forlænges til tre over seks; og brøken to over tre skal forlænges til fire over seks. Nu har begge brøker nævneren seks, og de kan derfor adderes til brøken syv over seks!”

”Jamen, ét æble blandt to frugter plus to æbler blandt tre frugter er da tre æbler blandt fem frugter, og kan da aldrig give syv æbler blandt seks frugter?” Hvortil læreren bemærker: ”Kære klasse, hvis man vil bestå eksamen, så er svaret syv over seks. Og som jeg netop har vist, har folkeskolen ikke formået at lære jeg brøkregning, så før vi går i gang med matematikkens smukke beviser, er jeg åbenbart nødt til at give jer et kursus i brøker, som vi her kalder rationale tal.”

Set fra matematikkens synsvinkel fremkommer brøker ved at udvide de naturlige tal, først med negative tal, så med rationale tal og så med reelle tal. Alle tal kan adderes, og rationale tal adderes som beskrevet ovenfor.

Addition har dog problemer allerede ved naturlige tal. Udsagnet ’2*3=6’ er sandt både i og uden for klasserummet, da det er ufalsificerbart: 2 treere kan altid omtælles til 6 enere. I modsætning hertil er udsagnet ’2+3=5’ kun sandt i klasserummet, idet den som brøkparadokset hurtigt bliver falsificeret udenfor af eksempler som 2uger + 3 dage = 17 dage, 2m + 3cm = 203cm, osv.

Førskolebørn kender løsningen. ”Hvor gammel bliver du næste gang?” ” Fire,” svarer barnet og viser fire fingre. Vi viser også fire fingre, men holdt sammen to og to. ”Nej det er ikke fire, det er to toere.”

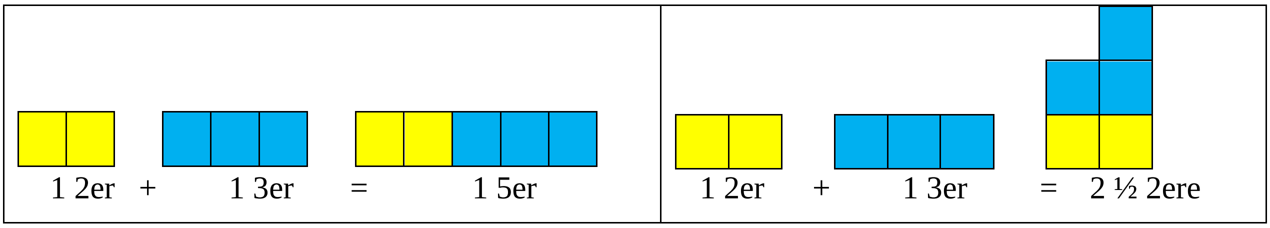
At barnet har ret, ses ved at udskrive en total, som det er defineret, f.eks. 345:

$T = 345 = 3*10^2 + 4*10 + 5*1$

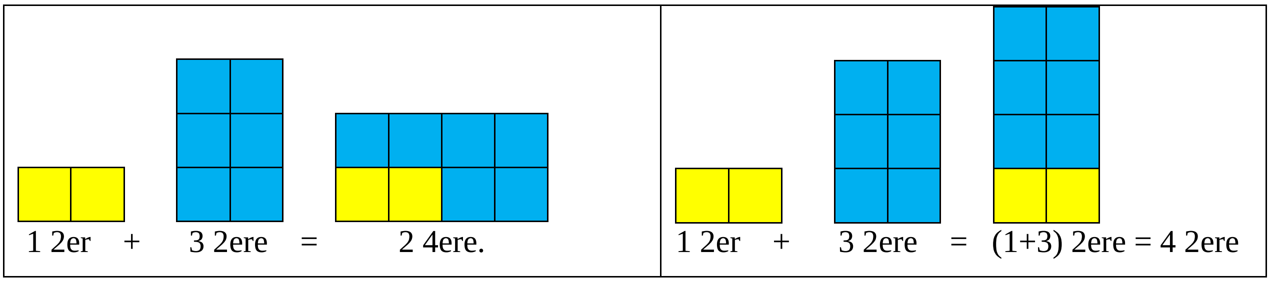
Heraf ses, at alle tal har enheder. Eller sagt på en anden måde: Et tal kan enten være en enhed, et kvantums-tal, eller en operator, et tælle-tal, som skal ganges med sin enhed, før det kan adderes til en total.

Optælling af en total på 8 i 2ere sker ved at bundte og stakke: Fra 8 borttages 2ere, som derefter stakkes 4 gange: $T = 8 = (8/2)*2$, eller med uspecificerede tal, $T = (T/b)*b$. Heraf ses, at brøker er operatorer, som skal forsynes med en enhed til en total før de kan adderes. Tilsvarende skal tallene 2 og 3 forsynes med en enhed for at kunne adderes meningsfyldt, f.eks. som 2 1ere + 3 2ere = 8 1ere = 4 2ere. Operatortal kan således ikke adderes uden deres enheder.

Modsat kan kvantumstal adderes, men på to forskellige måder. Uens kvantumstal adderesved vandret integration af de to blokkes arealer. Man kan kun sammentælle lodret ved at omtælle den ene enhed til den anden enhed.



Ens kvantumstal kan også adderes på to måder: Vandret ved integration af arealerne, eller lodret ved sammentælling af tælletallene



Operatortal kan altså kun adderes, hvis deres enhed er ens og kan sættes uden for en parentes.

Og så alligevel ikke altid: Har man lovet to børn hhv. halvdelen og to tredjedele af en pizza, går det galt, da det tilsammen vil give 7/6 af en pizza. Derimod er der intet i vejen for at love det af hver deres pizza, for så vil der stadig være 5 stykker tilbage.

Konklusion: Tal kan ikke adderes kritikløst. Først må man undersøge, om det er tælletal eller kvantumstal.

Kvantumstal kan adderes kritikløst ved at integrere deres arealer; eller ved sammentælling, hvis de er ens. Tælletal kan undertiden adderes direkte, hvis deres enheder er ens, ellers først efter pågangning af enheder.

Da brøker er tælletal, skal man altså først undersøge, om deres enheder en ens, og om der da er tale om samme fysiske enhed eller to forskellige med samme størrelse. Hvis ikke, skal de pågangesderes kvantum før addition. Der gælder altså ikke nogen universel regel for brøkaddition, eller for addition af tal. Kun for kvantumstal, som kun kan være naturlige tal, hverken for negative tal eller brøker. Og da kun som integration.

Den manglende skelnen mellem tælletal og kvantumstal og den manglende gyldighed at brøkaddition rejser spørgsmålet, om matematik er en reel videnskab eller en pseudovidenskab.

En videnskab arbejder med troværdige (reliable) data, som kan genfindes af andre. Og dens udsagn skal være gyldige (valid), og ikke kunne falsificeres.

Matematikkens data er enkelttal, som opdeles i forskellige typer. Men omverdenstal optræder altid som talpar, som tal med enheder, som blokke. Så matematikken burde være en videnskab om blokke, og ikke om enkelttal med en manglende skelnen mellem operatortal og kvantumstal, som gør matematikkens additionsudsagn lette at falsificere, som vist oven for. Med utroværdige data, og falsificerbare additionsudsagn bliver matematikken en pseudovidenskab, som kunne betegnes 'matematisme', altså noget som er sandt i et bibliotek, men ikke udenfor.

Der forestår derfor et større arbejde med at omformulere matematikken, så den bliver en naturvidenskab om det fysiske faktum Mange beskrevet med blokke, dvs. med talpar bestående af et tælletal og et kvantumstal med hver deres additionsregler.

I mellemtiden bør vi som matematiklærer holde op med kritikløst at undervise i lærebogens påstande om, hvordan brøker kan adderes. Ellers gør vi os skyldige i det, Hannah Ahrendt kalder 'ondskabens banalitet'.

Konstant på tre måder

Tal, som er konstante, adderes let ved multiplikation: 7 kr. 5 gange er 5*7 kr.

Tal, som ikke er konstante, vil ofte være stykkevis eller lokalt konstante, og kan derfor adderes stykkevis eller lokalt ved multiplikation.

For at skelne mellem global, stykkevis og lokalt konstans skal vi bruge en præcis definition af konstanthed.

Vi konstaterer, at en variabel y er *konstant* k, hvis afvigelsen mellem y og k kan gøres vilkårlig lille. Anderledes sagt: Hvis, for alle unøjagtigheder ε, afvigelsen mellem y og k vil være mindre end ε.

Eller formelt: y er global konstant k, hvis $\forall \varepsilon > 0 : | y - k | < \varepsilon$.

Tilsvarende er en variabel y *stykkevis konstant* k_c, hvis der findes et område C, hvor afvigelsen mellem y og k_c kan gøres vilkårlig lille. Anderledes sagt: Hvis der findes et område C så, for alle unøjagtigheder ε, afvigelsen mellem y og k vil være mindre end ε.

Eller formelt: y er stykkevis konstant k_c, hvis $\exists C$ så $\forall \varepsilon > 0 : | y - k_c | < \varepsilon$ inden for C.

Tilsvarende er en variabel y *lokalt konstant* yo, hvis der uanset krav til nøjagtighed findes et område C, hvor afvigelsen mellem y og yo er under kravet. Anderledes sagt: Hvis der uanset unøjagtighed ε findes et område C, hvor afvigelsen mellem y og yo vil være mindre end ε.

Eller formelt: y er lokal konstant yo, hvis $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C : | y - yo | < \varepsilon$ inden for C.

To variable y og x har en lineær sammenhæng, hvis deres vækstforhold $\Delta y/\Delta x$ er konstant.

Svarende til de tre former for konstans findes der derfor også tre former for linearitet:

Sammenhængen mellem to variable y og x er hhv. globalt, stykkevis og lokalt lineær, hvis vækstforholdet $\Delta y/\Delta x$ er hhv. globalt, stykkevis og lokalt konstant.

Lokal konstans kaldes også *kontinuitet*, og lokalt linearitet kaldes også *differentiabilitet*.

Unge, der vil læse videre inden for naturvidenskab, vil på første års *calculus* kursus have stor nytte af, at læreren på forhånd har oplyst om de tre former for konstans.

Designforskning: Med pertal forstår alle ellære

I et forsøg på at gøre forskningen relevant for undervisningen, er man i Sverige begyndt at arbejde med såkaldt design-forskning. Udgangspunktet er et undervisningsproblem, som man så bruger teori til at løse gennem design af et alternativt undervisningsforløb. Succesen er dog udeblevet, for de svenske Pisa-tal er stadig på vej nedad på trods af massiv forskningsindsats.

Faldgruppen i designforskning er at negligere konfliktende teorier. Situationen kan illustreres med ellære i fysik, som netop er et område, der volder store problemer med sin samling af abstrakte begreber som volt, ampere, watt, ohm, resistans, potentiale, spændingsforskel, strømstyrke og effekt.

En traditionel designforsker vil søge hjælp i konstruktivistisk læringsteori og per automatik foretrække Vygotskys sociale version frem for Piagets radikale version. Og dermed eksemplificere sagens kerne: fejlvalg ved konfliktende teorier.

Vygotsky ser lærebogen som indeholdende læresætninger, som den lærende skal bygge et stillads til fra sin indlæringszone hjulpet af læreren.

Piaget ser lærebogen som indeholdende sætninger om grundled hentet fra omverdensfænomener, som det er lærerens opgave at lade eleverne møde i håndgribelig form ud fra princippet 'først gribe, så begribe'.

Så hvor Vygotsky fokuserer på lærebogens sætninger, fokuserer Piaget på virkeligheden bag deres grundled.

En Vygotsky-tilgang vil således forholde sig aldeles ukritisk til lærebogens fremstilling af et elektrisk kredsløb: En resistans forbindes med to ledninger til en spændingskilde, hvis potentialforskel vil sende en elektrisk strøm gennem ledningerne og afsætte en effekt i resistansen.

En Piaget-tilgang vil introducere fysikkens tre hovedbegreber, masse og kræfter og bevægelse, og deres enheder, kilogram og Newton og Joule, med en hoppende bold: Bolden er stof, hvori der bor en kraft, der sætter stoffet i bevægelse.

Ellære handler om jouleforsyning af maskiner, der som mennesker skal have Joule for at bevæge sig. Maskiner får tilført Joule af elektroner, et stof med iboende kræfter, der sætter stoffet i bevægelse, og som måles i enheden Coulomb. Coulomb er altså som lastbiler, der efter opladning med Joule i et joule-lager, et batteri, kører gennem ledningen for at aflevere Joule til maskinen, modstanden. Dette kan illustreres med tændstikæsker, der bringer chokoladeknapper fra en pose til et hullet bæger.

For at beskrive joule-leverancen indføres en række pertal:

Antal joule, der læsses på hver coulomb i batteriet, kaldes dets joule/coulomb-tal eller volt-tal eller spændingsforskel.

Antal joule, der aflæsses i maskinen hver sekund, kaldes dens joule/sekund-tal eller watt-tal eller effekt.

Antal coulomb, der kører ud i ledningen hver sekund, kaldes dens coulomb/sekund-tal eller ampere-tal eller strømstyrke.

Forholdet mellem volt-tallet og ampere-tallet kaldes ohm-tallet, eller modstanden eller resistansen.

Ud fra disse definitioner ses, at joule/sekund = joule/coulomb * coulomb/sekund, eller watt = volt * ampere.

En volt- og en amperemåling vil da sammen er ohm- og watt-formlen bestemme kredsløbets fire pertal.

Den lærende får erfaring med jouleleverance i ved at sende knapper af sted i tændstikæsker. Der er forskel på at lægge 2 og 6 og 220 knapper i hver tændstikæske (2, 6 og 220 volt). Og der forskel på at sende 1 æske af sted hvert sekund og hver andet sekund og hver tiende sekund (1, 0.5 og 0.1 ampere).

Tilsvarende ses, at fordobling af volt-tallet og halvering af ampere-tallet giver uændret joule-leverance.

Med hensyn til at bruge et voltmeter og et amperemeter til at måle joule-leverance og trafiktæthed, synes det klart, at et voltmeter skal måle lastbilerne før og efter joule-leverancen, dvs. anbringes uden for kredsløbet parallelt med dette. Derimod skal amperemeteret sidde i kredsløbet for at kunne tælle hvor mange lastbiler, der passerer hvert sekund..

Ønskes en undervisning, hvor kun få får et udbytte, skal man fortsat bruge Vygotsky som teoretiker og insistere på, at viden om omverden skal gå gennem lærebogens abstrakte begreber og læresætninger.

Ønskes derimod at en undervisning, hvor alle får et udbytte, skal man bruge Piagets tre faser: Først håndgribelig handling, hvor den lærende bruger sine gribere til at begribe fænomenerne. Så verbal fortælling, hvor man indfører 'groundede' etiketter for fænomenerne. Endelig omformulering, så lærebogen bliver en parallelbeskrivelse til egenbeskrivelsen.

Men hvor man fastholder, at et amperemeter måler et amperetal, dvs. et coulomb/sekund-tal og ikke en strømstyrke. Samt at et voltmeter måler et volttal, dvs. et joule/coulomb-tal og ikke en spændingsforskel.

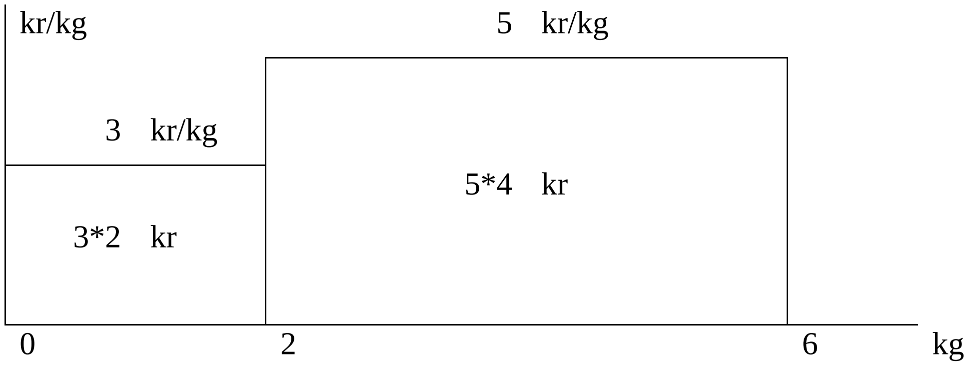
Ombyt differential- og integralregning

Navnene siger det direkte: at integrere = at forene, at differentiere = at opdele. Og forening er altid kommet før opdeling:

I primærskolen kom plus til at forene uens styktal til en total før minus til at opdele en total i uens styktal. Og gange til at forene ens styktal til en total kom før division til at opdele en total i ens styktal. I sekundærskolen kom potens til at forene ens pertal til et samlet pertal før rod og logaritme til at opdele et samlet pertal i ens pertal. Derfor er det kun naturligt, at integration til at forene uens per-tal kommer før differentiation til at opdele i uens pertal.

Integration har sin rod i blandingsregning:

I stykket ’2 kg á 3kr/kg + 4kg á 5 kr/kg = ?’ kan styktallene 2 og 4 plusses direkte, medens pertallene 3 og 5 plusses via deres integrerede areal, så svaret bliver (2+4) kg á (3*2 + 5*4)/(2+4) kr/kg.



Eller med uspecificerede tal: Σ xi kg á pi kr/kg = (Σ xi) kg á (Σ(pi*xi) / (Σ xi) kr/kg.

Eller med små tilvækster: $\int$dx kg á p(x) kr/kg = Δ x kg á ($\int$ p(x)*dx) / Δx kr/kg.

Ved tilføjelse af et ekstra indkøb Δx kg á p kr/kg vil arealet A vokse med ΔA = p*Δx, hvorfor pertallet p kan findes af ligningen p = ΔA/Δx, eller for små tilvækster, p = dA/dx, der betegnes som ’A differentieret’.

Med kendte pertal findes totalen altså ved integration. Modsat findes pertal ved omvendt integration, også kaldet differentiation. Vi bemærker, at da integration bruger gange før plus, vil differentiation modsat bruge minus før division.

Med (globalt) konstante pertal p findes det samlede areal A ved at gange højde p med bredde Δx: A = p*Δx

Med stykkevis konstante pertal p: (p1, p2, …, pn) findes det samlede areal A ved at opsummere de enkelte arealstrimler: A = Σ (pi*Δxi)

Et variabelt pertal, p = p(x), vil normalt være lokalt konstant (kontinuert). Så også her findes det samlede areal A ved at opsummere de enkelte arealer: A = $\int$ p(x)*dx. Problemet er blot, at der nu er tale om mange arealstrimler, og jo flere jo mindre unøjagtighed vi kræver. Med minde vi da kender arealformler.

Et CAS værktøj kan udregne arealet A(u,x) under en givet p-kurve fra et fast, ukendt starttal u til et variabelt sluttal x. Med pertallet p(x) = x fås således:

$$A(u,x) = \int_u^x p\,dx = \int_u^x x\,dx = ½x^2 - ½u^2 = ½x^2 + k, \text{ hvor konstanten } k = -½u^2$$

Tilsvarende findes arealerne under x^2 og x^3 hen til det variable slutpunkt x til 1/3 x^3 + k og ¼ x^4 + k.

Vi kan nu formode, at arealet under x^n hen til x er 1/(n+1)*x^(n+1) + k for alle tal n. Da denne formel endnu ikke er blevet falsificeret af et modeksempel, kan vi gå ud fra, at den gælder.

Arealet under en lokalt konstant p-kurve fra a til b er da forskellen på arealet hen til b og hen til a:

A(a,b) = A(u,b) – A(u,a).

Eksempel: Da arealet under 3*x^2 hen til x er x^3 + k, er arealet under 3*x^2 fra 1 til 4:

$$A(1,4) = \int_1^4 3*x^2\,dx = (4^3 + k) – (1^3 + k) = 64 – 1 = 63$$

Vi bemærker, at konstanten k forsvinder, da den både lægges til og trækkes fra.

Alternativt ser vi, at en vilkårlig sum kan reduceres til en enkelt differens, hvis dens led kan skrives som tilvækster, da alle mellemled går ud:

$\Sigma\,\Delta p = \Delta p1 + \Delta p2 + \Delta p3 = (p1\text{-}po) + (p2\text{-}p1) + (p3\text{-}p2) = p3\text{-}po$

Formlen p = dA/dx viser, at pertal netop kan omskrives til tilvækster: p*dx = dA.

Da arealet under p = 3 x^2 er x^3 og p = dA/dx, er 3 x^2 = d(x^3)/dx, eller 3*x^2*dx = d(x^3). Dvs.

$$A(1,4) = \int_1^4 3*x^2\,dx = \int_1^4 d(x^3) = \Delta(x^3)\Big|_1^4 = 4^3 – 1^3 = 64 – 1 = 63$$

Man kan naturligvis også udlede tilvækstformler for potenser på traditionel måde:

I et rektangel med x-afhængige sider f(x) og g(x) vil en lille tilvækst i x medføre en lille tilvækst i f og g , hvorved rektanglets areal f*g vokser med to strimler, så d(f*g) = df*g + f*dg, og dermed d(f*g)/dx = df/dx * g + f * dg/dx, eller som procent tilvækster d(f*g)/dx / (f/g) = df/dx / f + dg/dx / g.

Konklusion. Det er naturligt, at integralregning kommer før differentialregning, som jo netop er omvendt integralregning. En sådan ombytning er i fin overensstemmelse med, at matematikundervisningens formål er at udvikle matematikkompetencer i betydningen indsigtsbaseret handleparathed. På baggrund af indsigt i forskellen på styktal og pertal handler calculus netop om at opbygge handleparathed i forhold til foreneing af og opdeling i uens, men lokalt konstante pertal. Og dermed at færdiggøre algebraens hovedopgave, at genforene ens og uens styktal og pertal. Som bekendt betyder algebra genforening på arabisk.

Forening af *Opdeling i*	Uens	Ens
Styktal	T = a + b *T – b = a*	T = a*b *T/b = a*
Pertal	$T = \int p\,dx$ $\frac{dT}{dx} = p$	T = a^b $\sqrt[b]{T} = a$ *loga(T) = b*

Med hensyn til bevisførelse bør man erstatte moderne deduktion med oplysningstidens induktion, der benytter Poppers falsificeringsprincip. Endvidere bør talemåden ’at integrere funktioner’ erstattes af den mere korrekte ’ at integrere pertal’ eller mere præcist ’at integrere lokalt konstante pertal’. Tilsvarende bør talemåden ’at differentiere funktioner’ erstattes af ’at differentiere i pertal’.

Parablers og hyperblers elasticitet

’ Elasticitet udtrykker i økonomisk teori forhold mellem den relative (procentuelle) ændringer i to variable’ siger Wikipedia. Ved elasticitet har variablernes enheder ingen betydning.

At potensvækst $y = x^a$ er vækst med konstant elasticitet kan ses ved brug af vækstfaktorer. Ændres x med r%, bliver x til $x2 = x*(1+r)$, hvorved y ændres med $s\% = (1+r)^a – 1\ \%$:

$y2 = (x(1+r))^a = x^a*(1+r)^a = y*(1+r)^a$

Af eksempler som $1.01^4 = 1.040604 \approx 1.04$ ses, at formlen $1.01^n = 1 + n\%$ gælder med god tilnærmelse for n numerisk lille. For potensvækst gælder derfor tilnærmet, at hvis x vokser med 1%, vokser y med elasticiteten i procent.

Differentialregning vise det samme: Med $y = b*x^a$, er

$dy/dx = a*b*x^{(a-1)}$, så $dy/y = (a*b*x^{(a-1)}*dx) / (b*x^a) = a*dx/x$; eller $(dy/y)/(dx/x) = a$

For parablen $y = x^2$ gælder således, at hvis ændres x med 1, vil y-tangenten ændres med $2*x$; og hvis x ændres med 1%, vil y ændres med praktisk taget 2%: Ændres x med 1 fra 3 vil y-tangenten ændres med $2*3 = 6$; og ændres x med 1% fra 3 til 3.03, vil y ændres fra 9 med $2*x*dx = 2*3*0.03 = 0.18$ hvilket netop er 2% af begyndelsesværdien 9.

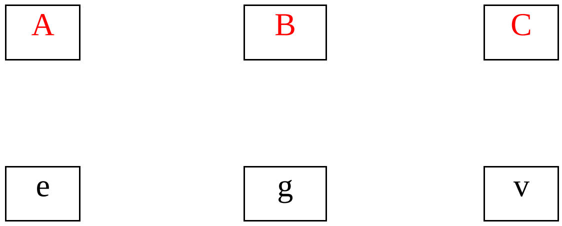
For hyperblen $y = 1/x$ gælder, at hvis x ændres x 1 vil y-tangenten ændres med $-1/x^2$; og hvis x ændres med 1%, vil y ændres med praktisk taget -1%: Ændres x med 1 fra 3 vil y-tangenten ændres med $-1/3^2 = -1/9$; og ændres x med 1% fra 3 til 3.03, vil y ændres fra 1/3 med $-1/x^2*dx = -1/(3^2)*0.03 = -0.01/3$ hvilket netop er -1% af 1/3.

Topologi med seks spillekort

Allan Tarp, VUC Aarhus

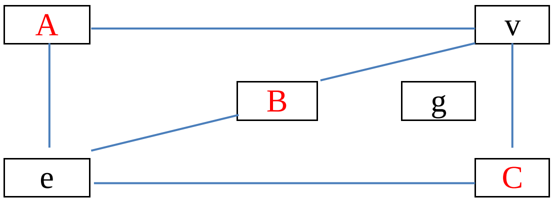
Seks spillekort kan illustrere forsyningsproblemet, et klassisk problem i topologi, dvs. geometri, hvor hverken afstande eller vinkler, men kun den indbyrdes beliggenhed mellem punkter har betydning.

Problem: Hvordan kan tre huse A, B og C forsynes med el, gas og vand uden at ledningerne krydser?



Vi bemærker at forbindelsen fra hus A til el til hus C til vand udgør en lukket ring, der opdeler planen i to områder, indenfor og udenfor. For at kunne forbindes må hus B og gas være på samme side.

Antag at hus B og gas er indenfor. Da vil forbindelsen fra el til hus B til vand opdele det indre område i to lukkede områder med husene A og C i forskellige områder. Placeret i det ene område, kan gas ikke forbindes med det hus, der ligger i det andet.



Antag at hus B og gas er udenfor. Da vil forbindelsen fra el til hus B til vand til et af de andre huse til el omslutte det tredje hus, og argumentet ovenfor kan nu gentages.

Konklusion: Opgaven kan ikke løses, med mindre vi tilføjer en bro, hvorved planen ændrer topologi til en torus eller bilring, dvs. til en plan med et håndtag.

Limes en strimmel sammen i enderne, kan man komme fra oversiden til undersiden på to måder: Man kan dreje strimlen en halv omgang (et Möbius bånd) eller man kan prikke et 'ormehul' (crosscap) i strimlen.

I netværksanalyse kan topologi anvendes til at beskrive antallet af broer eller håndtag i et givet netværk.