Matematik forudsiger

C

Formelregning uden formelregner

Formler kan forudsige og spå, især om fremtiden

Et kompendium til matematik C version 1.0

af Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Fra MATEMATIK-undervisning

Til MATEMATIK-læring

Dette kompendium er skrevet med henblik på et halvt års undervisning i matematik på C-niveau. Det kan være grundforløbet i gymnasiet eller HF fællesfag. Det andet halvår kan da bruges til uddybing, træningsopgaver temaer og projekter.

Et kompendium er et svar på spørgsmålet: 'Hvordan omlægges matematiktimen fra matematikundervisning til matematiklæring?' Læringsarbejdet udføres af den enkelte, som kan opfattes som en 'senmoderne konstruktivist'.

I senmoderniteten gør informationsteknologien konstruktivisten skeptisk over for traditioner. Faget kan ikke mere hælde viden på, men må tillade konstruktivisten at konstruere sin egen viden gennem arbejdet med autentiske og meningsfulde opgaver.

Dvs. konstruktivisten skaber sin egen matematik, ikke ved at læse om matematik, med ved at arbejde med det matematik-skabende. Konstruktivisten udvikler gerne autoriserede rutiner, men autoriseringen skal komme fra laboratoriet, ikke fra biblioteket.

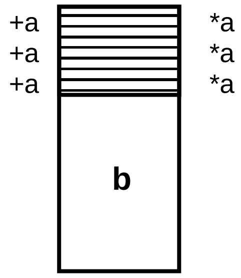
Der er medtaget en side om matematikkens historie for at vise matematikkens kulturelle betydning som et forudsigelses-sprog, der har bevirket at et moderne samfund kunne opbygges ved at erstatte biblioteksbaseret fortolkning med laboratoriebaseret forudsigelse.

Endvidere er medtaget en kort introduktion til matematik B's differential- og integralregning.

Kompendiet er opbygget så den lærende hele tiden oplever matematik som forudsigelser, der bagefter kan testes ved afprøvning.

+ vækst *** vækst**

b + a*n = y = b * a^n



Teori

Opgaver, temaer og projekter

Matematik forudsiger

Matematik
    Algebra
        Opdele og genforene tal
    Geometri
        Opmåle jordstykker
    Statistik
        Optælle status
	Matematik er en samlet betegnelse for tre områder, algebra, geometri og statistik
	Algebra (regning) bruges til at forudsige optællingsprocesser, enten slutresultatet elle enkeltdelene.
	Geometri (jordmåling) bruges til at opmåle plane figurer eller rumlige former.
	Statistik (tælling) bruges til at optælle forskellige fænomeners aktuelle størrelser.

Matematik består af to hovedområder: algebra og geometri samt statistik. Algebra betyder genforening på arabisk. Algebra kan oversættes til regning. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan kan vi forene enkelt-tal til en total? Geometri betyder jordmåling på græsk. Jorden er det vi lever på og lever af, og som vi derfor må dele. Algebra og geometri opstod således historisk som svar på de to grundlæggende spørgsmål: Hvordan deler vi vor jord og det den producerer?

Oprindeligt brødfødte mennesker sig som andre dyr, som jægere og samlere. Det første kulturskift sker med indførelse af agerbrugskultur i varme floddale hvor alt kunne produceres, specielt peber og silke. Højlandsfolket havde derfor ingen varer at bytte med, kun ædelmetaller, især sølv.

Sølvminerne uden for Athen finansierede den græske kultur og det græske demokrati. Sølvminerne i Spanien finansierede det romerske imperium som brød sammen da minerne erobredes først af vandaler siden arabere.

Efter år 1000 findes sølv i Harzen. Handelsvejene genopstår og financierer italiensk renæssance og tyske fyrstendømmer. Italien bliver så rigt og kan udlåne penge ved at skabe banker, hvilket fører til rentesregning.

Handelen formidles af arabere, som udvikler både den græske geometri, og en ny regnekunst, algebra.

Græsk geometri opstod da Pythagoras opdagede to formler, som kunne bruges til at forudsige lyde og former. For at skabe vellyd skal strenges længde have bestemte tal-forhold. I retvinklede trekanter er to sider frie, men den sidste kan forudsiges af Pythagoras' læresætning: a^2 + b^2 = c^2. Pythagoras overfortolkede sin succes ved at hævde: Alt er tal.

I Athen blev filosoffen Platon inspireret af Pythagoras til at oprette et akademi, som bygger på troen på, at alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som f.eks. geometrien der kunne udledes som eksempler på metafysiske aksiomer. 'Kom kun ind hvis du kender geometri' havde Platon skrevet over akademiets indgang. Det lykkedes dog ikke Platon at finde flere formler. Og hans akademi blev omdannet til kirkens klostre, der senere blev omdannet til vore dages universiteter.

Den næste formel blev fundet i Italien af Galilei som målte strækning s og tid t for et skråt fald på et skråplan og fandt at s=½*g*t^2. Italien gik dog bankerot da prisen for peber faldt til 1/3 i Lissabon da portugiserne opdagede den anden vej til Indien rundt om Afrika, og herved kunne springe de arabiske mellemhandlere over. Spanien forsøgte at finde en tredje vej til Indien: Ved at sejle mod vest opdager de Vestindien, hvor der hverken er peber eller silke, men til gengæld rigeligt med sølv, f.eks. i sølvlandet Argentina.

Englænderne stjæler en del af det spansk sølv og forøger at finde en fjerde vej til Indien, over havet uden landkending. Her skal man sejle efter månen, og man spurgte derfor: Hvordan bevæger månen sig?

Kirken sagde: Mellem stjernerne. Newton sagde: Månen falder mod jorden ligesom æblet, den falder blot så skævt at jorden er krummet væk inden den rammer, hvorfor månen udfører et evigt fald rundt om jorden.

Hvorfor falder æblet til jorden? Kirken sagde: Det er en metafysisk vilje som sker i himlen som på jorden. Og Herrens vilje er uforudsigelig, så alt hvad du kan gøre er at tro, gå i kirke og lære at bede.

Newton sagde: Det er en fysisk vilje som sker overalt. Men denne vilje, tyngdekraften, er forudsigelig da den kan sættes på formel. Så alt hvad du skal gøre er at vide, gå i skole og lære at regne.

Brahe brugte sit liv på at måle planetpositioner. Kepler fortolkede Brahes data korrekt, men kunne ikke validere sine 3 love uden at opsende nye planeter. Newton kunne derimod validere sin tyngdekraft med faldende ting og penduler.

Newtons succes førte til oplysningstiden, hvor man indså at med formler behøver man ikke mere formynderiet fra de to herrer, Herremanden og Vorherre, men man kunne nu opbygge et demokrati og en industrikultur baseret på formlernes evne til at forudsige naturens adfærd, og på den varebaserede trekantshandel der kom med opdagelsen af, at der var flere penge at tjene på bomuld end på silke.

I den moderne skole findes groft sagt tre typer fag: NAT-fag som forud-siger naturen med formler, SAM-fag som bagud-siger samfundet med tabeller, og HUM-fag, som (stadig) fortolker bibliotekets tekster.

Regningsarter forudsiger

Regningsarter bruges til at forudsige totalen T. Der er 2*4 regningsarter til opsamling af/opdeling i forskellige typer tal:

Opsamling af Opdeling i	Uens	Ens
Styktal Kr,kg,s	Plus + Minus -	Gange * Division /
Pertal Kr/kg, kr/100kr, %	Integration ∑ Differentiation Δ	Potens ^ Logaritme & rod

a kr og n kr er totalt T kr:	a+n = T
a kr n gange er totalt T kr:	n*a = T
r % n gange er totalt T%:	(1+r)^n = 1+T
a1 kg á p1 kr/kg + a2 kg á p2 kr/kg er totalt T kr: p1*a1+ p2*a2 = T:	∑ p*a = T

Algebra betyder at samle eller genforene på arabisk. Algebra kan oversættes til regning, forudsigelse. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan kan vi forudsige optællingen af enkelttal til en samlet total?

Der er fire måder at opsamle enkelttal på: plus (+), gange (*), potens (^) og integration (∑).

Plus + bruges til at forudsige opsamling af uens enkelttal:

2kr og 3 kr og 4 kr er totalt T kr: 2+3+4 = T

(Optælling: 1,2   3,4,5   6,7,8,9. Forudsigelse: T=2+3+4=9 ☺. 2: et led)

Job	Optæl	Forudsig
32kr og 63 kr	1,2,…,95	T = 32+63
2kr 36 gange	2,4, …,72	T=72*2
20% 5 gange	120, 144...	T=120%^5

Gange * bruges til at forudsige opsamling af ens enkelttal:

2kr + 2kr + 2kr + 2kr + 2kr = 5 gange 2kr = T, 5*2 = T

(Optælling: 2, 4, 6, 8, 10. Forudsigelse: T = 5*2 = 10 ☺. 5: en faktor)

Potens ^ bruges til at forudsige opsamling af ens procenttal: 5 gange 2% er totalt T%, 102%^5 = 1+T

(Optælling: 100, 102, 104.04, 106.12, 108.24, 110.41. Forudsigelse: T = 102%^5 = 110.41. 102%: et grundtal, 5: en eksponent)

Integration ∑ eller ∫ bruges ved opsamling af forskellige per-tal:

2kg á 7kr/kg + 3kg á 8kr/kg er totalt T kr: 7*2 + 8*3 = T , ∑ kr/kg * kg = T , ∫ p*dx = T

Omvendte regningsarter findes til alle regningsarter, og bruges til at opdele en total i enkelttal.

15-3 forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3+? = 15</u>, hvor totalen 15 opdeles i 2 uens led (ukendt led).

(Afprøvning: 3+2=5 nej, 3+3=6 nej, … Forudsigelse: ? = 15-3 = 12. Test 3+12 = 15 ☺)

$\mathbf{\frac{15}{3}}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3*? = 15</u>, hvor totalen 15 opdeles i 3 ens led (ukendt faktor).

(Afprøvning: 3*2=6 nej, 3*3=9 nej, … Forudsigelse: ? = $\frac{15}{3}$ = 5. Test 3*5 = 15 ☺)

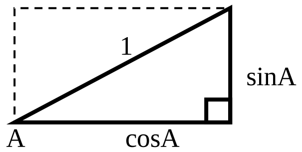
$\mathbf{\sqrt[3]{125} = 125}$^$\frac{1}{3}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>?^3 = 125</u>, hvor totalen 125 opdeles i 3 ens faktorer (ukendt grundtal).

(Afprøvning: 2^3=8 nej, 3^3=27 nej, … Forudsigelse: ? = $\sqrt[3]{125}$ = 5. Test 5^3 = 125 ☺) $\frac{1}{3}$: 3reciprok.

$\mathbf{\log_3 243} = \frac{\log 243}{\log 3} = \frac{\ln 243}{\ln 3}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3^? = 243</u>, hvor totalen 243 opdeles i ens 3faktorer (ukendt eksponent). Log er en forkortelse for $\log_{10}$. Ln er en forkortelse for $\log_e$, hvor e = 2.7182818

(Afprøvning: 3^2=9 nej, 3^3=27 nej, … Forudsigelse: ? = $\frac{\log 243}{\log 3}$ = = 5. Test 3^5 = 243 ☺)

sin, cos og tan. En diagonal deler et rektangel i 2 ens retvinklede trekanter. Lad diagonalen have længden 1. sinA forudsiger længden af siden over for A(væggen), og cosA forudsiger siden hos A (gulvet). tanA forudsiger længden af væggen hvis gulvet er 1.
Omvendt forudsiger sin-1A vinklen over for væggen. cos-1A forudsiger vinklen hos gulvet, og tan-1A forudsiger vinklen over for væggen hvis gulvet er 1.



Opgaver. Besvar spørgsmålene ved afprøvning, forudsigelse og test (løs ligningerne)

1. 4+? = 20, 4*? = 20, 4^? = 20, ?^4 = 20 2. 5+? = 40, 5*? = 40, 5^? = 40, ?^5 = 40 3. 6+? = 80, 6*? = 80, 6^? = 80, ?^6 = 80 4. 7+? = 90, 7*? = 90, 7^? = 90, ?^7 = 90	5. Indtegn på millimeterpapir en kvart cirkel med radius 10 cm. Indtegn forskellige retvinklede trekanter. Forudsig og test længden af væg og gulv. Forudsig og test vinklerne.

Ligninger, tilbageregning

<table>
<tr>
<td>En ligning (x+3=15) består af et start-tal, en beregning og et slut-tal. Enhver beregning kan vendes om så slut-tallet tilbage-beregnes til start-tallet ved at udføre den omvendte beregning.
Tal kan overflyttes ved at skifte til omvendt regnetegn.
Bemærk ombytning: 2+3 = 3+2 , 2*3 = 3*2 , $2\text{^}3 \neq 3\text{^}2$</td>
<td>

?+3 = 15	?*3 = 15	?^3 = 125	3^? = 243
x+3 = 15	x*3 = 15	x^3 = 125	3^x = 243
x = 15-3	$x = \frac{15}{3}$	$x = \sqrt[3]{125}$	$x = \frac{\log 243}{\log 3}$
+ <-> -	* <-> /	eksp <-> rod	gr.tal <-> log

</td>
</tr>
</table>

En Ligning består af et start-tal, en beregning og et slut-tal T, evt. i modsat rækkefølge: a+b = T, T = a+b.

x+3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som plusset med 3 giver 15?
x = 15-3	Forudsigelse: 15-3 er det tal, som plusset med 3 giver 15. Test: 3+(15-3) = 15
Regel	**Plus-tal overflyttes som minus-tal, og omvendt**

x*3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som ganget med 3 giver 15?
$x = \frac{15}{3}$	Forudsigelse: $\frac{15}{3}$ er det tal, som ganget med 3 giver 15. Test: $3*\frac{15}{3} = 15$
Regel	**Gange-tal overflyttes som divisions-tal, og omvendt**

x^3 = 125	Spørgsmål: Hvad er det tal, som opløftet i 3de giver 15?
$x = \sqrt[3]{125}$	Forudsigelse: $\sqrt[3]{125}$ er det tal, som opløftet i 3de giver 15. Test: $\sqrt[3]{125}$ ^3= 125
Regel	**Eksponent overflyttes som rod og omvendt**

3^x = 243	Spørgsmål: Hvad er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243?
$x = \frac{\log 243}{\log 3}$	Forudsigelse: $\frac{\log 243}{\log 3}$ er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243. Test: 3 ^ $\frac{\log 243}{\log 3}$ = 243
Regel	**Grund-tal overflyttes som logaritme, og omvendt**

Et blandet regnestykke indeholder flere regnestykker, men kan reduceres til et enkelt regnestykke ved at sætte en skjult parentes om det stærkeste regnestykke:

T = 2+3*4 = 2+(3*4) , T = 2+3^4 = 2+(3^4) , T = 2*3^4 = 2*(3^4)   Prioritet: 1. (), 2.^, 3. *, 4. +

Formel-formular (lignings-skema) kan bruges til dokumentation af ligningsløsning

Her skrives det ukendte tal	c = ?	T = a+b*c	*Her skrives formlen*
Her skrives de kendte tal	a = 2	T = a+(b*c)	*Fra blandet til enkelt regnestykke med skjult parentes*
	b = 3	T-a = b*c	*+ over flyttes som det modsatte, -*
	T = 14	$\frac{(T-a)}{b} = c$	** over flyttes som det modsatte, /*
			Parentes om det regnestykke der var i forvejen
		$\frac{(14-2)}{3} = c$	*Tallene indsættes*
		4 = c	*Løsningen beregnes*
Her udføres eventuel test	Test	14 = 2+3*4	*Løsningen testes fordi vi har ændret en T-formel til en c-formel*
		14 = 14 ☺	

Ved modsat fortegn flyttes den ubekendte først:

c = ?	T = a-c
	T+c = a c = a-T

c = ?	$T = \frac{a}{c}$
	T*c = a $c = \frac{a}{T}$

Opgaver

Find de ukendte tal for formlen.

1. T = a+b*c	5. T = a-b*c
2. T = a+b/c	6. T = a-b/c
3. T = a*b^c	7. T = a/b^c
4. T = a+b^c	8. T = a-b^c

	T	b	a	c
1		1.5	12	20
2	60		12	20
3	60	1.5		20
4	60	1.5	12	

PerTal

Styktal bærer 1 enhed. Pertal bærer 2 enheder, evt. som %. Pertal opstår ved dobbeltoptælling eller omtælling.	Per-tal SKAL omregnes til styktal før de plusses. (vægtet sum, vægtet gennemsnit, betinget sandsynlighed)

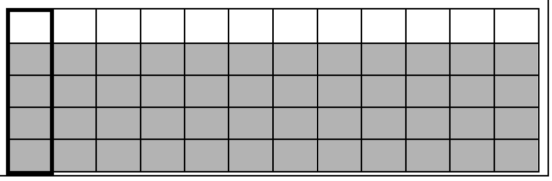
Optællingsformlen T = T/b *b bruges til at forudsige en optælling: 8 1ere optalt i 2ere er: 8=8/2 *2 = 4*2.

Dobbeltoptælling (proportionalitet) forekommer mange steder. Ved optælling af et vareparti viser det sig at 4kg svarer til 5kr, dvs. der er 4kg per 5 kr, eller 4kg/5kr, eller 4/5 kg/kr (eller 5kr/4kg). Spørgsmål: 60kg = ?kr og 60kr = ?kg

Metode 1, tallet omtælles	60kg = 60/4 *4kg = 60/4 *5kr = 75kr	60kr = 60/5 *5kr = 60/5 *4kg = 48kg
Metode 2, enheden omtælles	Kr = kr/kg *kg = 5/4 *60 = 75	Kg = kg/kr *kr = 4/5 *60 = 48

Procent

Figuren til højre kan optælles i felter eller i grå felter.
Vi ser at der er 4grå felter per 5 felter, dvs. 4per5 (4/5) felter er grå.
Hvor mange er det per 100 (%)?
100 = 100/5*5 = 100/5*4g = 80g , dvs. 4/5 = 80/100 = 80%
eller som procent-formel: a er p% af b: $\mathbf{\frac{a}{b} = p}$



Ved hjælp af formelregning kan vi finde søster-formlerne til procent-formlen:

Søster-formler:	$p = \frac{a}{b}$	a = p*b (/b overflyttes som *b)	$b=\frac{a}{p}$ (/b ovf. som *b, *a ovf. som /a)

Eksempler

30kr er ?% af 75kr	?kr er 40% af 75kr	30kr er 40% af ?kr
a kr er p% af b kr	a kr er p% af b kr	a kr er p% af b kr
$p = \frac{a}{b} = \frac{30}{75} = 0.40 = 40\%$	a = p*b = 0.40*75 = 30	$b=\frac{a}{p} = \frac{30}{0.40} = 75$

b = ?	$p = \frac{a}{b}$
a = 30 p = 0.40	p*b = a $b = \frac{a}{p}$ $b = \frac{30}{0.40}$ **b = 75**

Rente

250kr + 8% = ?kr. Kr + % kan man ikke. Men 100%+8% = 108%, og 108% af 250kr = 1.08*250 = (1+0.08)*250 = 270
Rente-formlen: y = b*(1+r) , y: slut-tal, b: start-tal, r: rente, 1+r: fremskrivningsfaktor.

16 kr. + 64 kr. = 80 kr. = 40 kr. i gennemsnit men 16 % + 64 % = 90 % = 38 % i gennemsnit	40 kr. + 40 kr. = 80 kr. = 40 kr. pr. år men 40 % + 40 % = 96 % = 34% pr. år

summen af n enkeltrenter = samlet rente = n gennemsnitsrenter

(1+r1) · (1+r2) · (1+r3) = 1 + R = (1+r) ^n

R = ?	1+R=(1+r1)·(1+r2)
r1 =16% r2 =64%	1+R=(1.16)·(1.64) R = 1.902 – 1 R = 0.902 R = 90.2%
test	*1.902 = 1.16·1.64* *1.902 = 1.902 T.S.*

r = ?	(1+r1)·(1+r2)=(1+r)^n
r1 =16% r2 =64% n = 2	(1.16)·(1.64)=(1+r)^2 √1.902 = 1+r 1.379 – 1 = r 0.379 = r **37.9% = r**
test	(1.16)·(1.64)=(1.379)^ 21.902 = *1.902* *T.S.*

R = ?	1+R = (1+r)^n
r = 40% n = 2	1+R = (1.40)^2 1+R = 1.96 R = 1.96 - 1 R = 0.96 R = 96%
test	*1.96 = 1.40^2* *1.96 = 1.96 T.S.*

r = ?	1+R = (1+r)^n
R=80% n = 2	1.80= (1+r)^2 √1.80 = 1+r 1.342 – 1 = r 0.342 = r **34.2% = r**
test	*1.80 = 1.342^2* *1.80 = 1.801 T.S.*

Opgaver

1. Massefylde = 1.23 kg/l. 7.5 kg = ? l, ? kg = 34 l
2. Molekylvægt = 16 g/mol. 234 g = ? mol. ? g = 34.5 mol
3. Koncentration = 2.4 mol/l. 34 mol = ? l. ? mol = 3.5 l
4. Pris = 3.6 kr/kg. 346 kr = ? kg. ? kr = 234 kg
5. Fart = 23.4 m/s. 34 m = ? s. ? m = 56 s
6. 20 er ?% af 30. ? er 20% af 30. 20 er 30% af ?.

7: Leje = 80 kr/dag. 200 kr = ? dage. ? kr = 40 dage
8: 40 kg = 60 l. 75 kg = ? l. ? kg = 200 l.
9: 40 kr = 82 dage. 75 kg = ? dage. ? kg = 200 dage.
10: 30 m = 20 s. 65 m = ? s. ? m = 800 s.
11: 60 J = 90 s. 55 J = ? s. ? J = 400 s.

A	r1	r2	r3	R	r		R	r
1	1.7%	8.7%	9.9%				21%	6.7%
2	4.8%	1.6%	8.1%				15%	4.8%
3	7.6%	3.3%	1.0%				12%	3.9%
4	8.5%	5.6%	4.7%				20%	6.3%
5	-	-	-	0.9%				0.3%
6	-	-	-	49.2%				14.3%
7	-	-	-	54.0%				15.5%
8	-	-	-	54.9%				15.7%
9	-	-	-		9.7%		32.0%	
10	-	-	-		2.8%		8.6%	
11	-	-	-		8.1%		26.3%	
12	-	-	-		5.6%		17.8%	

VækstRegning: Lineær, eksponentiel og potentiel

1. Kapitalen bliver a kr. større:

Kapital$_{SLUT}$	= Kapital$_{BEG}$	+ vækstttal **(tilvækst)**
y	= b	+ a

y = ?	**y = b+a**
b = 20	y = 20+5
a = 5	y = 25

opg. A1-A4

b = ?	**y = b+a**
y = 20	y–a = b
a = 5	20–5 = b
	15 = b
test	*20 = 15+5*
	20 = 20 T.S.

opg. A9-A12

a = ?	**y = b+a**
y = 30	y–b = a
b = 23	30–23 = a
	7 = a
test	*30 = 23+7*
	30 = 30 T.S.

opg. A5-A8

a = ?	**b = y–a**
y = 21	b + a = y
b = 7	a = y–b
	a = 21-7
	a = 14
test	*7 = 21–14*
	7 = 7 T.S.

opg. C1-C12

2. Kapitalen bliver a kr. større x gange (lineær vækst):

Kapital$_{SLUT}$	= Kapital$_{BEG}$	+ vækstttal · x
y	= b	+ a · x

y = ?	**y = b+a·x**
b = 20	y = 20+5·8
a = 5	y = 60
x = 8	

opg. A13-A16

b = ?	**y = b+(a·x)**
y = 60	y–(a·x) = b
a = 5	60–(5·8) = b
x = 8	**20 = b**
test	*60 = 20+5·8*
	60 = 60 T.S.

opg. A17-A20

a = ?	**y = b+(a·x)**
y = 60	y–b = a·x
b = 20	$\frac{(y-b)}{x}$ = a
x = 4	(60-20)/4 = a
	10 = a
test	*60 = 20+10·4*
	60 = 60 T.S.

opg. A21-A24

x = ?	**y = b+(a·x)**
y = 60	y–b = a·x
b = 20	$\frac{(y-b)}{a}$ = x
a = 8	(60-20)/8 = x
	5 = x
test	*60 = 20+8·5*
	60 = 60 T.S.

opg. A25-A28

3. Kapitalen bliver a gange større:

Kapital$_{SLUT}$	= Kapital$_{BEG}$	· vækstfaktor
y	= b	· a

y = ?	**y = b·a**
b = 20	y = 20·1.23
a = 1.23	y = 24.6

opg. B1-B4

b = ?	**y = b·a**
y = 20	y/a = b
a = 1.45	20/1.45 = b
	13.793 = b
test	*20 = 13.793·1.45*
	20 = 20.000 T.S.

opg. B9-B12

a = ?	**y = b·a**
y = 30	y/b = a
b = 23	30/23 = a
	1.304 = a
test	*30 = 23·1.304*
	30 = 29.992T.S.

opg. B5-B8

a = ?	**b = y/a**
y = 21	b · a = y
b = 17	a = y/b
	a = 21/17
	a = 1.235
test	*17 = 21/1.235*
	17 = 17.004 T.S.

opg. D1-D12

4. Kapitalen bliver a gange (r%) større x gange (eksponentiel)

Kapital$_{SLUT}$	= Kapital$_{BEG}$	· vækstfaktor x gange
y	= b	· a ^ x = b· (1+r) ^ x

y = ?	**y = b·(1+r)^x**
b = 20	y = 20·1.2^8
r = 20% = 0.20	y = 85.996
x = 8	

opg. A&B29-32

b = ?	**y = b·((1+r)^x)**
y = 60	y/((1+r)^x) = b
r = 20% = 0.20	60/(1.2^8) = b
x = 8	**13.954 = b**
test	*60 = 13.954·1.2^8*
	60 = 60.000 T.S.

opg. A&B33-36

r = ?	**y = b·((1+r)^x)**
y = 30	y/b = (1+r)^x
b = 20	$\sqrt[x]{(y/b)}$ = 1+r
x = 5	$\sqrt[5]{(30/20)}$ – 1 = r
	0.084 = **r= 8.4%**
test	*30 = 20·1.084^5*
	30 = 29.935 T.S.

opg. A&B37-40

x = ?	**y = b·((1+r)^x)**
y = 70	y/b = (1+r)^x
b = 20	$\frac{\log (y/b)}{\log (1+r)}$ = x
r = 30% = 0.30	$\frac{\log (70/20)}{\log 1.3}$ = x
	4.775 = x
test	*70 = 20·1.3^4.775*
	70 = 70.002 T.S.

opg. B41-44

4. Kapitalen bliver x gange større a gange (potentiel):

Kapital$_{SLUT}$	= Kapital$_{BEG}$	· vækstfaktor a gange
y	= b	· x ^ a

y = ?	**y = b·(x^a)**
b = 20	y = 20·8^1.2
a = 1.2	y = 242.515
x = 8	

opg. B13-B16

b = ?	**y = b·(x^a)**
y = 60	y/(x^a) = b
a = 1.2	60/(8^1.2) = b
x = 8	**4.948 = b**
test	*60 = 4.948·8^1.2*
	60 = 59.998 T.S.

opg. B17-B20

x = ?	**y = b·(x^a)**
y = 30	y/b = x^a
b = 20	$\sqrt[a]{(y/b)}$ = x
a = 5	$\sqrt[5]{(30/20)}$ = x
	1.084 = x
test	*30 = 20·1.084^5*
	30 = 29.935 T.S.

opg. B25-B28

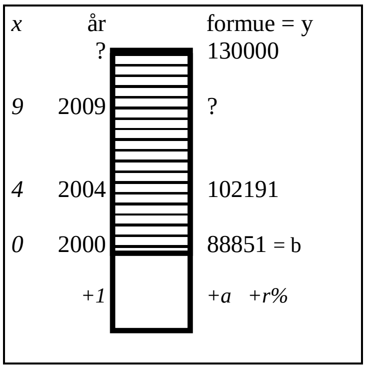
a = ?	**y = b·(x^a)**
y = 70	y/b = x^a
b = 20	$\frac{\log (y/b)}{\log x}$ = a
x = 1.2	$\frac{\log (70/20)}{\log 1.2}$ = a
	6.871 = a
test	*70=20·1.2^6.871*
	70 = 69.998 T.S.

opg. B21-B24

Lineær vækst: Ret linie på millimeterpapir (++), eksponentiel vækst på enkeltlogaritmisk papir (+*), potentiel vækst på dob. log. (**)

Faktiske & fiktive tal

I statistiske tabeller findes eksempler på tal, der ændres med tiden, f.eks. forskellige beløbsstørrelser. Den samlede vækst i perioden vil være et faktisk tal, dvs. sandt. Den gennemsnitlige vækst i perioden vil derimod være et fiktivt tal, dvs. ikke nødvendigvis sandt. Men det vil kunne bruges som *antagelse* i en fremskrivning, en prognose om hvordan fremtiden kan se ud: "Hvis væksten fortsætter uændret, hvad vil der så ske?"
Så prognosetal er fiktive, og bør derfor suppleres med prognosetal byggende på alternative antagelser, scenarier: "Hvad nu hvis væksten i stedet var …?"
Prognoser kan beregnes i regneskemaer eller indtegnes som rette linier på millimeterpapir eller på enkeltlogaritmisk papir.



		Fortid: Faktiske tal			*Fremtid: Fiktive prognosetal*	
År efter 2000	*x*	*0*	*4*		*9*	*?*
Årstal	**år**	2000	2004		2009	?
yrone-tal	**y**	88 851	102 191		?	130 000

Konstant tilvækst: Lineær vækst

Gennemsnitlig årlig tilvækst a for kronetallet y

a = ?	**y = b+(a·x)**
y = 102191 b = 88851 x = 4 *opg. 1-6*	$y-b = a\cdot x$ $\frac{(y-b)}{x} = a$ $\frac{(102191-88851)}{4} = a$ **3335 = a**

Prognose for kronetallet y i 2009

y=?	**y = b+a·x**
b = 88851 a = 3335 x = 9	$y = 88851+3335\cdot 9$ **y = 118866**

Prognose for hvornår kronetallet y bliver 130000

x = ?	**y = b+(a·x)**
y = 130000 b = 88851 a = 3335	$y-b = a\cdot x$ $\frac{(y-b)}{a} = x$ $\frac{(130000-88851)}{3335} = x$ **12.3 = x** **dvs. mellem 2012 og 2013**

Find en ligning (forskrift) for kronetallet y

y = ?	**y = b+a·x**
b = 88851 a = 3335	**y = 88851 + 3335·x**

Samlet årlig tilvækst a for kronetallet y

a = ?	**y = b+a**
y = 102191 b = 88851 x = 1	$y-b = a$ $102191-88851= a$ **13340 = a**

Konstant vækstprocent: Eksponentiel vækst

Gennemsnitlig årlig vækstprocent r for kronetallet y

r = ?	**y = b·(1+r)^x**
y = 102191 b = 88851 x = 4 Fordoblingstid: $T = \frac{\log 2}{\log (1+r)}$ *opg. 7-12*	$\frac{y}{b} = (1+r)^x$ $\sqrt[x]{(\frac{y}{b})} = 1+r$ $\sqrt[4]{(\frac{102191}{88851})} - 1 = r$ 0.036 = r **3.6% = r** $\mathbf{T = \frac{\log 2}{\log 1.036} = 19.6}$

Prognose for kronetallet y i 2009

y=?	**y = b·(1+r)^x**
b = 88851 r = 3.6% = 0.036 x = 9	$y = 88851\cdot 1.036^9$ **y = 122152**

Prognose for hvornår kronetallet y bliver 130000

x = ?	**y = b·(1+r)^x**
y = 130000 b = 88851 r = 3.6% = 0.036	$\frac{y}{b} = (1+r)^x$ $\frac{\log(\frac{y}{b})}{\log(1+r)} = x$ $\frac{\log(\frac{130000}{88851})}{\log 1.036} = x$ **10.8 = x** **dvs. mellem 2010 og 2011**

Find en ligning (forskrift) for kronetallet y

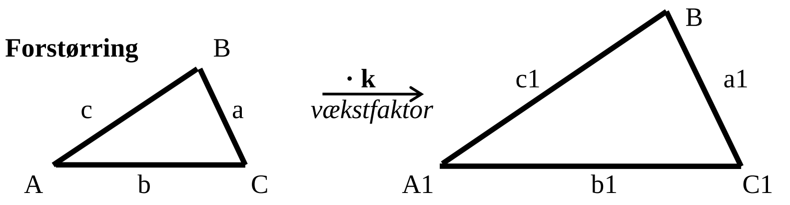
y = ?	**y = b·(1+r)^x**
b = 88851 r = 3.6% = 0.036	**y = 88851 · 1.036^x**

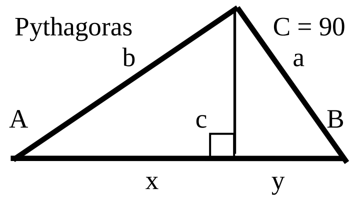
Samlet årlig vækstprocent r for kronetallet y

r = ?	**y = b·(1+r)**
y = 102191 b = 88851 x = 1	$\frac{y}{b} - 1 = r$ $\frac{102191}{88851} - 1 = r$ 0.150= r **15.0% = r**

Trekanter

Forstørring





$\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ $\quad \cos B = \frac{y}{a} = \frac{a}{c}$

$b^2 = x\cdot c$ $\quad a^2 = y\cdot c$

$a^2 + b^2 = y\cdot c + x\cdot c$

$a^2 + b^2 = (y + x)\cdot c = c\cdot c = c^2$

Ved forstørring af en trekant forstørres siderne. Vinklerne forbliver uændret.
Trekanterne kaldes derfor ensvinklede.

$\boxed{\mathbf{a1=k\cdot a \quad b1=k\cdot b \quad c1=k\cdot c}}$ $\qquad \boxed{\mathbf{\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b} = \frac{c1}{c} = k}}$

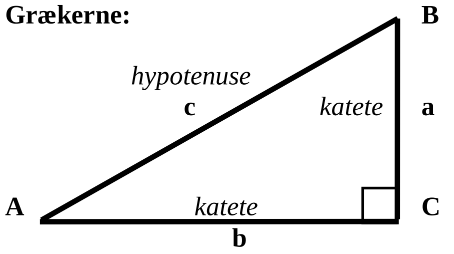
a1 = ?	$\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b}$
a=10	$a1 = \frac{a\cdot b1}{b}$
b=12	$a1 = \frac{10\cdot 15}{12}$
b1=15	a1= 12.5

a = ?	$\frac{a1}{a} = \frac{b1}{b}$
a1=10	$a1 = \frac{a\cdot b1}{b}$
b=12	$\frac{a1\cdot b}{b1} = a$
b1=15	$\frac{10\cdot 12}{15} = a$
	8 = a

k = ?	b1 = k·b
b1=15	$\frac{b1}{b} = k$
b=12	$\frac{15}{12} = k$
	1.25 = k
	125% = k

Trigonometri
I trekantsregning beregnes trekantens 3 ukendte stykker (vinkler, sider) ud fra de 3 kendte stykker.

Grækerne:

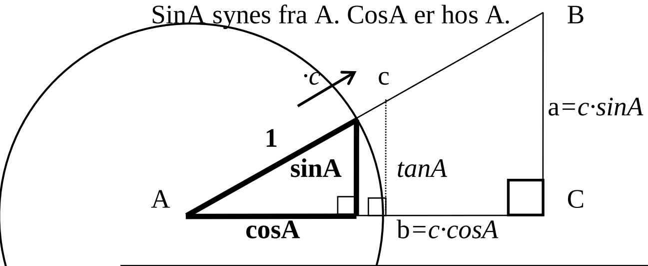


Ligninger

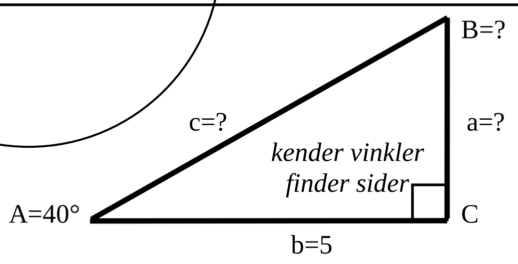
A+B = 90	A+B+C=180
$\mathbf{a^2+b^2 = c^2}$	Pythagoras

Grækernes regneproblem: Ligningerne vil indeholde to ubekendte

Araberne: Inde i en stor trekant er en lille standardtrekant, som navngives og tabellægges.
SinA synes fra A. CosA er hos A.

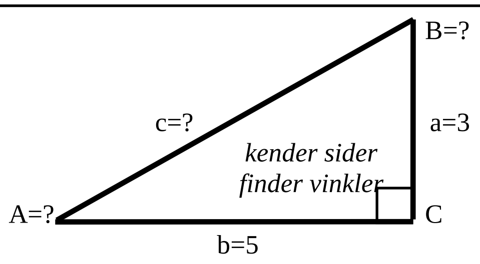


sin A	$= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$	$= \frac{mod}{hyp}$	= cos B	
cos A	$= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$	$= \frac{hos}{hyp}$	= sin B	
tan A	$= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$	$= \frac{mod}{hos}$	$= \frac{\sin A}{\cos A}$	$= \frac{a/c}{b/c}$



a = ?	$\tan A = \frac{a}{b}$
A = 40	b·tanA = a
b = 5	5·tan40 = a
	4.195 = a

c = ?	$\cos A = \frac{b}{c}$
A = 40	c·cosA = b
b = 5	$c = \frac{b}{\cos A}$
	c = 6.527

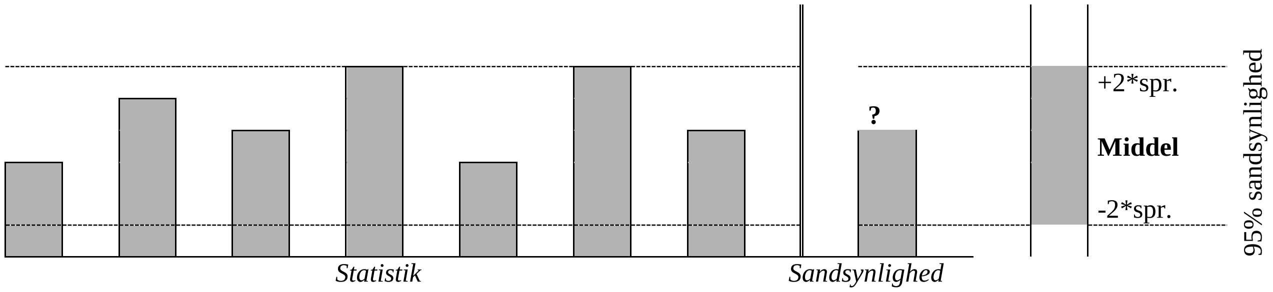


A = ?	$\tan A = \frac{a}{b}$
a = 3	A = tan-1 $\frac{a}{b}$
b = 5	A = tan-1 $\frac{3}{5}$
	A = 30.96

c = ?	$a^2+b^2 = c^2$
a = 3	$\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$
b = 5	$\sqrt{(3^2 + 5^2)} = c$
	$\mathbf{5.831 = \sqrt{34} = c}$

Statistik

Stokastisk variation



Bagud-sige: Middeltal, spredning Forud-sige x = Middeltal ± 2·spredning

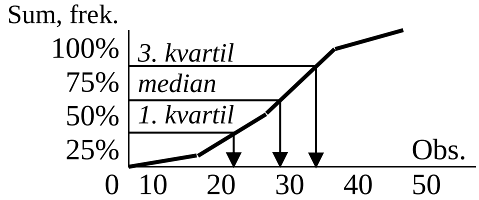
1. Observationer

x: 10, 12, 22, 12, 15, ...

2. Gruppere og optælle hyppighed

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Sum. frek.
x	h	p	∑p
0-10	3	3/40=0.075	0.075
10-20	12	0.300	0.375
20-30	18	0.450	0.825
30-50	7	0.175	1.000
Total	40	1.000	

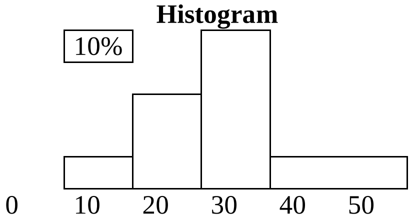
Sumkurve



3. Middeltal eller gennemsnit: Hvis alle observationer var ens ... men de afviger

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Summ. frek.	Middeltal
x	h	p	∑p	μ = ∑xi·pi
0-10	3	3/40=0.075	0.075	5·0.075=0.375
10-20	12	0.300	0.375	4.5
20-30	18	0.450	0.825	11.25
30-50	7	0.175	1.000	7
Total	40	1.000		23.1

Histogram



4. Varians, spredning: Hvis alle afvigelser var ens ...

Observationer	Hyppighed	Frekvens	Summ. frek.	Middeltal	Afvigelse	Varians
x	h	p	∑p	μ = ∑xi·pi	|xi - μ|	v = ∑(xi-μ)^2·pi
0-10	3	3/40=0.075	0.075	5·0.075=0.375	|5-23.1|=18.13	18.13^2·0.075=24.64
10-20	12	0.300	0.375	4.5	8.13	19.80
20-30	18	0.450	0.825	11.25	1.88	1.58
30-50	7	0.175	1.000	7	16.88	49.83
Total	40	1.000		23.1		1 s^2 = 95.86

Spredning s = √95.86 = 9.8

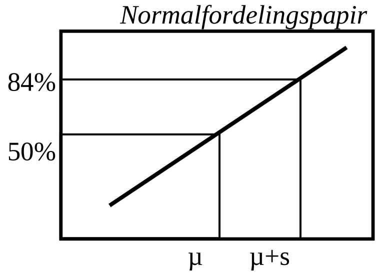
5. Forudsigelse: x = Middeltal ± 2·spredning =μ ± 2·s = 23.1 ± 19.6 *Konfidens-interval* = [3.5 ; 42.7]

6. Binomial fordeling: Gentaget eksperiment med to udfald (gevinst eller tab)

n gentagelser af et eksperiment med to udfald og gevinstchance p. x antal gevinst-gange.

	Obs.	Frek.	Opsum.	Præcis. 3	Max. 2	Min. 2	Min.1 & Max.3
	x	p	∑p	x=3	x≤2	x≥2	1≤x≤3
n	0		0.2560				-0.2560
4	1		0.1792			-0.1792	
	2		0.5248	-0.5248	0.5248		
p	3		0.8704	0.8704			0.8704
0.6	4		1.0000			1.0000	
	Total			0.3456	0.5248	0.8208	0.6144

Normalfordelingspapir



Forudsigelse: Total x = n·p ± 2·√(n·p·(1-p)) Procent x/n = p ± 2·√(p·(1-p)/n) P(x<t) = Ø[(t-MEAN)/DEV]

Vækstregningsopgaver

Brug venligst formel-formular til opgaverne 1-40:

	y	b	a	*svar* A: y = b+a	B: y = b·a
1		4	9	13	36
2		5	4	9	20
3		3	5	8	15
4		2	7	9	14
5	13	3		10	4.333
6	14	6		8	2.333
7	15	9		6	1.667
8	16	6		10	2.667
9	17		7	10	2.429
10	14		3	11	4.667
11	15		9	6	1.667
12	16		6	10	2.667

	y	b	a	*svar* C: b = y–a	D: b = y/a
1		6	4	10	24
2		7	8	15	56
3		3	3	6	9
4		4	5	9	20
5	12	7		5	1.714
6	14	6		8	2.333
7	19	9		10	2.111
8	13	6		7	2.167
9	24		7	17	3.429
10	26		3	23	8.667
11	27		9	18	3.000
12	29		6	23	4.833

A **y=b+a·x**

	y	b	a	x	*svar*
13		120	4	5	140
14		140	12	16	332
15		160	-8	7	104
16		180	-12	12	36
17	230		5	6	200
18	441		13	17	220
19	184		-7	8	240
20	117		-11	13	260
21	322	280		7	6
22	552	300		18	14
23	266	320		9	-6
24	200	340		14	-10
25	416	360	7		8
26	665	380	15		19
27	350	400	-5		10
28	285	420	-9		15

B **y=b·x^a**

	y	b	a	x	*svar*
13	633,36	120,00	1,20	4,00	633,36
14	2753,14	140,00	1,10	15,00	2753,14
15	560,82	160,00	0,70	6,00	560,82
16	1817,57	180,00	0,80	18,00	1817,57
17	1430,29		1,27	5,00	185,24
18	723,06		1,15	16,00	29,82
19	109,62		0,75	7,00	25,47
20	4822,30		0,85	19,00	394,74
21	2814,60	280,00		6,00	1,29
22	9013,44	300,00		17,00	1,20
23	1854,65	320,00		8,00	0,85
24	5630,46	340,00		20,00	0,94
25	3920,50	360,00	1,36		5,79
26	7092,74	380,00	1,25		10,40
27	3113,64	400,00	0,85		11,18
28	6950,91	420,00	0,95		29,18

A **y = b·(1+r)**

	y	b	r	*svar*	*Fordobl.*
29		120	4.3%	125.160	16.5
30		140	24.0%	173.600	3.2
31		160	-7.4%	148.160	-9.0
32		180	-11.7%	158.940	-5.6
33	230		5.2%	218.631	13.7
34	441		13.3%	389.232	5.6
35	184		-6.1%	195.953	-11.0
36	117		-10.7%	131.019	-6.1
37	322	281		14.6%	5.1
38	552	312		76.9%	1.2
39	266	320		-16.9%	-3.7
40	200	340		-41.2%	-1.3

B **y = b·(1+r)^x**

	y	b	r	x	*svar*	*Fordobl.*
29		130	4.3%	4	153.844	16.5
30		140	24.0%	6	508.930	3.2
31		160	-7.4%	9	80.097	-9.0
32		180	-11.7%	5	96.622	-5.6
33	120		20.5%	3	68.584	3.7
34	140		10.2%	4	94.930	7.1
35	160		-8.7%	5	252.212	-7.6
36	180		-20.4%	6	707.610	-3.0
37	612	416		7	5.7%	12.5
38	274	165		8	6.5%	11.0
39	36	92		9	-9.9%	-6.6
40	18	38		5	-13.9%	-4.6
41	892	280	27.6%		4.754	2.8
42	674	300	15.3%		5.686	4.9
43	83	320	-25.5%		4.584	-2.4
44	92	340	-15.3%		7.872	-4.2

45	2^5	32	$x^5 = 30$	1.974	$5^x = 30$	2.113	$\sqrt[4]{(120/30)}$	1.414	$\frac{\log 12}{\log 1.04}$	63.357	$\frac{\log(120/30)}{\log 1.04}$	35.346
46	$3^{1.7}$	6.473	$x^7 = 40$	1.694	$3^x = 90$	4.096	$\sqrt[5]{(130/20)}$	1.454	$\frac{\log 130}{\log 1.5}$	12.005	$\frac{\log(130/40)}{\log 1.05}$	24.158
47	6^{-2}	0.028	$x^4=120$	3.310	$2^x = 70$	6.129	$\sqrt[6]{(140/12)}$	1.506	$\frac{\log 0.23}{\log 0.96}$	36.002	$\frac{\log(40/50)}{\log 0.96}$	5.466
48	$5^{-1.3}$	0.123	$x^6=140$	2.647	$4^x = 80$	3.161	$\sqrt[7]{(150/30)}$	1.258	$\frac{\log 0.15}{\log 0.87}$	13.623	$\frac{\log(50/130)}{\log 0.87}$	6.861

Bogstavregning

Et blandet regnestykke reduceres til et enkelt regnestykke ved at sætte en skjult parentes. Herefter overflyttes enten tal eller parentes: $T = a–b·c = a-(b·c)$. Hvis den ubekendte(s parentes) har regnetegn - eller /, så flyttes denne først. Omform T-formeln til en a-, b- og c-formel. Svarene står til højre.

	T		**Svar: a**	**b**	**c**
1	$T = a + b\cdot c$		$a = T - b\cdot c$	$b = \frac{T-a}{c}$	$c = \frac{T-a}{b}$
2	$T = a - b\cdot c$		$a = T + b\cdot c$	$b = \frac{a-T}{c}$	$c = \frac{a-T}{b}$
3	$T = a + \frac{b}{c}$		$a = T - \frac{b}{c}$	$b = (T-a) \cdot c$	$c = \frac{b}{T-a}$
4	$T = a - \frac{b}{c}$		$a = T + \frac{b}{c}$	$b = (a-T) \cdot c$	$c = \frac{b}{a-T}$
5	$T = (a + b)\cdot c$		$a = \frac{T}{c} - b$	$b = \frac{T}{c} - a$	$c = \frac{T}{a+b}$
6	$T = (a - b)\cdot c$		$a = \frac{T}{c} + b$	$b = a - \frac{T}{c}$	$c = \frac{T}{a-b}$
7	$T = \frac{a+b}{c}$		$a = T\cdot c - b$	$b = T\cdot c - a$	$c = \frac{a+b}{T}$
8	$T = \frac{a-b}{c}$		$a = T\cdot c + b$	$b = a - T\cdot c$	$c = \frac{a-b}{T}$
9	$T = \frac{a}{b+c}$		$a = T\cdot (b+c)$	$b = \frac{a}{T} - c$	$c = \frac{a}{T} - b$
10	$T = \frac{a}{b-c}$		$a = T\cdot (b-c)$	$b = \frac{a}{T} + c$	$c = b - \frac{a}{T}$
11	$T = \frac{a}{b} + c$		$a = (T-c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T-c}$	$c = T - \frac{a}{b}$
12	$T = \frac{a}{b} - c$		$a = (T+c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T+c}$	$c = \frac{a}{b} - T$
13	$T = a \cdot b^{c}$		$a = \frac{T}{b^{c}}$	$b = \sqrt[c]{\frac{T}{a}}$	$c = \frac{\log(\frac{T}{a})}{\log b}$
14	$T = \frac{a}{b^{c}}$		$a = T \cdot b^{c}$	$b = \sqrt[c]{\frac{a}{T}}$	$c = \frac{\log(\frac{a}{T})}{\log b}$
15	$T = (a\cdot b)^{c}$		$a = \frac{\sqrt[c]{T}}{b}$	$b = \frac{\sqrt[c]{T}}{a}$	$c = \frac{\log T}{\log(a\cdot b)}$
16	$T = (\frac{a}{b})^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} \cdot b$	$b = \frac{a}{\sqrt[c]{T}}$	$c = \frac{\log T}{\log(\frac{a}{b})}$
17	$T = (a + b)^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} - b$	$b = \sqrt[c]{T} - a$	$c = \frac{\log T}{\log(a+b)}$
18	$T = (a - b)^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} + b$	$b = a - \sqrt[c]{T}$	$c = \frac{\log T}{\log(a-b)}$
19	$T = a + b^{c}$		$a = T - b^{c}$	$b = \sqrt[c]{T-a}$	$c = \frac{\log(T-a)}{\log b}$
20	$T = a - b^{c}$		$a = T + b^{c}$	$b = \sqrt[c]{a-T}$	$c = \frac{\log(a-T)}{\log b}$
21	$T = a^{(b+c)}$		$a = \sqrt[(b+c)]{T}$	$b = \frac{\log T}{\log a} - c$	$c = \frac{\log T}{\log a} - b$
22	$T = a^{(b-c)}$		$a = \sqrt[(b-c)]{T}$	$b = \frac{\log T}{\log a} + c$	$c = b - \frac{\log T}{\log a}$

Prognoseopgaver

Lineær vækst

Svar:

		Tabel		*Prognose*			*Prognose*		*Ligning*
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*30*	
1	**år**	*1978*	*1983*	*1990*	*?*		1990	**2008**	
	y	120	130	?	180	y=?	**144**	180	y=120+2·x
		+a=?					**a=**	**2**	
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*32*	
2	**år**	*1980*	*1984*	*1992*	*?*		1992	**2012**	
	y	240	260	?	400	y=?	**300**	400	y=240+5·x
		+a=?					**a=**	**5**	
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*14*	*15*	
3	**år**	*1985*	*1990*	*1999*	*?*		1999	**2000**	
	y	170	140	?	80	y=?	**86**	80	y=170-6·x
		+a=?					**a=**	**-6**	
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*22*	
4	**år**	*1978*	*1982*	*1990*	*?*		1990	**2000**	
	y	260	240	?	150	y=?	**200**	150	y=260-5·x
		+a=?					**a=**	**-5**	

5 En vare kostede 320 kr. i 1987 og 460 kr. i 1994.
Hvor mange kroner er varen steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige tilvækst holder sig konstant:
Hvad er da prisen år 1992? Hvornår vil prisen da være 400?

5	*4*	
1992	**1991**	
420	400	y=320+20·x
a=	**20**	

6 En medlemstal var 520 i 1987 og 400 i 1995.
Hvor meget er medlemstallet steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige tilvækst holder sig konstant:
Hvad er da tallet år 1990? Hvornår vil tallet da være 130?

3	*26*	
1990	**2013**	
475	130	y=520-15·x
a=	**-15**	

Eksponentiel vækst

Svar:

		Tabel		*Prognose*			*Prognose*		*Ligning & Fordoblingstid T*
	n	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*13.2*	
7	**år**	*1978*	*1983*	*1990*	*?*		1990	**1991.2**	
	y	120	140	?	180	y=?	**174**	180	y=120·1.031^x
		+r%=?		*T = ?*			**r%=**	**3.1%**	T = 22.7
	n	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*25.5*	
8	**år**	*1980*	*1984*	*1992*	*?*		1992	**2005.5**	
	y	240	260	?	400	y=?	**305**	400	y=240·1.02^x
		+r%=?		*T = ?*			**r%=**	**2.0%**	T = 35.0
	n	*0*	*?*	*?*	*?*		*14*	*19.4*	
9	**år**	*1985*	*1990*	*1999*	*?*		1999	**2004.4**	
	y	170	140	?	80	y=?	**99**	80	y=170·0.962^x
		+r%=?		*T = ?*			**r%=**	**-3.8%**	T = -17.9
	n	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*10.3*	
10	**år**	*1978*	*1982*	*1990*	*?*		1990	**1988.3**	
	y	260	210	?	150	y=?	**137**	150	y=260·0.948^x
		+r%=?		*T = ?*			**r%=**	**-5.2%**	T = -13.0

11 En vare kostede 320 kr. i 1987 og 460 kr. i 1994.
Hvor mange procent er varen steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige vækstprocent holder sig konstant:
Hvad er da prisen år 1992? Hvornår vil prisen da være 400?

5	*4.3*	
1992	**1991.3**	
415	400	y=320·1.053^x
r%=	**5.3%**	T = 13.4

12 En medlemstal var 520 i 1987 og 460 i 1994.
Hvor meget er medlemstallet steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige vækstprocent holder sig konstant:
Hvad er da tallet år 1990? Hvornår vil tallet da være 150?

3	*71.0*	
1990	**2058.0**	
493	150	y=520·0.983^x
r%=	**-1.7%**	T = -40.4

Tabelopgaver, regression

I en tabelopgave skal vi opstille en formel ud fra en tabel. Vi kan regne sig til formlen eller bruge regression.

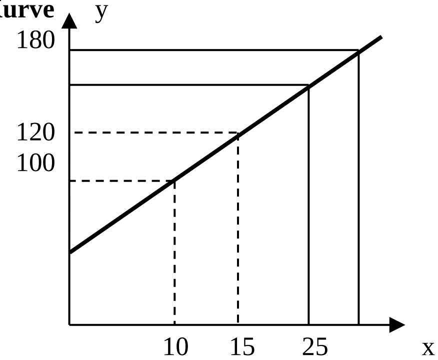
Tabel

x	10	15	25	?
y	100	120	?	180

Lineær vækst +1 dag , +5 kr	y = b+a*x	x:+1, y:+a	++ vækst
Eksponentiel vækst +1 dag , +5 %	y = b*a^x	x:+1, y:+r% a = 1+r	+* vækst
Potentiel vækst +1 % , +5 %	y = b*x^a	x: +1%, y: +a%	** vækst

Tallene a og b kan også findes ved regression på en formelregner eller på Excel

Kurve



Lineær vækst

a = ?	$a = \frac{y2-y1}{x2-x1}$
y2 = 120 **y1 = 100** x2 = 15 x1 = 10	$a = \frac{120-100}{15-10} = a$ **a = 4**

b = ?	y = b+(a·x)
y = 100 a = 4 x = 10	**y–(a·x) = b** 100–(4·10) = b **60 = b**
Test	100 = 60+4*10 100 = 100 ☺

forskrift	y = b+a·x
b = 60 a = 4	**y = 60+4·x**

y = ?	y = 60+4·x
x = 25	y = 60+4·25 **y = 160**

x = ?	y = 60+(4·x)
y = 180	y–60 = 4·x $\frac{y-60}{4} = x$ $\frac{180-60}{4} = x$ **30 = x**

Eksponentiel vækst

a = ?	$a = \sqrt[x2-x1]{\frac{y2}{y1}}$
y2 = 120 y1 = 100 x2 = 15 x1 = 10	$a = \sqrt[15-10]{\frac{120}{100}}$ **a = 1.037** = 1+r r = a-1 = 1.037-1 r = 0,037 = **3.7%** **T** = log2/loga = **19.1**

b = ?	y = b·(a^x)
y = 100 a = 1.037 x = 10	$\frac{y}{a\text{^}x} = b$ $\frac{100}{1.037\text{^}10} = b$ **69.44 = b**

forskrift	y = b·a^x
b = 69.44 a = 1.037	**y = 69.44·1.037^x**

y = ?	**y = 69.44·1.037^x**
x = 25	y = 69.44·1.037^25 **y = 172.80**

x = ?	y = 69.44·(1.037^x)
y = 180	$\frac{y}{69.44} = 1.037\text{^}x$ $\frac{\log\left(\frac{180}{69.44}\right)}{\log(1.037)} = x$ **26.21 = x**
Test	180 = 69.44*1.037^26.21 180 = 179.958 ☺

Potentiel vækst

a = ?	$a = \frac{\log\left(\frac{y2}{y1}\right)}{\log\left(\frac{x2}{x1}\right)}$
y2 = 120 y1 = 100 x2 = 15 x1 = 10	$a = \frac{\log\left(\frac{120}{100}\right)}{\log\left(\frac{15}{10}\right)}$ **a = 0.450**

b = ?	y = b·(x^a)
y = 100 a = 0.450 x = 10	$\frac{y}{x\text{^}a} = b$ $\frac{100}{10\text{^}0.450} = b$ **35.48 = b**

forskrift	y = b·x^a
b = 35.48 a = 0.450	**y = 35.48·x^0.450**

y = ?	y = 35.48·x^0.450
x = 25	**y = 35.48·25^0.450** **y = 151.03**

x = ?	**y = 35.48·x^0.450**
y = 180	$\frac{y}{35.48} = x\text{^}0.450$ $\sqrt[0.450]{\frac{180}{35.48}} = x$ **36.92 = x**
Test	180 = 35.48*36.92^0.450 180 = 179.991 ☺

Opgaver

1	x	10	20	30	
	y	30	50		80
2	x	10	15	25	
	y	100	130		180
3	x	10	20	35	
	y	60	40		10
4	x	10	20	40	
	y	100	70		10

Svar:	a	b	Forskrift	y	x	T
lin	2	10	y = 10+2*x	70	35	
exp	1,052	18	y = 18*1,052^x	83,33	29,2	13,6
pot	0,737	5,5	y = 5,5*x^0,737	67,41	37,84	
lin	6	40	y = 40+6*x	190	23,33	
exp	1,054	59,17	y = 59,17*1,054^x	219,7	21,2	13,2
pot	0,647	22,54	y = 22,54*x^0,647	180,92	24,8	
lin	-2	80	y = 80+-2*x	10	35	
exp	0,96	90	y = 90*0,96^x	21,77	54,19	-17,1
pot	-0,585	230,74	y = 230,74*x^-0,585	28,83	213,92	
lin	-3	130	y = 130+-3*x	10	40	
exp	0,965	142,86	y = 142,86*0,965^x	34,3	74,56	-19,4
pot	-0,515	327,02	y = 327,02*x^-0,515	49	877,72	

Trekantsopgaver

Forstørrelse (ensvinklede trekanter) *svar*

	a	b	c	a'	b'	c'		a	b	c	a'	b'	c'
1	12,340			19,744	23,693	29,616			14,808	18,510			
2	27,148			22,212	14,135	17,164			17,276	20,978			
3		19,744		24,680	28,206	33,494		17,276		23,446			
4		22,212		27,148	18,795	21,927		32,084		25,914			
5			28,382	29,616	32,907	37,843		22,212	24,680				
6			30,850	32,084	23,528	26,737		37,020	27,148				
7	27,148	29,616	33,318	34,552								37,693	42,405
8	41,956	32,084	35,786	37,020								28,309	31,576
9	32,084	34,552	38,254		42,526						39,488		47,082
10	46,892	37,020	40,722		33,123						41,956		36,435
11	37,020	39,488	43,190			51,828					44,424	47,386	
12	51,828	41,956	45,658			41,310					46,892	37,960	

Retvinklede trekanter *svar*

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
13			3,917	33,3		90		2,149	3,275			56,7	
14			6,520	42,5		90		4,401	4,810			47,5	
15			8,423	62,5		90		7,471	3,889			27,5	
16	8,597			51,0		90			6,959	11,061		39,0	
17	9,620			65,9		90			4,298	10,537		24,1	
18	3,787			21,5		90			9,620	10,339		68,5	
19	2,661		4,628			90			3,787		35,1	54,9	
20	3,889		6,266			90			4,913		38,4	51,6	
21	2,763		7,015			90			6,448		23,2	66,8	
22	3,480	6,243				90				7,147	29,1	60,9	
23	2,866	8,597				90				9,062	18,4	71,6	
24	8,597	8,085				90				11,802	46,8	43,2	
25	7,471	6,959			43,0	90				10,210	47,0		
26	6,652	3,991			31,0	90				7,758	59,0		
27		4,503			30,7	90		7,574		8,811	59,3		
28		5,527			32,7	90		8,597		10,220	57,3		
29			8,864		58,7	90		4,606	7,574		31,3		
30			9,560		52,4	90		5,834	7,574		37,6		

Ikke retvinklede trekanter *svar*

	a	b	c	A	B	C		a	b	c	A	B	C
31	1,075			33,3		122,8			0,794	1,646		23,9	
32	2,212			42,5		133,1			0,252	2,392		4,4	
33	3,736			62,5		88,2			2,060	4,209		29,3	
34		4,372		51,0		76,8		4,298		5,383		52,2	
35		1,437		65,9		98,2		4,810		5,214		15,8	
36		4,903		21,5		87,0		1,893		5,162		71,5	
37			2,154	35,1		68,6		1,330	2,249			76,3	
38			2,256	38,4		46,1		1,945	3,118			95,6	
39			2,568	23,2		47,1		1,382	3,302			109,7	
40	1,740	3,541				68,6				3,327	29,1	82,3	
41	1,433	4,346				88,0				4,528	18,4	73,6	
42	4,298	5,724				57,3				4,966	46,8	75,9	
43		5,092	3,738	47,0				3,736				85,9	47,1
44		2,552	3,818	59,0				3,326				41,1	79,8
45		3,940	3,708	59,3				3,787				63,4	57,3
46	4,298		5,030		42,9				3,479		57,3		79,8
47	4,861		4,437		81,9				6,100		52,1		46,1
48	2,917		4,835		77,3				5,067		34,2		68,6

Statistikopgaver

1

				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
10-30	3						
30-40	5						
40-50	9						
50-60	4						
60-70	2						

svar:

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,130	0,130	2,6	23,0	69,3	
0,217	0,348	7,6	8,0	14,1	35,5
0,391	0,739	17,6	2,0	1,5	43,9
0,174	0,913	9,6	12,0	24,9	50,6
0,087	1,000	5,7	22,0	41,9	
1,000		43,0		151,6	
MID±2·SPR:		*18,4*	*67,7*	12,3	

2

				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0-10	3						
10-20	9						
20-30	12						
30-40	11						
40-60	4						

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,077	0,077	0,4	21,5	35,7	
0,231	0,308	3,5	11,5	30,7	17,5
0,308	0,615	7,7	1,5	0,7	26,3
0,282	0,897	9,9	8,5	20,2	34,8
0,103	1,000	5,1	23,5	56,5	
1,000		26,5		143,8	
MID±2·SPR:		*2,6*	*50,5*	12,0	

3

				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
30-40	12						
40-45	14						
45-50	16						
50-55	10						
55-60	7						

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,203	0,203	7,1	10,8	23,7	
0,237	0,441	10,1	3,3	2,6	41,0
0,271	0,712	12,9	1,7	0,8	46,1
0,169	0,881	8,9	6,7	7,6	51,1
0,119	1,000	6,8	11,7	16,2	
1,000		45,8		50,9	
MID±2·SPR:		*31,5*	*60,1*	7,1	

4

				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
20-22	2						
22-24	4						
24-26	8						
26-28	5						
28-32	3						

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,091	0,091	1,9	4,4	1,8	
0,182	0,273	4,2	2,4	1,1	23,8
0,364	0,636	9,1	0,4	0,1	25,3
0,227	0,864	6,1	1,6	0,6	27,0
0,136	1,000	4,1	4,6	2,9	
1,000		25,4		6,3	
MID±2·SPR:		*20,4*	*30,4*	2,5	

5

				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0-2	10						
2-4	22						
4-6	30						
6-8	20						
8-10	6						

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,114	0,114	0,1	3,8	1,6	
0,250	0,364	0,8	1,8	0,8	3,1
0,341	0,705	1,7	0,2	0,0	4,8
0,227	0,932	1,6	2,2	1,1	6,4
0,068	1,000	0,6	4,2	1,2	
1,000		4,8		4,8	
MID±2·SPR:		*0,4*	*9,1*	2,2	

6

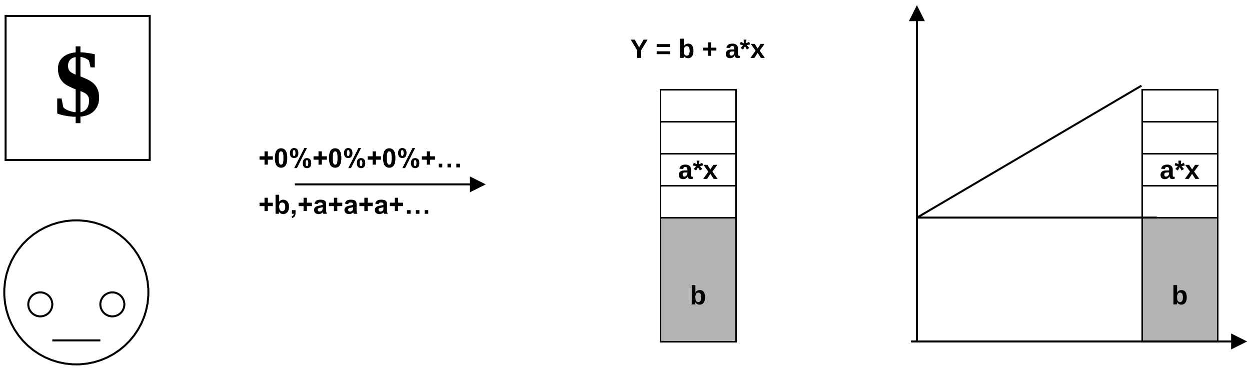
				MID		SPR	KVT
x	h	p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0-20	10						
20-40	22						
40-60	30						
60-100	8						

		MID		SPR	KVT
p	Σp	x·p	$\lvert x-M\rvert$	(x-M)^2·p	
0,143	0,143	1,4	31,4	141,1	
0,314	0,457	9,4	11,4	41,0	26,8
0,429	0,886	21,4	8,6	31,5	42,0
0,114	1,000	9,1	38,6	170,0	12,5
1,000		41,4		383,7	
MID±2·SPR:		*2,3*	*80,6*	19,6	

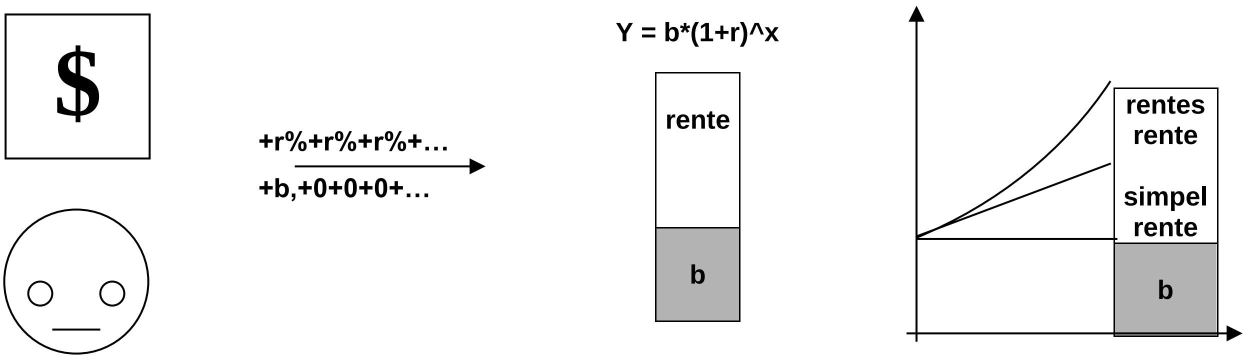
De fire opsparingsformer

I programmet PowerPoint eller Excel kan man vise de fire opsparingsformer:

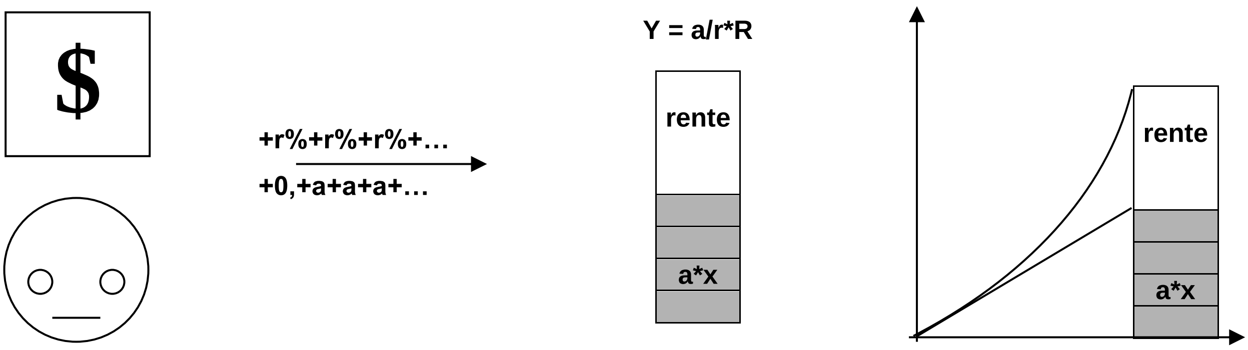
1. Rentefri opsparing: Lineær vækst, PLUS-vækst



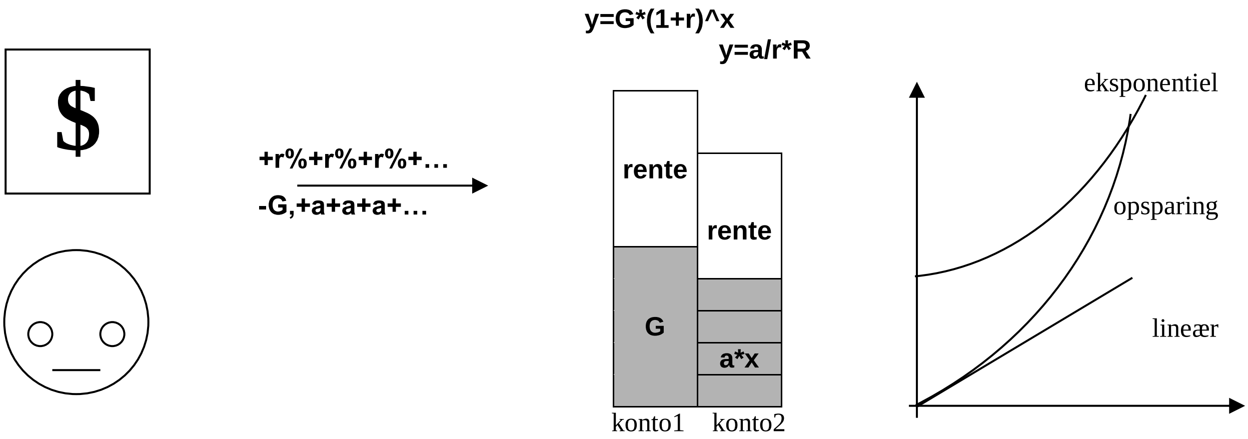
2. Indskudsfri opsparing: Eksponentiel vækst, GANGE-vækst



3. Opsparing uden startbeløb: Opsparings-vækst, PLUS&GANGE-vækst



4. Opsparing med negativt startbeløb: Gældsafvikling, PLUS&GANGE-vækst

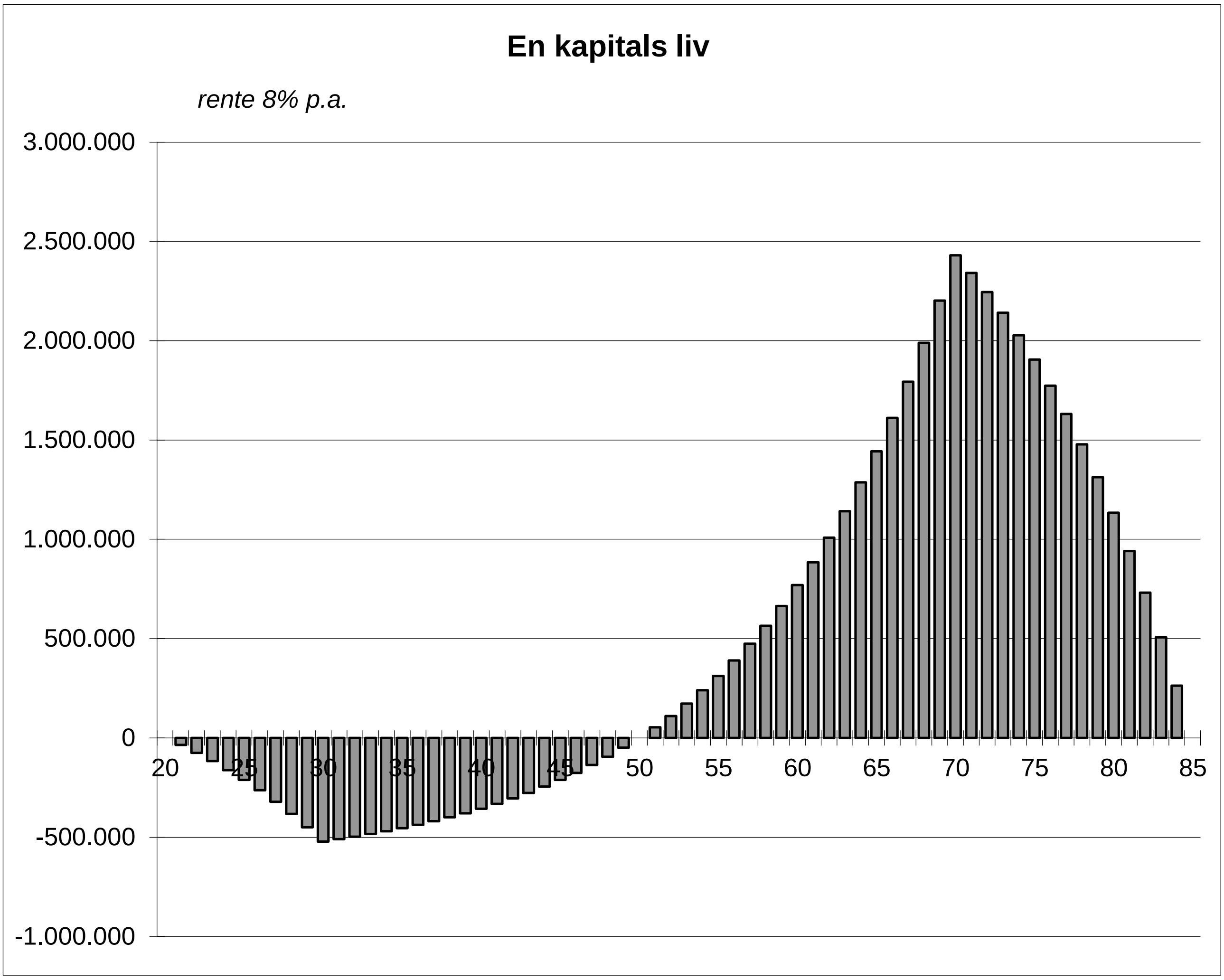


En kapitals liv

I løbet af sin levetid vil en persons kapitalforhold ofte ændre sig.
I det nedenstående eksempel er livet opdelt i fire epoker:

1. 20-30 år: Studielån, hvor der lånes kr. 36.000 per år i 10 år.
2. 30-50: Gældsafvikling, hvor studiegælden afvikles ved at betale kr. 53.000 per år i 20 år.
3. 50-70: Formueopbygning, hvor en formue opbygges ved at vedblive med at indbetale kr. 53.000 per år i 20 år
4. 70-85: Pension, hvor formue afvikles ved at udbetale kr. 284.000 per år i 15 år.

I eksemplet er regnet med en rente på 8% per år.
Dobbeltklik på figuren og rediger renten.



Rentes rente tabel
På måned 0 indsættes kr.1 på konto 0. På måned1 bliver kontoens beløb stående, og dens rente overføres til den næste konto i rækken. I måned 4 har k0 indestående, k1: indestående + rente af k0, k2: indestående + rente af k1, osv.
Eksemplet viser de forskellige konti i tilfældet rente = 100%. Hvad hedder den fremkomne tabel?
Lav en tilsvarende eksempel med rente = 50%.

	m0	m1	m2	m3	m4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
K0	1	1	1	1	1						
K1		1	1+1 = 2	2+1 = 3	3+1 = 4						
K2			1	1+2 = 3	3+3 = 6						
K3				1	1+3 = 4						
K4					1						
K5											
K6											
K7											
K8											
K9											
K10											

Den kvantitative litteratur

Den klassiske kvantitative litteratur er geometri og algebra. Hertil kommer den moderne kvantitative litteratur, skabt af spørgsmål, som kommer fra produktionen: Hvordan hentes sølv og kul op fra minegangene? Hvordan navigeres på havet? Hvordan bygges maskiner? Hvordan optimers en produktion? Hvordan optimeres profitten? Osv.
Der regnes på, hvordan sølvmalm og vand løftes op af minerne, og hvordan sølvmalm forvandles til sølv af forskellig renhedsgrad. Sølvet begiver sig nu på rejse ned ad de tyske floder til Italien, hvorfra købmænd er kommet for at bytte klæde og vin med sølv. Undervejs passeres adskillige borge beliggende på høje bjerge. Købmændene må aflevere sølv som told- og beskyttelsesafgifter, men vinder det tilbage igen gennem spil. Fra Italien rejser sølvet videre når købmændene bytter det med Østens efterspurgte varer, krydderi og silke, enten via den dyre vej over land transporteret af karavaner, eller via den billige vej over hav transporteret af arabiske købmænd i Egypten. Så Italiens rigdomme hober sig op først gennem handel og senere gennem bankudlån. I banken får man brug for at kunne lægge renter sammen og udvikler derfor potensregningen og opdager herved rentes-renten: 7 år á 6% = 42% rente + 8% rentes-rente = 50% da 106%^7 = 150%.
En stor del af fortjenesten går til forbrug af prægtige paladser overalt i Renæssancens Italien, og til ansættelse af kunstnere og filosoffer. Italien bliver udkonkurreret af Portugal, som kan nedsætte prisen på peber til 1/3 ved at overspringe mellemhandlerne og selv at hente Østens varer hjem over havet på egne skibe som sejler rundt om Afrika. Spanien forsøger at finde en anden vej til Indien ved at sejle mod vest. Men i Vest-Indien er der hverken krydderi eller silke, derimod rigeligt med sølv og guld. Paven deler den nye verden mellem Spanien og Portugal. Portugal får alt øst for den 60. længdegrad, Spanien alt vest for. I Spanien og Portugal går fortjenesten til forbrug gennem bygning af kirker og klostre og palæer. I England går fortjenesten til at købe aktier for og etablere industriel produktion.

De tre genrer: Fakta, fiktion og fidus

Både kvalitativ og kvantitativ litteratur kan opdeles i tre genrer: Fakta, fiktion og fidus.
Eksempler på de tre kvalitative genrer er
Fakta: 'DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger København lavt'
Fiktion: 'HVIS København lå i alperne Sjælland, SÅ lå København højt'.
Fidus: 'HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt.'

Fakta

Fakta er 'DaSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige:
"DA prisen er 4 kr./kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr.'.
DaSå beregninger kunne også kaldes FritFalds-beregninger:
'DA accelerationen er 9.8 m/s^2, SÅ vil hastighedstilvæksten på 5 sekunder være 5*9.8 = 49 m/s'.
Eller Rum-beregninger:
'DA rummet har dimensionerne 3mx4mx5m, SÅ er rumfanget V = 3mx4mx5m = 60 m^3'.
Fakta-beregninger kontrolberegnes:
T = 3 kg. á 4 kr./kg. = 3*4 kr. = 15 kr., hov regnefejl, T = 12 kr.
Et eksempel er regnefejlen som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm+3 tommer=5 cm

Fiktion

Fiktion er 'HvisSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige:
"HVIS indkomsten er 4 mio$/år, SÅ vil 6 års indkomst være 6*4 = 24 mio$'.
HvisSå beregninger kunne også kaldes Affalds-beregninger:
'HVIS affaldsmængden er 9.8 kg/dag, SÅ vil arbejdsugens affald være 5*9.8 = 49 kg'.
Eller Rate-beregninger:
'HVIS vækstraten er 3% pr. år, SÅ vil den samlede vækstrate efter 5 år være 15.9%, da 103%^5 = 115,9%'.
Fiktions-beregninger scenarieberegnes:
Indkomsten skønnes at ville ligge mellem 4kr./dag og 5kr./dag, så 3 dages indkomst vil ligge mellem 12 kr. og 15 kr., da T = 3 dage á 4 kr./dag = 3*4 = 12 kr., og T = 3 dage á 5 kr./dag = 3*5 = 15 kr.

Fidus

Fidus er 'HvadSå' beregninger, som kvantificerer det ikke-kvantificerbare:
"HVIS konsekvensen K = "brækket ben' sættes til 2 mio.$, og HVIS sandsynligheden S sættes til 30%, SÅ vil risikoen være R = K*S = 2*0.3 = 0.6 mio.$. Og HVADSÅ? Hvem siger at et brækket ben koster 2 mio. kr.? Og hvem siger at sandsynligheden for at brække et ben overhovedet kan måles?'
HvadSå beregninger kunne også kaldes Dødsfalds-beregninger:
'HVIS omkostningen ved en gravplads er 10 kr./dag, og omkostningen ved en hospitalsplads er 10.000 kr./dag, SÅ er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVADSÅ, betyder det at hastighedsgrænsen så skal sættes op til 200 km/time for at spare penge?'
Eller Risiko-beregninger:
'HVIS vi kan øge sandsynligheden for dødsfald og mindske sandsynligheden for kvæstelse, SÅ vil risikoen ved skolevejen kunne nedsættes. Og HVADSÅ betyder det at vi skal nedlægge fodgængerfeltet?'
Fidus-beregninger afvises og henvises til kvalitativ behandling: 'Risiko = 30%*5mio. Og HVADSÅ, en oplysnings-kampagne kan nedsætte sandsynligheden, og hvem siger at et brækket ben koster 5 mio. kr.?'

Klassiske tekstopgaver

B. Eksempler på babylonske matematikopgaver
B1. Giv mig et tal som sammenlagt med sin reciprok giver tallet b.
B2. Jeg har ganget længden med bredden og fået arealet 10. Jeg har ganget længden med sig selv og fået et areal, som er det samme som hvis jeg ganger forskellen på længden og bredden med sig selv og med 9.
B3. Én mand kan grave 3 stader grøft på 1 dag. Hvor mange mænd skal bruges for at grave 100 stader grøft på 6 dage?
B4. Hvor mange måne-måneder på 29 dage skal der til for at give et helt antal solår på 365 dage?
B5. Forholdet mellem arealet og omkredsens kvadrat er 12 for en cirkel.

Æ. Eksempler på ægyptiske matematikopgaver
Ægypterne skrev på papyrus. Der er to bevarede papyrus-skrifter fra ca. 1700 f.Kr., Rhind-papyrus i London og Moskva-papyrus i Moskva. Begge indeholder problemer og deres løsning, 85 på Rhind, og 25 på Moskva.
Æ1. En mangfoldighed søges så 2/3 af den, ½ af den, 1/7 af den og den selv tilsammen er 33.
Æ2. Af 2 tønder middelgod korn kan laves 5 flasker almindeligt øl. Af 3 tønder god korn kan laves 8 flasker almindeligt øl. 3 flasker god øl svarer til 2 flasker stærkt øl. Hvor meget korn skal bruges til at lave 20 flasker almindeligt øl? Og til at lave 30 flasker stærkt øl?
Æ3. En trekant har arealet A = ½*side*side. En cirkel har arealet A = (8d/9)^2, hvor d er diameteren. Arealet af en firkant med modsatte sider a og b, hhv. c og d er A = (a+b)/2*(c+d)/2, hvilket også gælder hvis d=0.
Æ4. Rumfanget af en afskåret kegle til vand er V = h/12 * (3*(D+d)/2)^2, hvor h er højden og (D+d)/2 er den gennemsnitlige omkreds. Rumfanget af en afskåret pyramide med kvadratisk grundfalde er V = h/3 * (a^2 + a*b + b^2), hvor h er højden og a og b er sidelængderne for oven og for neden.
Æ5. Året går fra den første dag, hvor Sirius er synlig i horisonten lige før solopgang. Dette giver en kalender med 365 dage, som opdeles i 12 måneder á 30 dage plus 5 dage til sidst. Der medtages ikke skuddag hver fjerde år. Denne kalender blev overtaget af Julius Cæsar, som dog tilføjede en skuddag.
Æ6. Byg en pyramide af kubiske sten, som skal løftes af en løftestang. 1 mand kan løfte en sten, hvis stangen er 30 meter lang. Hvor mange mænd skal løfte, hvis stangen kun er 12 meter lang?

Uforudsigelige spil, hasard
S1. En tipskupon kan falde ud på 3^13 forskellige måder.
S2. Lotto er en klumpudtagning. Et udtag af 5 tal blandt 20 kan derfor falde ud på K(20,5) = 15504 forskellige måder.
S3. I spillet ”21” får man kort indtil man stopper eller passerer 21. Kortet tæller hvad der står, billedekort 10, es 1 eller 11. Hvis man får over 21 er man ude. Jeg har 16 skal jeg stoppe? Jeg kan bruge højst en femmer. Antallet af brugbare kort er 4*5 = 20 ud af 52 kort. Der er da 38% chance for få noget brugbart. Forudsat alle kort er i bunken hvad de naturligvis ikke er. Så denne beregning siger ikke meget med mindre jeg ved hvilke kort der er tilbage.
S4. Mini-poker. To spillere A og B indskyder hver a kr. i puljen. De får hver et kort, først A så B. De røde kort er H-kort (høje), de sorte er L-kort (lave). 1) A vælger ”SE”: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. 2) A vælger ”MER” ved igen at lægge b kr. i puljen. I så fald har B to muligheder: ”GÅ” eller ”SE” ved at lægge b kr. i puljen. Ved ”SE” gælder som før: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. Ved ”GÅ” får A puljen. Hvilke værdier for a og b gør spillet retfærdigt?

Forudsigelige spil, snydespil
S5. Snydespil er spil man altid kan vinde, hvis man kender den vindende strategi. Man kan vise at alle NIM-spil er snydespil. I et NIM-spil skiftes spillerne til at fjerne tændstikker. Den der sidst fjerner har vundet.
S6. På bordet anbringes fire rækker med hhv. 1, 3, 5 og 7 tændstikker i. Spillerne skiftes til at fjerne tændstikker, men kun i én række ad gangen. Andenspiller har en vindende strategi, dvs. andenspiller har vundet på forhånd blot han laver de rigtige træk. (Tip: Optæl i 2ere og se symmetrien. Førstespiller ødelægger symmetrien, andenspiller genopretter den).
S7. På bordet anbringes én række med 15 tændstikker. Spillerne skiftes til at fjerne 1 eller 2 tændstikker. Hvem har en vindende strategi?

Proportionalitet
Proportionalitetsopgaver forekommer overalt hvor der skal veksles om mellem to forskellige typer enheder, altså opgaver hvor der er et konstant pertal mellem to enheder. Dvs. situationer hvor en mangfoldighed kan optælles i to forskellige enheder.

	Ligefrem (indkøbsopgaver)	Omvendt (grøfteopgaver)
Spørgsmål	3 kg. = 4 kr. 5 kg. = ? kr. ? kg. = 10 kr.	5 mand graver en grøft på 7 dage 3 mand graver en grøft på ? dage ? mand graver en grøft på 4 dage.
Svar	T = 5 kg. = (5/3)*3 kg. = (5/3)*4 kr. = 6.67 kr. T = 10 kr. = (10/4)*4 kr = (10/4)*3 kg= 7.5 kg	Mand-dage = 5*7 = 35 = (35/3)*3 = 11.67*3 Mand-dage = 5*7 = (35/4)*4 = 8.75*4

Standardopgaver
Ved løsning af de klassiske standardopgaver benyttes følgende fremgangsmåde:
Lav en hurtig gennemlæsning for at se, hvilken type opgave det er. Find spørgsmålstegnet, som viser hvad den ubekendte x er. Hvis der er flere ubekendte, lad altid x være den mindste ubekendte. Den anden kan da enten udtrykkes ved x, eller kaldes y. Omformuler teksten, så den begynder med ”Lad x = <f.eks. kilo-tallet>”, og brug kun ordet ’er’, som kan oversættes direkte til lighedstegnet ’=’.
Oversæt opgaven fra tekst til ligninger, løs ligningerne, og oversæt tilbage.

Styktals-opgaver

Type1.1 talproblemer

Problem: ”To tal har summen 72, og det ene er dobbelt så stor som det andet. Hvilke tal er det?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Tal1	x = ?	*24*	x + y	= 72
Tal2	y = 2*x	*48*	x + 2*x	= 72
			3*x	= 72
			x	= 72/3 = 24

Type1.2 møntopgaver

A betaler en regning på 210 kr. med tre typer mønter: 1ere, 2ere og 5ere. Der er 4 gange så mange 1ere som 2ere, og 20 færre 2ere end 5ere. Hvor mange mønter af hver type blev brugt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
5ere	x = ?	*30*	x*5 + (x-20)*2 + 4*(x-20)*1	= 210
2ere	x-20	*10*	5*x + 2*x – 40 + 4*x – 80	= 210
1ere	4*(x-20)	*40*	11*x	= 210 + 120
			x	= 330/11
			x	= 30

Type1.3 aldersopgaver

A er 4 gange så gammel som B. For 5 år siden var A 7 gange så gammel som B. Hvor gammel er A og B nu?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
B’s alder nu	x = ?	*10*	7*(x-5)	= 4*x – 5
A’s alder nu	4*x	*40*	7*x – 35	= 4*x – 5
B’s alder da	x - 5		7*x – 4*x	= – 5 + 35
A’s alder da	4*x - 5		3*x	= 30
			x	= 30/3
			x	= 10

Type1.4 geometriopgaver

Et rektangel har en omkreds på 224 meter. Længden er 4 meter kortere end 3 gange bredden. Hvad er længde og bredde?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Bredde	x = ? meter	*29*	2*x + 2*(3*x-4)	= 224
Længde	3*x-4 meter	*83*	2*x + 6*x – 8	= 224
			8*x	= 224 + 8
			x	= 232/8
			x	= 29

Type1.5 vægtstangsopgaver

A, B og C sætter sig på en vippe, B og C på samme side. De vejer hhv. 100kg, 80 kg og 40 kg. A og B sidder begge 3 meter fra omdrejningspunktet. Hvor skal C sidde for at der bliver ligevægt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*	
C’s meter-tal	x = ?	*1.5*	100*3	= 80*3 + 40*x
A’s bidrag	100*3		300	= 240 + 40*x
B’s bidrag	80*3		300 – 240	= 40*x
C’s bidrag	40*x		60/40	= x
			1.5	= x

PerTals-opgaver

I pertals opgaver skal pertal altid omregnes til styktal før ligningen kan opstilles.

Type2.1 rejseproblemer

Problem21: Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. To timer senere kører tog2 kører fra A til B med hastigheden 60 km/t. Hvornår overhaler tog2 tog 1?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Timetallet		x = ?	*4*	40*(x+2)	= 60*x
Hastighed1	40 km/t			40*x + 80	= 60*x
Hastighed2	60 km/t			80	= 60*x – 40*x = 20*x
Km-tal1		40*(x+2) km	*240*	80/20	= x
Km-tal2		60*x km	*240*	4	= x

Problem22: Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. Samtidig kører tog2 kører fra B til A med hastigheden 60 km/t. Hvornår mødes de to tog, når afstanden fra A til B er 300 km?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Timetallet		x = ?	*4*	40*x + 60*x	= 300
Hastighed1	40 km/t			100*x	= 300*x
Hastighed2	60 km/t			x	= 300/100
Km-tal1		40*x km	*120*	x	= 3
Km-tal2		60*x km	*180*		

Problem23: I en motorbåd tager samme afstand 3 timer modstrøms, og 2 timer medstrøms. Hvad er bådens fart, når strømmens fart er 5 km/t?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Fart	x = ? km/t		*25*	km = km/t*t = (x-5)*3	= (x+5)*2
Fart modstrøms	x – 5 km/t		*20*	3*x-15	= 2*x+10
Fart medstrøms	x + 5 km/t		*30*	3*x-2*x	= 10+15
Sejltid		3 timer		x	= 25

Type2.2 blandingsopgaver

? Liter 40% alkohol + 3 liter 20% alkohol giver ? liter 32% alkohol

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Liter-tallet		x = ? liter	*4.5*	0.4*x + 0.2*3	= 0.32*(x+3)
Liter-tal3		x+3 liter	*7.5*	0.4*x + 0.6	= 0.32*x + 0.96
Alkohol1	40%	0.4*x liter		0.4*x - 0.32*x	= 0.96- 0.6
Alkohol2	20%	0.2*3 liter		0.08*x	= 0.36
Alkohol3	32%	0.32*(x+3)	liter	x	= 0.36/0.08
				x	= 4.5

Type2.3 finansopgaver

A investerer en tipsgevinst på 400.000 kr. på følgende måde: Noget sættes til forrentning til 3% p.a., resten sættes i 8% obligationer. Hvor meget investerede han i hver når det årlige udbytte er 20.000 kr?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Bank i tusinde		x = ? kr.	*240*	3%*x + 8%*(400-x)	= 20
Obligationer i tusinde		x+3 kr.	*160*	0.03*x + 32 – 0.08*x	= 20
Rente i bank	3%			32 - 20	= 0.08*x – 0.03*x
Rente på obligationer	8%			12	= 0.05*x
Bankens bidrag		3%*x kr.		12/0.05	= x
Obligationernes bidrag		8%*(400-x) kr.		240	= x

Type2.4 arbejdsopgaver

A kan grave en grøft på 4 timer. B kan grave samme grøft på 3 timer. Hvor lang tid tager det at grave den sammen?

Tekst	*Pr.tal*	*Styk-tal*	*SVAR*	*Ligning*	
Tid		x = ? timer	*12/7*	¼*x + 1/3*x	= 1
A’s fart	1/4 grøft/t			(¼ + 1/3)*x	= 1
B’s fart	1/3 grøft/t			7/12*x	= 1
A’s bidrag		¼*x		x	= 12/7
B’s bidrag		1/3*x			

Mekanikopgaver

M1. En bold falder fra toppen af en skyskraber (der ses bort fra luftmodstand). Efter 0 sek er bolden i 300 meters højde. Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 0 meters højde. Hvad er nedslagshastigheden?.

Højde efter 5 sek.: *Nedslagstid:* *Nedslagshastighed:*

s = ? meter	s = ½*g*t^2		t = ? sek.	s = ½*g*t^2		v = ? m/s	v = g*t
t = 5 sek. g = 9.8 m/s^2 Højde = ?	s = ½*9.8*5^2 s = 123.7 meter H = 300-123.7 H = 177.3 m		s = 300 m g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*300/9.8g) = t 7.82 sekunder = t		t = 7.82 sek. g = 9.8 m/s^2	v = 9.8*7.82 v = 76.6 m/s

M2. En bold skydes lodret op med en begyndelseshastighed på 30 m/s (der ses bort fra luftmodstand). Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 40 meters højde. Efter ? sekunder er bolden i maksimalhøjden?

Højde efter 5 sek.: *Tid til 40 m:*

s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t		t = ? sek.	s = ½*g*t^2+vo*t
t = 5 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*5^2+30*5 s = 27.5 meter		s = 40 m. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	40 = -4.9*t^2+30*t 4.9*t^2-30*t+40 = 0 t = 1.96 og 4.16 sekunder

Stigtid indtil hastighed = 0: *Stighøjde:*

t = ? sek.	v = g*t+vo		s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t
v = 0 m/s g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	(v-vo)/g = t (0-30)/(-9.8) = t 3.1 sekunder = t		t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*3.1^2+30*3.1 s = 45.9 meter

Opgavens højde-del kan også regnes som en opgave i omsætning af energi fra bevægelsesenergi til beliggenhedsenergi:

Stighøjde	h = ? meter	Ep = Ek
Stigtid Acceleration Begyndelseshastighed Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi	t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h	m*g*h = ½*m*v^2 h = ½*v^2/g h = ½*30^2/9.82 h = 45.8 meter

M3. En person på 100 kg udfører et Bounty-spring fra en bro (der ses bort fra luftmodstanden). Der er 220 meter ned. Fødderne er fæstnet i et tov på 120 meter, som er fæstnet i en fjeder med fjederkonstant k = 100 N/m, svarende til at 10 kg kan forlænge fjederen 1 m. Hvor langt kommer personen ned? Hvad hvis personen vejede 150 kg?

Fjederudstrækning	x = ? meter	Ef = Eb
Falddistance Acceleration Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi Fjederenergi	d = 120+x g = -9.8 m/s^2 Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h Ef = ½*k*x^2	½*k*x^2 = m*g*h x^2 = 2*m*g*h/k x =√(2*m*g*h/k) x = √(2*100*9.82*120/100) x = 48.5 d = 120+48.5 = 168.5 meter

M4. En person gynger i en gynge (der ses bort fra luftmodstanden). Gyngestativet er 4 m højt og snorelængde er 3 m. Hvad er svingningstiden? I yderstillingen er udsvinget 50 grader. Hvad er maksimalhastigheden? Hvor langt er springet hvis afsættet sker i nederste position?

Svingningstid	T = ? sekunder	T = 2*π* √(l/g)
Snorelængde Acceleration	l = 3 m g = -9.8 m/s^2	T = 2*π* √(3/9.82) T = 3.47 sekunder

Stig-højde ved 50 graders udsving: *Maksimalhastighed ved 0 graders udsving:*

s = ? meter	s = l – l*cos v		v = ? m/sek.	Ek = Ep
l = 3 meter v = 50 grader	s = 3 – 3*cos50 s = 1.07 meter		h = 1.07 m g = 9.8 m/s^2	½*m*v^2 = m*g*h v^2 = 2*g*h v =√(2*g*h) v = √(2*9.82*1.07) v = 4.58 meter/sekund

Faldtid ved 0 graders udsving: *Springlængde ved 0 graders udsving:*

t = ? sekunder	s = ½*g*t^2		s = ? meter	s = v*t
s = 4-3 = 1 meter g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*1/9.82) = t 0.45 sekunder = t		v = 4.58 m/s t = 0.45 s	s = 4.58*0.45 s = 2.06meter

Andre opgaver fra fysik og kemi

Mekanikopgaver
M5. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet?

M6. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet?

M7. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet? Hvad er vinklen mellem de udgående retninger?

M8. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet? Hvad er kuglernes fælles retning efter sammenstødet?

M9. En person på 100 kg sidder med en 20 kg tung bold på en glat flade. Pludselig smider han kuglen væk så kuglen får hastigheden 4 m/s. Hvilken hastighed får personen?

M10. En kugle på 5 kg slynges vandret rundt i en cirkel med radius 3 m. Svingningstiden er 1.3 sekunder. Hvilken trækkraft udøver kuglen? Hvilken hastighed har kuglen? Snoren springer, og kuglen falder 2 meter lodret før den rammer jorden? Hvor langt bevæger den sig i vandret retning? Med hvilken hastighed rammer den jorden?

M11. Hvor meget energi er der i en roterende stang med længde 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M12. Hvor meget energi er der i en roterende cirkulær skive med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M13. Hvor meget energi er der i en roterende kugle med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

Varmelæreopgaver
I en beholder befinder der sig 3.26 kg is ved temperaturen –25 grader celsius. Isen opvarmes med en dypkoger med effekten 500 watt. Hvor mange sekunder skal dypkogeren være tændt for at opvarme isen til 0 grader celsius? Herefter er dypkogeren tændt i 3 minutter. Hvor mange kg is smelter? 3.26 kg vand opvarmes fra 0 grader celsius til 80 grader celsius på 426 sekunder. Hvad er dypkogerens effekt nu? Hvor mange kg vand kan fordampes på 215 sekunder hvis dypkogerens effekt er 1500 watt?

Tryklæreopgaver
I en beholder på 30 liter findes 0.234 kg vanddamp ved en temperatur på 110 grader celsius. Hvad er trykket? Temperaturen stiger til 150 grader celsius. Hvor mange procent stiger trykket? Beholderen udvides til 40 liter. Hvor mange procent falder trykket? 0.1 kg vanddamp slippes ud. Hvor mange procent falder trykket? Temperaturen stiger nu indtil trykket er vokset med 30%. Hvad er sluttemperaturen?

Elopgaver
To apparater A og B er anbragt i serie i et kredsløb, som er forsynet med strøm af en joulekilde på 12 volt. A består af to apparater C og D anbragt parallelt. Hvor mange watt modtager apparaterne B, C og D, når de har følgende modstande, B: 10ohm, C: 15 ohm, D: 20 ohm.

Kemiopgaver
Ethan-gas forbrændes med ilt og producerer kuldioxid og vand. Hvor meget? (Støkiometri)

proces	Ethan C2H6	+	Oxygen O2	→	Kuldioxid CO2	+	Vand H2O	
symboler	2 C2H6	+	7 O2	→	4 CO2	+	6 H2O	
stofmængde	2		7		4		6	mol
Masse	2*30 = 60		7*32 = 224		4*44 = 176		6*18 = 108	gram
Volumen	2*24 = 48		7*24 = 168		4*24 = 96		0.108/1 = 0.108	liter

40 gram ethan + ? gram ilt -> ? gram kuldioxid + ? gram vand

40 gram ethan = (40/60)*60 gram ethan = (40/60)*224 gram oxygen = 149 gram oxygen
= (40/60)*176 gram kuldioxid = 117 gram kuldioxid
= (40/60)*108 gram vand = 72 gram vand

40 liter ethan + ? gram ilt -> ? mol kuldioxid + ? gram vand

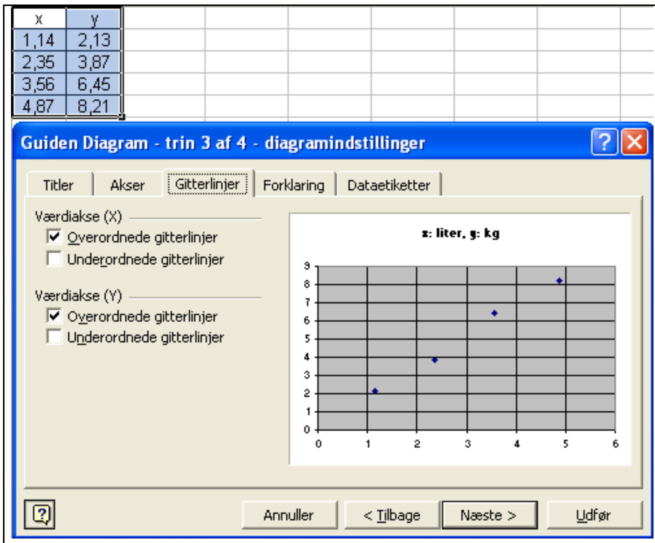
40 liter ethan = (40/48)*48 liter ethan = (40/48)*224 gram oxygen = 187 gram oxygen
= (40/48)*4 mol kuldioxid = 3.33 mol kuldioxid
= (40/48)*108 gram vand = 90 gram vand

3.6 mol ethan + ? gram ilt -> ? liter kuldioxid + ? mol vand

3.6 mol ethan = (3.6/2)*2 mol ethan = (3.6/2)*224 gram oxygen = 403 gram oxygen
= (3.6/2)*96 liter kuldioxid = 173 liter kuldioxid
= (3.6/2)*6 mol vand = 10.8 mol vand

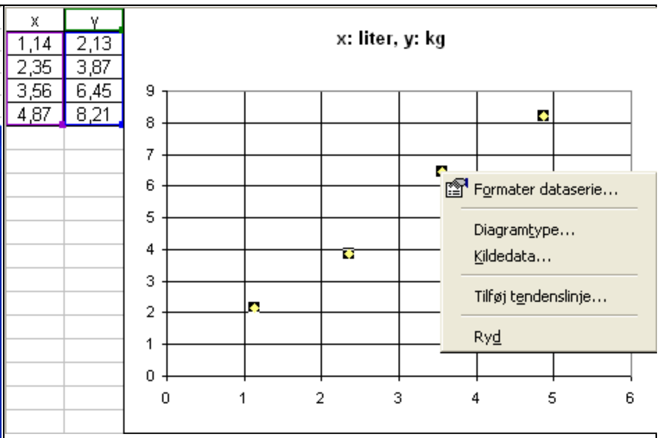
Regression

Forskellige sten er målt mht. rumfang x og masse y. Vi opstiller en formel y = a*x for sammenhængen. Vi bestemmer derfor proportionalitetskonstanten (per-tallet, kg/l-tallet, massefylden) a ved lineær regression:

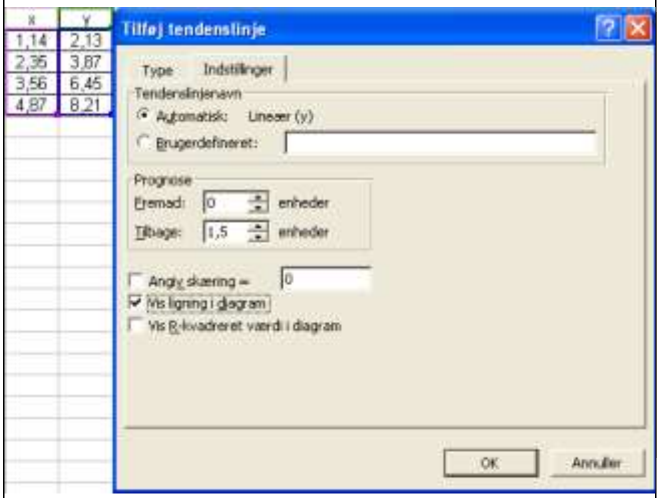


1. Tabellen indtastes og indrammes
2. Tabellen markeres og Diagram vælges
3. XY-punkt vælges

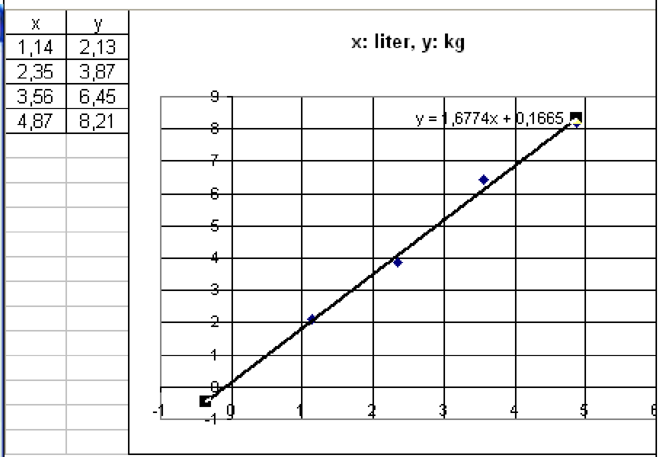
I trin 3 tilvælges overordnede gitterlinier for både x og y



Pilen anbringes på et punkt og efter højreklik vælges 'Tilføj tendenslinie'



Under indstillinger trækkes kurven tilbage til skæring med y-aksen.
'Vis ligning' tilvælges.



Resultatet: a = 1.68

Opgaver

1

x	2.1	4.5	6.3	3.8	?
y	4.2	8.7	12.0	?	7.5

2

x	3.1	4.6	7.3	5.8	?
y	2.6	4.1	6.3	?	8.5

3

x	1.8	4.2	7.3	3.2	?
y	2.7	6.7	9.8	?	7.1

4

x	2.3	3.6	7.2	8.1	?
y	4.3	6.9	12.8	?	9.5

Projekt Befolkningsprognoser

Problemformulering: Hvordan vil befolkningstallet udvikle sig de næste 100 år i EU-15 og Tyrkiet?
Vi opstiller en række scenarier byggende på forskellige antagelser
Grund-antagelser:

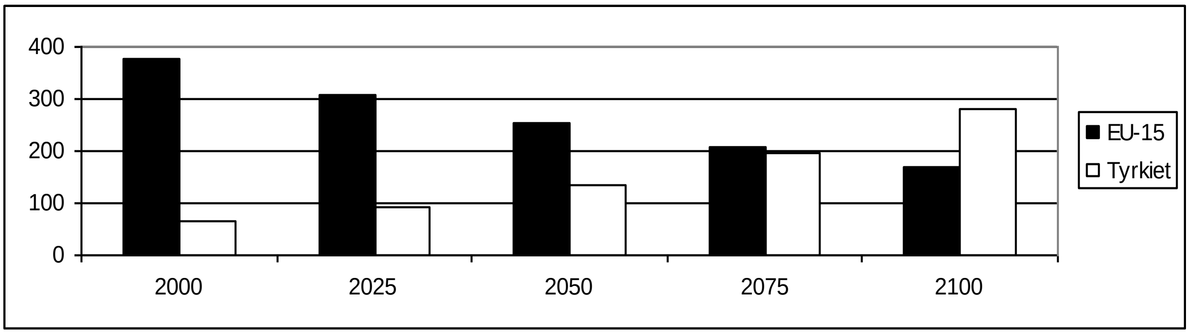
1. Befolkningens kvinder får det gennemsnitlige antal piger/kvinde B i den gennemsnitlige fødealder F
2. Befolkningen vokser med samme procent som antallet af kvinder i fødealderen F
3. Der fødes lige mange af hvert køn. 3 børn/par svarer således til 1.5 pige pr. kvinde
4. Tyrkiets befolkningstal er 50mio i 1985, 60mio. i 1993, 70mio i 2005.

Scenarie 1: Uændrede tal

	F	P	vækst%	Fordobl.
EU-15	28	0,8	-0,79%	-87
Tyrkiet	23	1,4	1,47%	47

Befolkningstal i mio.

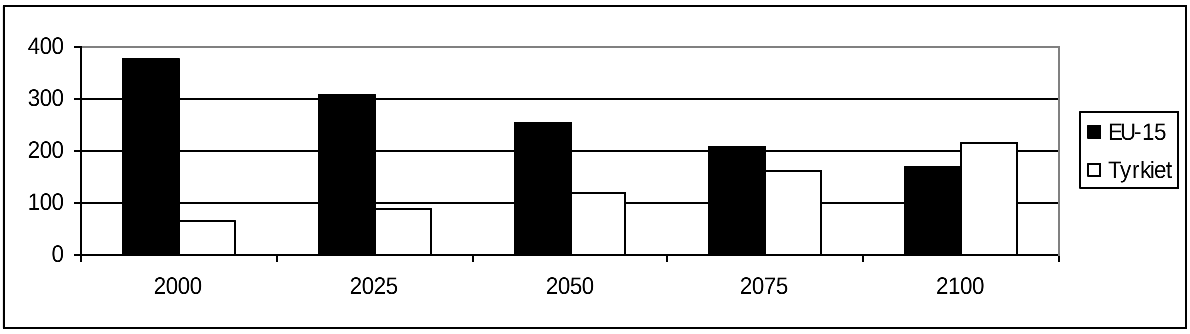
Prognose	2000	2025	2050	2075	2100
EU-15	377	309	253	207	170
Tyrkiet	65	94	135	195	281
Total	442	403	388	402	451



Scenarie 2: Produktionen vinder, kvinder skal uddannes

	F	P	vækst%	Fordobl.
EU-15	28	0,8	-0,79%	-87
Tyrkiet	28	1,4	1,21%	58

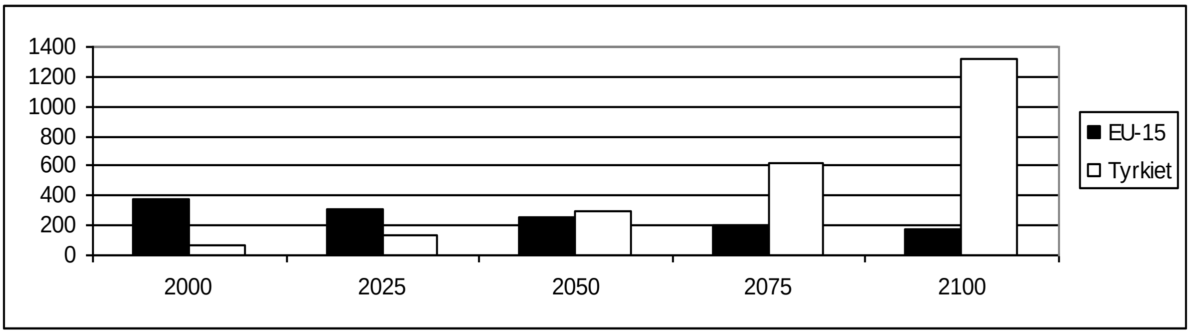
Prognose	2000	2025	2050	2075	2100
EU-15	377	309	253	207	170
Tyrkiet	65	88	119	160	216
Total	442	397	372	367	386



Scenarie 3: Religionen vinder, kvinder skal føde 4 børn

	F	P	vækst%	Fordobl.
EU-15	28	0,8	-0,79%	-87
Tyrkiet	23	2	3,06%	23

Prognose	2000	2025	2050	2075	2100
EU-15	377	309	253	207	170
Tyrkiet	65	138	293	623	1324
Total	442	447	546	830	1493



SVAR: I alle tre scenarier vil Tyrkiet have overhalet EU-15 år 2100. Disse scenarier bygger imidlertid på bestemte antagelser, som kan vise sig ikke at holde stik.

Hjemmeregning

01. En kapital på 1430 kr. voksede med 30 kr. og blev til ? kr.
02. En kapital på 1600 kr. mindskedes med 30 kr. og blev til ? kr.
03. En kapital på 2300 kr. voksede med ? kr. og blev til 2340 kr.
04. En kapital på 4600 kr. mindskedes med ? kr. og blev til 4560 kr.
05. En kapital på ? kr. voksede med 50 kr. og blev til 5450 kr.
06. En kapital på ? kr. mindskedes med 50 kr. og blev til 6270 kr.
07. En kapital på 1200 kr. voksede med 30 kr. 4 gange og blev til ? kr.
08. En kapital på 896 kr. mindskedes med 30 kr. 5 gange og blev til ? kr.
09. En kapital på 160 kr. voksede med 40 kr. ? gange og blev til 400 kr.
10. En kapital på 1203 kr. mindskedes med 40 kr. ? gange og blev til 923 kr.
11. En kapital på 356 kr. voksede med ? kr. 8 gange og blev til 756 kr.
12. En kapital på 1205 kr. mindskedes med ? kr. 9 gange og blev til 755 kr.
13. En kapital på ? kr. voksede med 60 kr. 10 gange og blev til 1523 kr.
14. En kapital på ? kr. mindskedes med 60 kr. 11 gange og blev til 186 kr.
15. En kapital på 1600 kr. blev 1.25 gange større og blev til ? kr.
16. En kapital på 620 kr. blev ? gange større og blev til 527 kr.
17. En kapital på ? kr. blev 1.05 gange større og blev til 819 kr.
18. En kapital på 820 kr. blev 1.25 gange større 3 gange og blev til ? kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
19. En kapital på 530 kr. blev 0.85 gange større ? gange og blev til 276.66 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
20. En kapital på 423 kr. blev ? gange større 5 gange og blev til 539.87 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
21. En kapital på ? blev 0.95 gange større 6 gange og blev til 335.20 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
22. En kapital på 567 kr. voksede med 20% og blev til ? kr.
23. En kapital på 753 kr. mindskedes med 25% og blev til ? kr.
24. En kapital på 126 kr. voksede med ?% og blev til 163.8 kr.
25. En kapital på 786 kr. mindskedes med ?% og blev til 510.9 kr.
26. En kapital på ? kr. voksede med 40% og blev til 642.6 kr.
27. En kapital på ? kr. mindskedes med 45% og blev til 67.65 kr.
28. En kapital på 753 kr. voksede med 20% 4 gange og blev til ? kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
29. En kapital på 956 kr. mindskedes med 25% 5 gange og blev til ? kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
30. En kapital på 486 kr. voksede med 30% ? gange og blev til 2345.83 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
31. En kapital på 324 kr. mindskedes med 35% ? gange og blev til 15.88 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
32. En kapital på 743 kr. voksede med ?% 4 gange og blev til 2854.31 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
33. En kapital på 896 kr. mindskedes med ?% 5 gange og blev til 45.09 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
34. En kapital på ? kr. voksede med 50% 6 gange og blev til 1423.83 kr. Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
35. En kapital på ? kr. mindskedes med 55% 7 gange og blev til 1.45 kr. Hvad er den tilsvarende halveringstid?
36. En kapital voksede med 7.2%, 4.3% og –2.4%. Hvad er den samlede rente? Hvad er den gennemsnitlige rente pr. år.
37. En kapital voksede med 3.8%, -5.2% og 6.4%. Hvad er den samlede rente? Hvad er den gennemsnitlige rente pr. år.
38. En kapital voksede med 7.2% 4 gange. Hvad er den samlede rente? Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
39. En kapital mindskedes med 7.2% 5 gange. Hvad er den samlede rente? Hvad er den tilsvarende halveringstid?
40. En kapital voksede med 42.9% i alt over 3 gange. Hvad er den gennemsnitlige rente pr. gang? Hvad er den tilsvarende fordoblingstid?
41. En kapital mindskedes med 42.9% i alt over 5 gange. Hvad er den gennemsnitlige rente pr. gang. Hvad er den tilsvarende halveringstid?

42. 20% af 670 kr. giver ? kr.	45. 600 kr. + 21% giver ? kr.	48. 600 kr. - 21% giver ? kr.
43. 20% af ? kr. giver 600 kr.	46. 600 kr. + ?% giver 760 kr.	49. 600 kr. - ?% giver 760 kr.
44. ?% af 400 kr. giver 80 kr.	47. ? kr. + 32% giver 820 kr.	50. ? kr. - 32% giver 820 kr.

51. I 1993 var der 420 kr. I 1998 var der 630 kr. I 2005 var der ? kr. I ? var der 950 kr. Lineær og eksponentiel vækst.
52. I 1994 var der 720 kr. I 1998 var der 630 kr. I 2004 var der ? kr. I ? var der 250 kr. Lineær og eksponentiel vækst.
53. I trekant ABC er C=90, A=42, c=5. Find resten.
54. I trekant ABC er C=90, A=34, a=6. Find resten.
55. I trekant ABC er C=90, A=28, b=7. Find resten.
56. I trekant ABC er C=90, a=3, c=5. Find resten.
57. I trekant ABC er C=90, b=4, c=5. Find resten.
58. I trekant ABC er A=32.6, b=4.6, c=5.2. Find resten.
59. I trekant ABC er A=42.6, B=74.6, c=6.2. Find resten.
60. I trekant ABC er A=34.8, b=4.6, a=5.2. Find resten.
61. Løs ligningen $2+3\cdot(1+x)^4 = 20$
62. Løs ligningen $4+5\cdot(1+x)^6 = 30$
63. Løs ligningen $40-3\cdot(1-x)^4 = 20$
64. Løs ligningen $50-4\cdot(1-x)^5 = 10$
65. Omskriv ligningerne $T= d-e$, $T = d - \frac{e}{f}$, $T = d - \frac{e-f}{g}$ 66. Omskriv ligningerne $T = \frac{d}{e}$, $T = \frac{d}{e} - f$, $T = \frac{d-e}{f} - g$

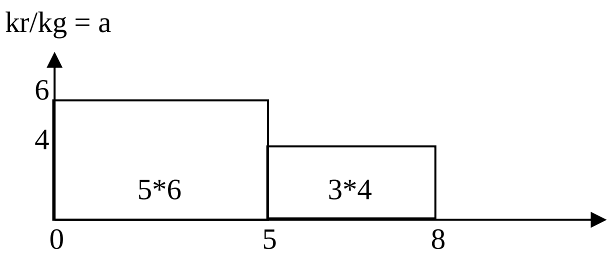
PerTal II, differential- og integralregning

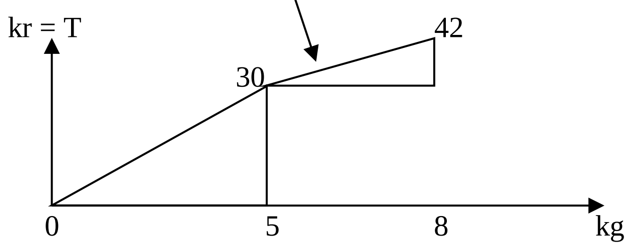
Pertal, stigning på total-kurven, findes ved differentiation Totaler, areal under pertals-kurven, findes ved integration	$a = 6\,\frac{kr}{kg} = \frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ T = 4 kr/kg*3kg + 6 kr/kg*5kg = ∑ kr/kg * kg = ∫a*dx

Eksempel. Ved et indkøb er der rabat: De første 5 kg kan fås for 6kr/kg, og de næste 3 kg kan fås for 4 kr/kg.

T1 = 5kg á 6 kr/kg = 5*6 kr = 30 kr <u>T2 = 3kg á 4 kr/kg = 3*4 kr = 12 kr</u> T = 8kg á ? kr/kg = 42 kr , ?= $\frac{42kr}{8kg} = 5.25\,\frac{kr}{kg}$	T1 = 5kg á 3/5 = 5*3/5 kg = 3 kg *Forene brøker* <u>T2 = 3kg á 2/3 = 3*2/3 kg = 2 kg</u> T = 8kg á ? = 5 kg , ?= $\frac{5}{8}$ $\boxed{\text{dvs. } \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8}}$

Pertals-kurve hvoraf Totalen kan findes ved integration. **Total-kurve** hvoraf pertallet kan findes ved differentiation.

<table>
<tr><td>

y1(x) = when(x<0,0,when(x<5,6,when(x<8,4,0)))</td>
<td>Stigning = a = $\frac{42-30}{8-5} = \frac{12\ kr}{3\ kg} = 4\,\frac{kr}{kg} = \frac{T2-T1}{x2-x1} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$


y2(x) = when(x<0,0,when(x<5,6*x, when(x<8,30+4*(x-5),0)))</td></tr>
<tr><td>Del-totalerne er del-arealer under pertals kurven.
Samlet total er samlet areal under pertals kurven .</td>
<td>Del-totalerne er del-tilvækster på Totalkurven.
Per-tallet er stigningen (hældningen) på totalkurven.</td></tr>
<tr><td>Totalen kan forudsiges ved integralregning.
Totalen, arealet under kurven y = 6 fra 2 til t er
<table><tr><td>$\int_2^t 6\,dx = 6*(t-2)$</td><td>Test ved at differentiere
$\frac{d}{dt}(6*(t-2)) = 6$’ ☺</td></tr></table>
Vi bemærker at differentiere og integrere er modsatte regningsarter, der begge regner på regnestykker, hvor de andre regningsarter regner på tal.</td>
<td>Pertallet kan forudsiges ved differentialregning
Pertal, stigning, hældning på kurven y = 6*x + b er:
<table><tr><td>$\frac{d}{dt}(6*x+b)) = 6$</td><td>Vi tester ved at integrere:
∫(6 dx) = 6x’ ☺</td></tr></table>
Konstanten b kan ikke testes.
<table><tr><td>Differentiation kan overflyttes som integration
Integration kan overflyttes som differentiation</td><td>$a = \frac{dT}{dx}$
∫a dx = T</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Arealet under kurven y = 4x+3 fra 0 til x
’∫(4x+3,x)’ giver ’∫(4x+3)dx’ = 2x^2 + 3x
Test ved at differentiere
‚d(2x^2 + 3x, x)’ giver ‚$\frac{d}{dx}$(2x^2 + 3x) = 4x+3’</td>
<td>Pertal, stigning, hældning på kurven y = 6*x^2 + 5x + 7 er:
‚d(6*x^2+5x+7,x)’ giver ‚$\frac{d}{dx}$(6*x^2+5x+7))=12x+5’
Vi tester ved at integrere:
’∫(12x+5,x)’ giver ∫(12x+5) dx = 6*x^2 + 5x ’ ☺
Konstanten 7 kan ikke testes.</td></tr>
</table>

Rabatordning kan aftage jævnt i stedet for stykkevis og dermed blive en polynom-kurve i stedet for en trappekurve.
Forudsigelser af arealer og stigninger kan testes grafisk, se afsnit om polynom-kurver:

1. grads polynomium fastlægger højde	y = 5
2. grads polynomium fastlægger højde + stigning	y = 5 + 2*x
3. grads polynomium højde + stigning + krumning	y = 5 + 2*x + 0.3*x^2
4. grads polynomium fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning	y = 5 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3

Krumme polynom-kurver med højere grad end 1 har en række interessante punkter:

Vendepunkter, enten top-punkt (maximum) eller bund-punkt (minimum).

Skæringspunkter med x-akse (nulpunkter), med y-akse (start-punkt), og med andre kurver.

Skæringspunkter med vandrette linier (ligningsløsning), og med lodrette linier (værdier).

Krumningsskift, hvor krumningen skifter fortegn.

Tangent-punkt. En tangent er en ret linie, der er praktisk taget sammenfaldende med kurven omkring røringspunktet. En tangent viser hvordan kurven vil se ud hvis stigningen i punktet forbliver uændret.

Hvis kurven er en pertals-kurve aflæses totalen som arealet under kurven, dvs. ved integration
Hvis kurven er en total-kurve, aflæses pertallet som stigningen på kurven, dvs. ved differentiation.
Krumningen fås ved at differentiere to gange. Ved positiv krumning krummes opad, ved negativ nedad.