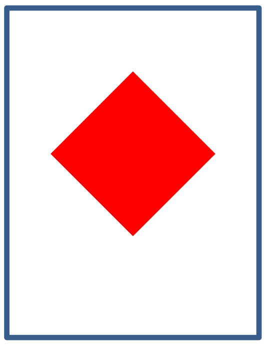
Matematik med spillekort



Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Matematik med spillekort

Dette hæfte indeholder en række korte artikler, hvoraf de fleste har været trykt i medlemsbladet for danske matematiklærere, LMFK-bladet, f.eks. angiver (2013,6) at artiklen har været trykt i LMFK bladet nr. 6 fra 2013:

Hensigten har været at vise, hvordan flere af matematikkens formler kan opdages ved at arbejde med almindelige spillekort. Mange formler er begrænset af, at man med kort kun kan arbejde med positive tal, hvorfor spørgsmålet om formlerne også gælder for negative tal står ubesvaret tilbage. Men trods alt har man så en formel, man kan underkaste en sådan undersøgelse.

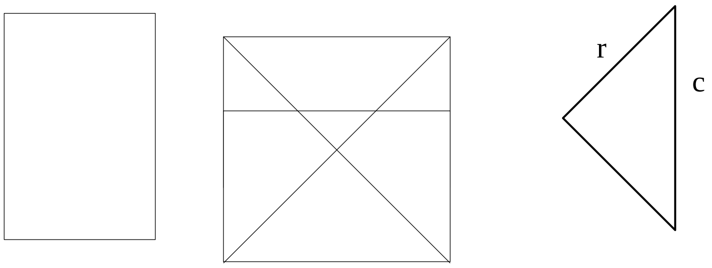
Artiklen om Herons formel er den eneste, der ikke benytter spillekort.

Allan Tarp, Aarhus januar 2016

Indhold

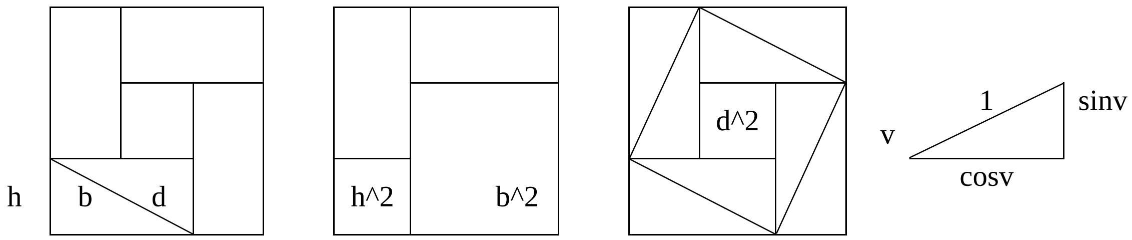
01. Lille, mellem og store Pythagoras med 3, 4 og 5 spillekort

I. Et tredje spillekort kan vise, hvor meget to andre skal forskydes for at danne et kvadrat med sidelængden c. De to diagonaler, hver med længde 2*r danner fire ens ligebenede retvinklede trekanter, hver med arealet ½*r^2. Dvs. c^2 = 4*½*r^2 = r^2 + r^2 (lille Pythagoras).



II. Fire spillekort har bredde b og højde h. Bunken drejes 90 grader og anbringes til højre for det nederste kort, som blev liggende. Dette gentages 3 gange. Den dannede figur dækker nu arealet h^2 + b^2 + to kort. Under processen er diagonalerne også drejet 90 grader, og danner nu arealet d^2, som sammen med 4 halve kort dækker figuren. Da fire halve kort og to hele kort har samme areal, er d^2 = h^2 + b^2 (mellem Pythagoras).

Specielt gælder, at sinv^2 + cosv^2 = 1 i en retvinklet trekant med diagonalen 1 og siderne sinv og cos v.

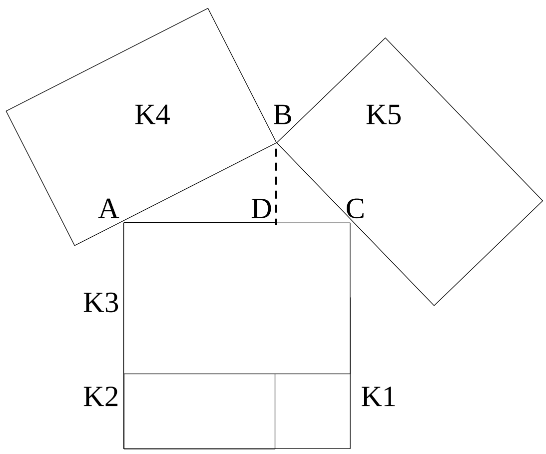


III. Kort K1 anbringes på langs. K2 anbringes ovenpå og drejes en kvart omgang så de nederste venstre hjørner er sammenfaldende. K3 anbringes på K2 så K1 og K3 danner et kvadrat. Kortene K4 og K5 bruges til at frembringe en trekant ABC, hvor højden BD, som skal være en forlængelse af K2's højre side (evt. vist med en blyant), opdeler ABC i to retvinklede trekanter, BDA og BDC.

I den højre trekant BDC er DB = a*sinC og DC = a*cosC.

AC's ydre kvadrat består af to kvadrater dannet af AD og DC, samt to strimler. AD's kvadrat vil da være AC's kvadrat minus de to strimler plus DC's kvadrat, som er fratrukket to gange:

AD^2 = AC^2 + DC^2 – 2*DC*AC = b^2 + (a*cosC)^2 – 2*a*b*cosC



I den venstre trekant ABD er

AB^2 = DB^2 + AD^2.

= a^2*sinC^2 + a^2*cosC^2 + b^2 – 2*a*b*cos C = a^2 + b^2 – 2*a*b*cos C

da = a^2*sinC^2 + a^2*cosC^2 = a^2*(sinC^2 + cosC^2) = a^2 *1 = a^2

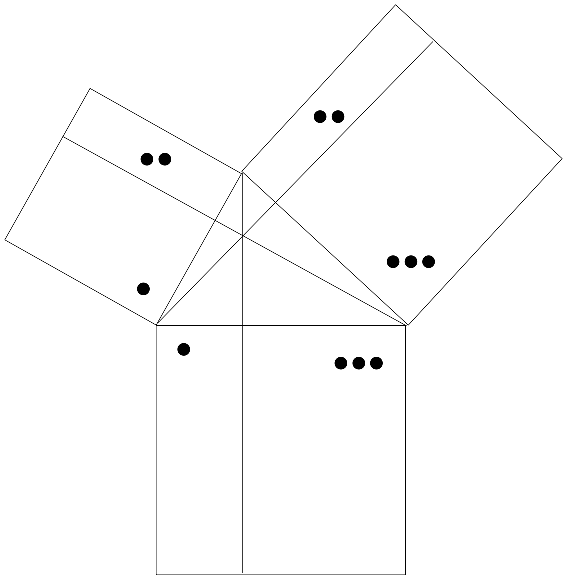
Heraf følger, at c^2 = a^2 + b^2 – 2*a*b*cosC (store Pythagoras).

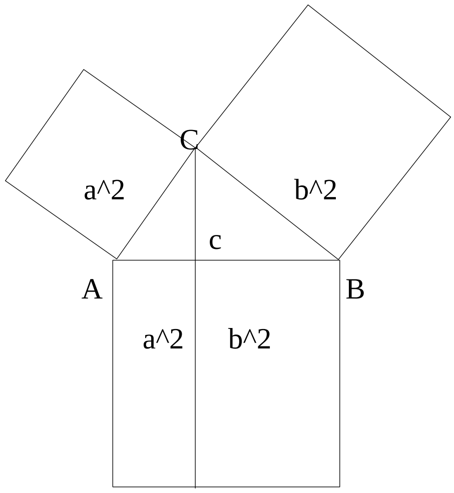
Samtidig ses, at højden fra B opdeler b's ydre kvadrat i to dele, som har arealet b*c*cosA til A's side og arealet a*b*cosC til C's side. Det vises let, at højden fra A tilsvarende opdeler a's ydre kvadrat i to dele, som har arealet a*c*cosB til B's side og arealet a*b*cosC til C's side, samt at højden fra C opdeler c's ydre kvadrat i to dele, som har arealet a*c*cosB til B's side og arealet b*c*cosA til A's side.

Der gælder derfor følgende to regler:

I en trekant med spidse vinkler opdeler højderne de modsatte siders ydre kvadrater i stykker, som er parvis ens omkring de tre vinkler med størrelsen a*b*cosC omkring vinkel C osv.

I en retvinklet trekant opdeler højden diagonalens ydre kvadrat i stykker, der svarer til de korte siders kvadrater.





02. Pi med tre spillekort

Tre spillekort på langs har længden b. De to øverste kort drejes 90 grader og anbringes så de tre korts nederste venstre hjørner er sammenfaldende. Det øverste kort forskydes mod højre indtil det dækker det nederste kort. De to øverste kort danner nu et kvadrat med sidelængde b og diagonal d.

Dette kvadrat kan indskrives i en cirkel med centrum i diagonalernes skæringspunkt og med diagonalen som diameter. Opdelt i 4 ens (røde) ligebenede trekanter, kan disses ydersider betragtes som en første approksimation A1 til cirklens omkreds. Ydersiderne kan beregnes ved at halvere centervinklerne:

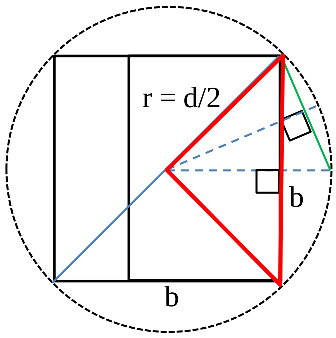
A1 = 4*2*d/2*sin (360/4/2) = d*4*sin(180/4).

Næste approksimation A2 fås som ydersiderne på de 8 (grønne) ligebenede trekanter, som fremkom ved at halvere centervinklerne og beholde radius r som inderside:

A2 = 8*2*(d/2)*sin (180/4/2) = d*8*sin(180/8).

Fortsættes på denne måde, vil approksimationen An = d*n*sin(180/n) nærme sig mere og mere til cirklens omkreds, der så kan skrives som d*pi, hvor pi = n*sin(180/n) for n tilpas stor:

n	100	1000	10000	tabelværdi
n*sin(180/n)	3.141076	3.141587	3.141593	3.141593…



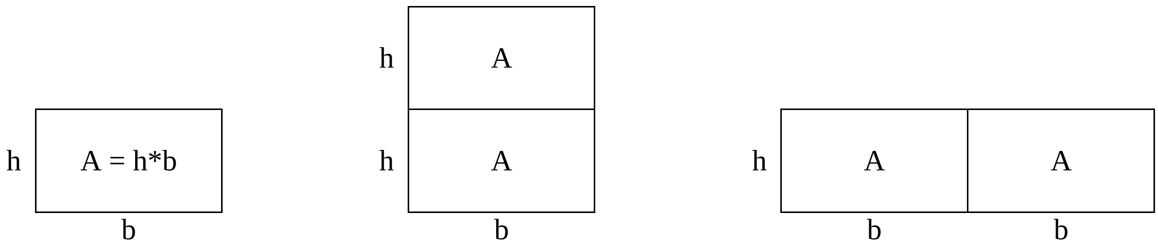
03. Proportionalitet med 2 spillekort

Produktformler A = h*b er den mest almindelige formeltype, ofte kaldet proportionalitet eller en bro-formel, hvor per-tallet h forbinder de to styk-tal A og b. Det indgående per-tal kan f.eks. være kr/kg, meter/sekund og mol/liter i økonomi, fysik og kemi.

En produktformel illustreres ved et spillekort, hvor højden h og bredden b giver arealet A = h*b.

Anbringes to kort efter hinanden lodret er bredden b konstant, og dobbelt højde h giver dobbelt areal A. Højde og areal er altså (ligefrem) proportionale. Tilsvarende ses at bredde og areal er proportionale ved at anbringe de to kort efter hinanden vandret.

Flyttes det øverste kort fra lodret til vandret position er arealet A konstant. Bredden b og højden h vil henholdsvis fordobles og halveres og dermed være omvendt proportionale.



04. Produktregler med to-fire spillekort

Et spillekort med bredde a og højde b har arealet a*b.

A. Kort 1 anbringes på langs, og kort 2 ovenpå på højkant med de nederste venstre hjørner på samme sted. Herved dannes et kvadrat i øverste højre hjørne med arealet (a-b)^2, som fremkommer ved fra arealet a^2 at fjerne to kort og tillægge b^2, da dette areal er fjernet to gange, dvs.

(a – b)^2 = a^2 + b^2 – 2*a*b

Kort 1 opdeler kort 2 i en øverste del med arealet (a-b)*a og en nederste del med arealet b^2, dvs.

(a – b)*b = a*b – b^2

B. Kort 2 forskydes lodret op til det forlader kort 1. Kort 2 vil da opdele kort 1 i to dele, hvor den venstre del med arealet b^2 sammen med kort 2 dækker et areal på (a+b)*b, dvs.

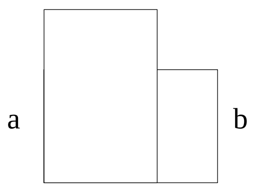
(a + b)*b = a*b + b^2

C. Kort 3 anbringes på langs oven på kort 2 med de øverste venstre hjørner på samme sted. Kort 2 opdeler kort 1 og kort 3 i to dele, hvor de højre dele indgår i et rektangel med arealet (a+b)*(a-b), og hvor kort 1's andel og den synlige del af kort 2 begge har arealet (a-b)*b. Det bøjede areal er da forskellen på a^2 og b^2, dvs.

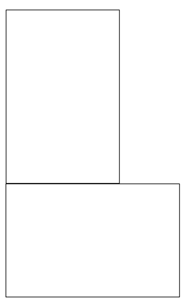
(a + b)*(a – b) = a^2 – b^2

D. Kort 3 forskydes mod højre og suppleres med kort 4 på højkant til en kvadrat med sidelængden a+b, som foruden kort 3 og kort 4 dækker et areal til venstre på a^2 nederst og b^2 øverst, dvs.

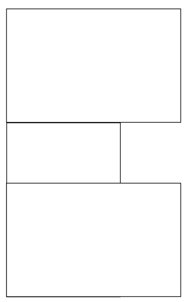
(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2*a*b



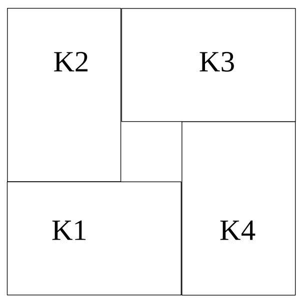
figur A



figur B



figur C



figur D

05. Andengradsligningen løst med to spillekort

Ligningen x + 2 = 8 spørger hvilket tal der plusset med 2 giver 8. Svaret er tallet x = 8–2, som pr. definition er det tal, der plusset med 2 giver 8. Tilsvarende viser definitionerne, at tallet x = 8/2 er løsning til ligningen x*2 = 8; samt at tallet x = ±√8 er løsning til ligningen x^2 = 8. Vi ser, at en ligning løses ved at flytte et tal til modsat side med modsat regnetegn.

Der er to x'er i andengradsligningen x^2+6x+8 = 0, som derfor omskrives, så der kun er ét x.

To spillekort har bredden b og højden x+b. Det ene drejes en kvart omgang og anbringes oven på det andet så de har nederste venstre hjørne er fælles. Af figuren ses, at

x^2 + 2*b*x + b^2 = (x+b)^2, dvs.

x^2 + 2*b*x = (x+b)^2 – b^2 = 'x plus b i anden, minus b i anden'

Vi foretager derfor omskrivning fra

x^2 + 6x + 8 = 0 til (x^2 + 2*3*x) + 8 = 0 til (x+3)^2 – 3^2 + 8 = 0 til (x+3)^2 – 1 = 0.

Med kun ét x kan andengradsligningen nu løses med tre overflytninger:

b	b*x	b*b
x	x*x	b*x
	x	b

3	3*x	3*3
x	x*x	3*x
	x	3

x^2 + 6x + 8 = 0
(x+6/2)^2 – 9 + 8 = 0
(x+3)^2 = 1
x+3 = ±√1
x = -3+1 = -2 og x = -3-1 = -4

Bogstavligningen kan løses ved samme omskrivning fra

x^2 + b*x + c = 0 til

(x^2 + 2*b/2*x) +c = 0

til (x+b/2)^2 – (b/2)^2 + c = 0

til (x+b/2)^2 = b^2/4 – c = 0

Løsningen til ligningen x^2 + b*x + c = 0 er da

$$x = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4c}{4}\right)} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2},$$

som har to løsninger hvis determinanten D = b^2 – 4*c er positiv, én hvis D = 0, og ingen hvis D er negativ.

06. Plusvækst og gangevækst med spillekort

Plusvækst og gangevækst forekommer, når en begyndelsesværdi b bliver hhv. plusset og ganget med samme tal a x gange hvilket giver slutværdierne hhv. y = b+a*x og y = b*a^x, også kaldet formlerne for hhv. lineær og eksponentiel vækst. De to vækstformer kan illustreres med to stakke spillekort.

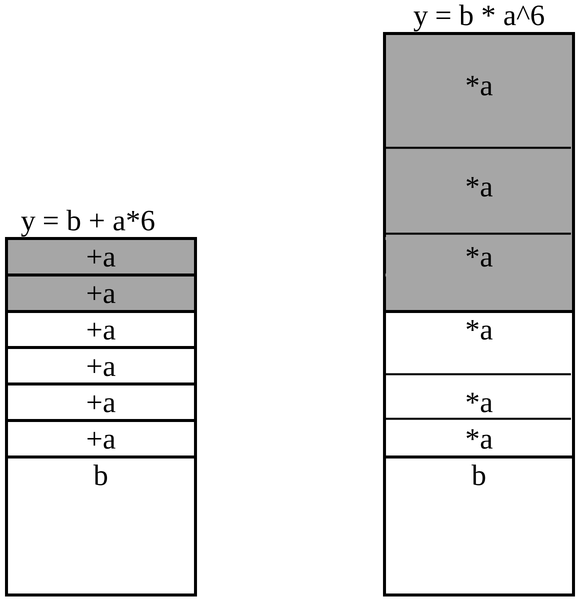
Til venstre anbringes en kortbunke med 7 kort. Det øverste kort bliver liggende. De næste fire kort forskydes lige meget opad for at vise slutværdien ved 4 tilskrivninger med 25% af kortets længde. Herefter vendes de to sidste kort om og forskydes igen opad som før for at vise slutværdien efter 6 tilskrivninger med samme vækstal a.

Ved siden af anbringes en kortbunke med 6 kort. Det øverste kort bliver liggende. De næste tre kort forskydes opad, hver med en fjerdedel af stakkens længde for at vise at slutværdien efter 3 tilskrivninger er omtrent den samme som med fire tilskrivninger ved plusvækst, da 125%*125%*125% = 195.3%, altså næsten 200%, dvs. en vækstprocent på 25% giver en fordoblingskonstant på ca. 3. Herefter vendes de to sidste kort om og placeres i stakkes forlængelse for at vise slutværdien efter 6 tilskrivninger med samme tal vækstfaktor a.

Anderledes sagt: Ved den aktuelle plusvækst skal der fire tilvækster til for at give en tilvækst på begyndelsesværdien.

Og ved den aktuelle gangevækst vil 3 tilvækster give en fordobling af den aktuelle stak.

Lineær plusvækst med b = 100kr og a = 25kr.   Eksponentiel gangevækst med b = 100kr og a = 125%.



07. Opsparingsformlen med ni spillekort

Opsparing er plus&gange-vækst, dvs. en kombination af plusvækst og gangevækst med et månedlig vækst på a kr og r%.

En opsparing forekommer, hvis en bank opretter to konti, K1 og K2. På K2 indsættes beløbet a/r kr. Renten heraf overføres månedligt til K1som et fast indskud på a/r*r = a kr, efter at K1 er tilskrevet rente.

Efter n måneder vil K1 da indeholde en opsparing med månedlig vækst på a kr og r%. Men samtidig vil K1 indeholde den samlede rente R af de a/r kr på K2, dvs. A = a/r*R eller A/R = a/r, hvor 1+R = (1+r)^n.

Dette kan vises med ni spillekort anbragt på et A4 papir delt i to, K1 til venstre og K2 til højre.

Efter første måned tilføres K1 beløbet r% af indestående, dvs. 0 kr.; samt a kr fra K2, vist med et spillekort lagt vandret med bagsiden opad.

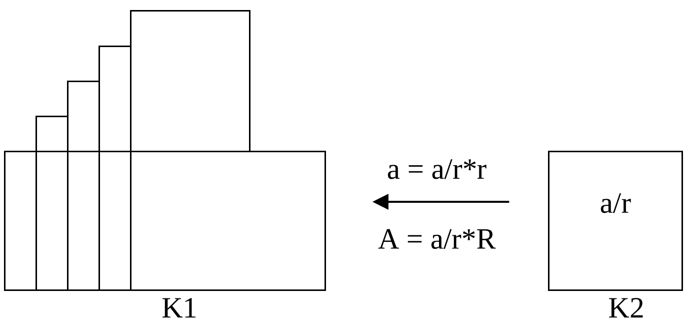
Efter anden måned tilføres K1 beløbet r% af indestående, hvilket vises med et spillekort lagt lodret og med bagsiden nedad, og skubbet en tak til højre; samt a kr fra K2, igen vist med et spillekort lagt vandret med bagsiden opad, også skubbet en tak til højre.

Vi fortsætter indtil udløbet af femte måned, idet de lodrette rentekort skubbes gradvist opad på grund af det voksende indestående på K1. K1 indeholder nu en opsparing A bestående af en række konstante krone-indskud, de vandrette kort, og renter af disse beløb, de lodrette kort. Samtidig er de vandrette kort den simple rente af K2, og de lodrette kort er rentes-renten af K2. Så igen er opsparingen A = a/r*R, dvs. A/R = a/r.

Om sammenhængen mellem samlet rente R, enkeltrente r og rentes-rente RR viser kortene at

R = n*r + RR, eller RR = R – n*r.

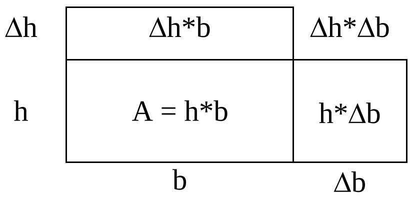
Så ved beskatning af renter kan ren rente og rentes-rente eventuelt beskattes forskelligt.

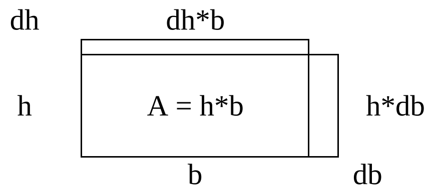


08. Produkttilvækst med tre spillekort

Produktet mellem to tal h og b forekommer i geometri som arealet A af et rektangel med højde h og bredde b, A = h*b; og i økonomi som det totale kronetal for b kg á h kr/kg, T = h*b, eller mere generelt hver gang et per-tal ganges op til et styktal. Spørgsmålet er da hvordan ændringer i h og b vil ændre produktet.

Tre spillekort har højde h og bredde b. Det øverste kort bliver liggende, det mellemste kort skydes et stykke Δb til højre, og det nederste kort skydes et stykke Δh op.





Vi ser at ændringen i arealet, ΔA, består af tre led Δh*b og h*Δb samt Δh*Δb. For små tilvækster kan det sidste led, hjørnet, negligeres, hvilket også kan anskueliggøres ved en tabel, hvor tilvæksten t = 0.01 giver produktet 2*3 to tilvækstled 0.01*3 = 0.03 og 2*0.01 = 0.02, samt et tredje led 0.01*0.01 = 0.0001, som får mindre og mindre betydning, jo mindre t er.

t	0.1	0.01	0.001
h*b = (2+t)*(3+t)	6.51	6.0501	6.005001

Skrives en lille tilvækst som d i stedet for Δ, har vi derfor følgende regel for hvordan et produkt ændres ved små tilvækster:

dA = d(h*b) = dh * b + h * db

eller som procenttal: dA/A = d(h*b)/(h*b) = dh/h*b + h*db

Ved produkter kan vækstprocenter altså adderes: Ændres kg-tallet med 3% og kr/kg-tallet med 5% vil kronetallet ændres med ca. 3% + 5% = 8%. Denne regel gælder for pct-tilvækster under 10% (med aftagende præcision).

Da A = h*b, er h per-tallet h = A/b. Ved omflytning fås

dh/h*b = dA/A - db/b, eller d(A/b)/(A/b) = dA/A - db/b

Ved per-tal kan vækstprocenter altså subtraheres: Ændres kronetallet med 7% og kg-tallet med 3% har kr/kg-tallet ændret sig med ca. 7% - 3% = 4%.

09. Integral- og differentialregning med 2 spillekort

Hvor styk-tal adderes direkte, adderes per-tal via deres areal: 2kg á 6kr/kg plus 3kg á 4kr/kg giver i alt (2+3)kg á (6*2+4*3)/(2+3)kr/kg.

Dette kan vises med to kort anbragt ved siden af hinanden, kort1 K1 på højkant og kort2 K2 på langs. Kort1 har per-tallet 6kr/kg opad og styk-tallet 2kg henad, hvilket giver arealet 12 kr. Kort2 har per-tallet 4kr/kg opad og styk-tallet 3kg henad, hvilket giver arealet 12kr. Styk-tallene adderes direkte: Krone-tallene til 12+12 = 24, og kilo-tallene til 2+3 = 5. Per-tallene, kr/kg-tallene 6 og 4, adderes via deres areal til 24/5 = 4.8. Dvs. Σ (kr/kg) = Σ kr / Σ kg.

Indtegnes kortene i et koordinatsystem fås regnereglen: per-tal adderes via arealet under pertals-kurven, dvs. ved integration.

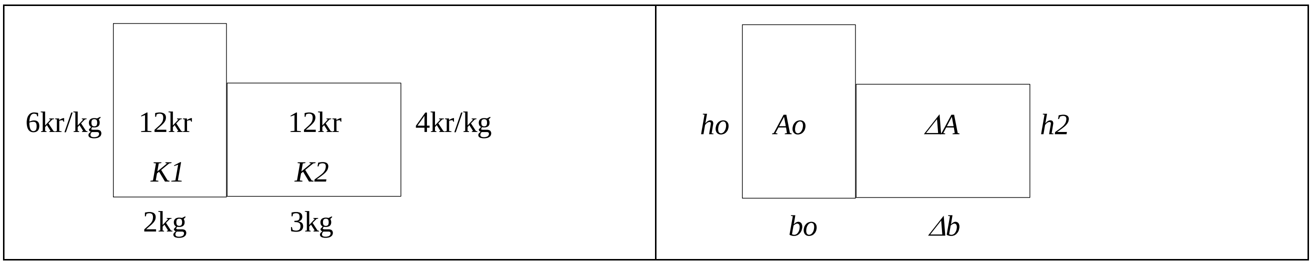
Integration bruger gange før plus. Modsat kommer minus før division ved omvendt integration, også kaldet differentiation: Spørgsmålet ’ 2kg á 6kr/kg plus 3kg á u kr/kg giver i alt 24kr’ besvares ved først at fjerne kort1, og dernæst optælle kort2’s areal in 3ere, altså ved minus efterfulgt af division.

Dvs. u = (24 – K1)/3

Integration kan også opfattes som en vækstproces: Kort1 angiver et begyndelsesområde. Anbringes kort2 ved siden af, vil området vokse til breddetallet b, og til arealtallet A, men med variabelt højde-tal eller per-tal, som kan uddifferentieres med differentialregning.

Kort 1 indeholder begyndelsestallene: højdetallet ho, breddetallet bo og arealtallet Ao. Kort2 indeholder tilvækst-tallene: Δb = b – bo, og ΔA = A – Ao, som også er h2*Δb. Dvs. pertallet for kort 2 findes som

h2 = (A – Ao)/(b – bo) = ΔA/Δb = Δy/Δx = Δf/Δx hvis bredde-tal og areal-tal indtegnes som kurve i et x-y koordinatsystem, hvor per-tallet da bliver hældningen på arealkurven eller styktals-kurven y, typisk givet ved A = y = f(x), altså som en formel med variablen x.

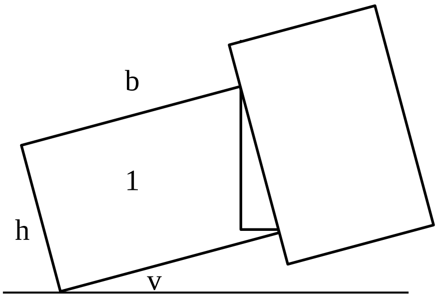


10. Sinus og cosinus differentieret med tre spillekort

Tre spillekort har højde h og bredde b. Kort 1 drejes så b danner vinklen v med vandret. Kort 2 drejes 90 grader og anbringe for enden af kort 1, så b her danner vinklen v med lodret. Kort 3 forbliver vandret og skydes ind under kort 2 og over kort 1 indtil der dannes en trekant med h som den lange side.

Som bekendt aflæses sinus og cosinus som første og anden koordinat i en enhedscirkel. Får vinklen v en meget lille tilvækst dv, gælder tilnærmelsesvis, at cirklen (venstre b på kort 2) er lineær, og at de to vinkelben fra v og v+dv (nederste og øverste b på kort 1) er parallelle. Hvis v måles i radian, vil trekantens lodrette, vandrette og lange side være de tre tilvækst-sider d(sin v) og -d(cos v) og dv. Da den lange side danner vinklen v med lodret, er

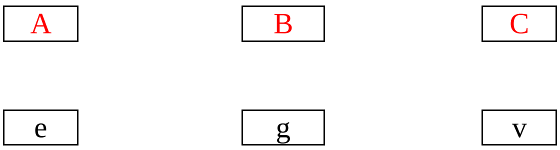
$\cos v = \frac{d(\sin v)}{dv}$ og $\sin v = -\frac{d(\cos v)}{dv}$, eller $\frac{d(\sin v)}{dv} = (\sin v)' = \cos v$ og $\frac{d(\cos v)}{dv} = (\cos v)' = -\sin v$



11. Topologi med seks spillekort

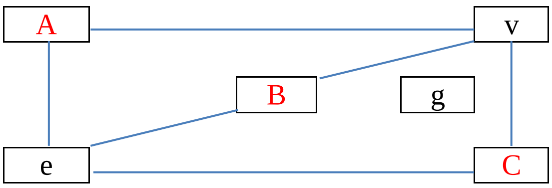
Seks spillekort kan illustrere forsyningsproblemet, et klassisk problem i topologi, dvs. geometri, hvor hverken afstande eller vinkler, men kun den indbyrdes beliggenhed mellem punkter har betydning.

Problem: Hvordan kan tre huse A, B og C forsynes med el, gas og vand uden at ledningerne krydser?



Vi bemærker at forbindelsen fra hus A til el til hus C til vand udgør en lukket ring, der opdeler planen i to områder, indenfor og udenfor. For at kunne forbindes må hus B og gas være på samme side.

Antag at hus B og gas er indenfor. Da vil forbindelsen fra el til hus B til vand opdele det indre område i to lukkede områder med husene A og C i forskellige områder. Placeret i det ene område, kan gas ikke forbindes med det hus, der ligger i det andet.



Antag at hus B og gas er udenfor. Da vil forbindelsen fra el til hus B til vand til et af de andre huse til el omslutte det tredje hus, og argumentet ovenfor kan nu gentages.

Konklusion: Opgaven kan ikke løses, med mindre vi tilføjer en bro, hvorved planen ændrer topologi til en torus eller bilring, dvs. til en plan med et håndtag.

Limes en strimmel sammen i enderne, kan man komme fra oversiden til undersiden på to måder: Man kan dreje strimlen en halv omgang (et Möbius bånd) eller man kan prikke et 'ormehul' (crosscap) i strimlen.

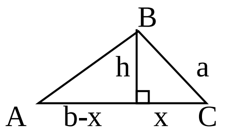
I netværksanalyse kan topologi anvendes til at beskrive antallet af broer eller håndtag i et givet netværk.

12. Herons formel, trekantens cirkler og Pythagoras på faktorform

Herons arealformel $T = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$ følger af gentaget brug af faktorreglen $p^2 – q^2 = (p+q)(p-q)$.

Da $2s = a+b+c$, er $2s – 2a = -a+b+c$, $2s – 2b = a-b+c$ og $2s – 2c = a+b-c$

Bevis. En trekants største vinkel kaldes B . I trekant ABC vil højden h fra B dele trekanten i to retvinklede trekanter, og dele siden b i to stykker, x mod C og b – x mod A.



Længderne h og x findes af de to retvinklede trekanter: $x^2 + h^2 = a^2$, dvs. $h^2 = a^2 – x^2$.

Dette indsættes i $(b-x)^2 + h^2 = c^2$ og giver $c^2 = (b-x)^2 + a^2 – x^2$.

Ved overflytning fås $c^2 – a^2 = (b-x)^2 – x^2 = (b-x+x)*(b-x-x) = b*(b-2x) = b^2 – 2bx$.

Dvs. $2bx = a^2 + b^2 – c^2$.

Da $T = ½*h*b$, er $16*T^2 = 4*h^2*b^2 = 4*(a^2 – x^2)*b^2 = 4*a^2*b^2 – 4*x^2*b^2 = (2*a*b)^2 – (2*x*b)^2 = (2*a*b + 2*b*x)* (2*a*b – 2*b*x)$

Heri indsættes nu $2bx = a^2 + b^2 – c^2$:

$16*T^2 = (2*a*b + a^2 + b^2 – c^2)* (2*a*b – a^2 – b^2 + c^2) = ((a+b)^2 - c^2)*(-(a-b)^2 + c^2) = ((a+b+c)(a+b-c))*((a-b+c)(-a+b+c)) = 2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$.

Dvs. $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Et viola: $T = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$.

Kaldes den indskrevne cirkels radius r ses, at

$T = ½*r*a + ½*r*b + ½*r*c = ½*r*2s = r*s$, og dermed

$r = \sqrt{((s-a)(s-b)(s-c)/s)}$.

Kaldes den omskrevne cirkels radius R, giver sekantlængdeformlen den glemte del af sinusrelationerne,

$2R = a/\sin A$.

Indsættes dette i arealformlen $T = ½*b*c*\sin A$ fås formlen $4RT = abc$, 'fire røde Tuborg = en sportsvand', den mest populære formel fra dengang, formler skulle læres udenad.

Pythagoras' læresætning findes både på ledform $a^2+b^2=c^2$ og faktorform $a^2=(c+b)(c-b)$.

Faktorformen indses ved at tegne en cirkel med centrum i A og radius b. Kaldes c's skæring med cirklen M og N fås $BM = c+b$ og $BN = c-b$. Faktorformen følger da af de to ensvinklede trekanter BCN og BMC, hvor vinklerne BCN og BMC er ens, da de spænder over samme bue; eller af punktet B's potens med cirklen.