Hvad er matematik - og hvorfor skal vi lære det?

Allan Tarp, april 2016

”Hvad er matematik, og hvorfor skal vi lære det?” er de to spørgsmål, du har bedt mig besvare, min kære Niece.

0. Indhold. På græsk betyder matematik ’mestring’. Den græske filosof Pythagoras brugte ordet som en fællesbetegnelse for deres fire mestrings-områder: Stjerner, musik, former og tal. Senere brød stjerner og musik ud, så i dag omfatter matematik kun læren om former, på græsk geometri, jord-måling; og læren om tal, på arabisk algebra, genforening. Efter opfindelsen af koordinatsystemet til at koordinere de to, er algebra blevet den vigtigste del. Skriver vi en total på 3 hundrede 4 ti fem helt ud, T = 345 = 3*10^2 + 4*10 + 5*1 kan vi se de fire regnearter, der forener tal: plus, gange, potens og integration af arealblokke. Kort sagt, ved hjælp af algebra kan vi skrive en total som et regnestykke, så algebra kan oversættes til regning; som vi da også kan se, når vi lukker matematikken op og møder trekantsregning, brøkregning, vektorregning, integralregning, differentialregning osv.

1. Pladsholdere. Et bogstav i et regnestykke står for et uspecificeret tal. Således bliver regnestykket T = 2+x til 5 hvis x = 3, og til 6 hvis x = 4. En formel er et regnestykke med 2 eller flere bogstaver, f.eks. T = a+b, T = a*b, T = a+b*c osv. En uspecificeret formel betegnes med f. Med to variable kaldes en formel en funktion, T = f(x) = en uspecificeret formel, som indeholder x som variabelt tal. Uspecificerede tal, der ikke varierer, betegnes med de første bogstaver i alfabetet.

Den uspecificerede talformel **T = a*b^2 + c*b + d** indeholder grundformler, som har forskellige navne:

- T = c + x; sumformel
- T = c*x; produktformel, proportionalitet, linearitet
- T = c*x+d; lineær formel, affinitet, plusvækst, vækst med konstant væksttal, polynomium af grad 1
- T = a*x^2 + c*x + d; parabel-formel, accelereret vækst, vækst med konstant voksende væksttal, polynomium af grad 2
- T = a*b^x; eksponentiel formel, gangevækst, vækst med konstant vækstprocent
- T = a*x^b; potens formel, gangegangevækst, vækst med konstant elasticitet

2. Formler forudsiger. Formlen T = a+b forudsiger resultatet uden at skulle udføre sammenlægning. For at sammenlægge 3 og 5, kan vi tælle videre fra 3 5 gange, eller forudsige resultatet med regnestykket 3+5. Tilsvarende med de andre regnestykker:

- Regnestykket 3*5 forudsiger resultatet af at sammenlægge 3 med sig selv 5 gange.
- Regnestykket 3^5 forudsiger resultatet af at sammengange 3 med sig selv 5 gange.

3. Tilbageregning kan også forudsiges. 3 + 5 = ? er et eksempel på en fremadregning. 3 + ? = 8 er et eksempel på en tilbageregning, som skrives 3 + x = 8 og kaldes en ligning, hvor vi spørger: Hvilket tal er det, der lagt til 3 giver 8? En ligning kan løses ved at gætte, eller ved at opfinde en omvendt regneart: x = 8 – 3; så 8-3 er per definition er det tal x, der lagt til 3 giver 8. Lommeregneren siger, at 8-3 er 5, som vi straks underkaster en prøve ved at udregne venstre og højre side hver for sig. Venstre side udregnes til 3 + x = 3 + 5 = 8. Højre side er allerede udregnet som 8. Da venstre side er lig med højre side, så stemmer prøven.

Tilsvarende med de øvrige tilbageregninger:

- 8/5 er det tal x, der ganget med 5 giver 8, og som derfor er løsning til ligningen 5*x = 8
- 5√8 er det tal x, der som faktor 5 gange giver 8, og dermed løsning til ligningen x^5 = 8
- log5(8) er det tal x, der angiver, hvor mange 5-faktorer der gir 8, altså løsning til ligningen 5^x = 8.

4. Definitioner og beviser. Den lineære formel T = c*x + d skrives ofte som y = a*x + b. For at forstå formlen skal vi kunne angive den geometriske og algebraiske betydning af de forskellige bogstaver.

x og y er de to variable. x kaldes den uafhængige og y den afhængige, da den jo kan forudsiges via formlen ud fra x. Algebraisk er b det tal, som y er lig med, når x er 0. Hvad a er, kræver en uspecificeret bogstav-undersøgelse, også kaldet et bevis: Hvis x vokser med 1 fra t til t+1, så vil y vokse fra y = a*x + b til y = a*(x+1)+b = a*x + a + b = a*x + b + a = (a*x+b) + a = y + a. Så a er det tal, som y vokser med, når x vokser med 1. En kurve eller graf er de geometriske punkter (x,y), som fremkommer, hvis vi indtegner en algebraisk formel y = f(x) i et koordinatsystem med x som det vandrette ud-tal og y som det lodrette højde-tal.

Indtegnes y = a*x + b fås en ret linje, hvor den geometriske betydning af b er start-højden ved skæringen med y-aksen, og hvor a er linjens hældning, dvs. det tal som højden stiger med, når x vokser med 1.

Med en anden undersøgelse kan vi bevise, at hvis en linie går gennem punkterne (x1,y1) og (x2,y2) så vil a = (y2-y1)/(x2-x1) = Δy/Δx, hvor vi benytter det græske bogstav delta, Δ, til at beskrive en tilvækst.

På samme måde kan vi via uspecificerede bogstav-undersøgelser fastlægge betydningen af bogstaverne b og a i formlerne for eksponentiel vækst y = b*a^x og potens vækst y = b*x^a, samt betydningen af a, b og c i konstant accelereret vækst y = a*x^2 + b*x + c.

5. Anvendelser. Formler forudsiger, men hvad?

Spørges ’3 kg á 5 kr per kg giver hvad?’ kan svaret forudsiges af formlen T = 3*5 = 15 kr.

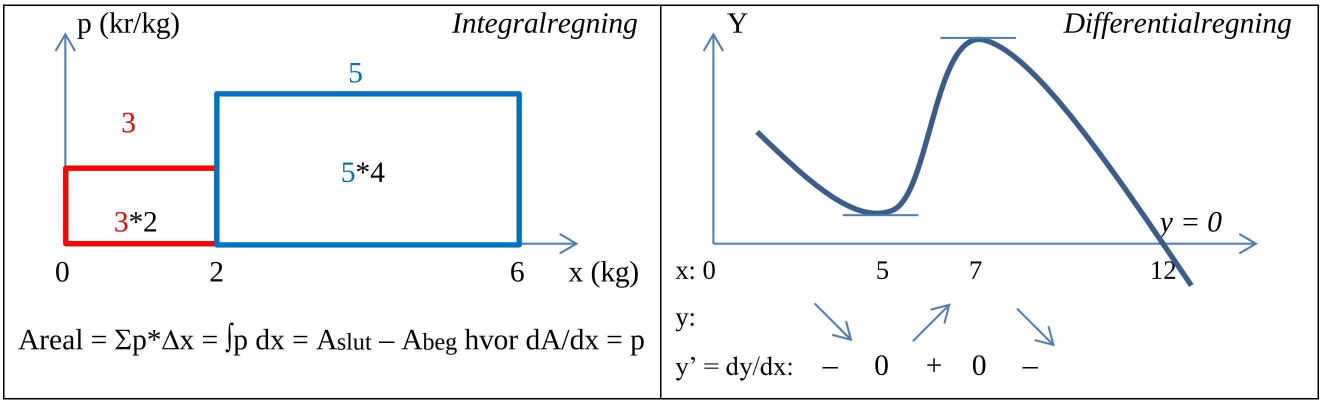
Spørges ’10 år á 5% per år giver hvad?’ kan svaret forudsiges af formlen T = 105%^10 – 100% = 62.9% = 50% i rente plus 12.9% i rentes rente.

Spørges ’Hvis en x-tilvækst på 1% giver en y tilvækst på 3%, hvad vil en x-tilvækst på 7% da give?’ kan svaret forudsiges af cirka-formlen T = 1.07^3 – 100% = 22.5% = 21% plus 1.5% elasticitet.

Spørges ’Hvor meget er y vokset med efter 10 gange, hvis tilvækstallet 18 falder med 2 hver gang x vokser med 1?’ kan svaret forudsiges af formlen T = - n^2 + 19*n for n = 10.

Spørges ’Giver 2kg á 3kr/kg plus 4 kg á 5 kr/kg i alt (2+4) kg á (3+5) kr/kg?’ er svaret ’ja og nej’.

Styk-tallene 2 og 4 kan adderes direkte, men per-tallene 4 og 5 skal først opganges til styktallene 3*2 og 5*4, før de kan adderes. Så geometrisk adderes per-tal ved at finde arealet under per-tals kurven. En stykkevis (eller lokalt) konstant kurve medfører addition af mange tal, der dog kan udregnes som en enkelt differens mellem start- og slut-tal, hvis areal-tallene p*Δx kan skrives som tilvækst-tal: p*Δx = ΔA, eller A = dp/dx. Derfor udvikler vi ’d/dx-regning’ også kaldet differentialregning, da en tilvækst findes som en differens. Geometrisk er dy/dx den lokale hældning på en lokalt lineær y-kurve, og kan så bruges algebraisk til at finde en kurves geometriske top- eller bundpunkter, hvor kurven og tangenten er vandret med hældning nul.



6. Mundtlig eksamen. En mundtlig eksamen er at sammenligne med et møde, hvor en rådgivende matematiker (kursisten) fremlægger sin løsning for en virksomhed repræsenteret ved en direktør og en bestyrelsesformand (lærer og censor). Under mødet fokuseres på de anvendte formler, indgående definitioner, undersøgelse af formlernes egenskaber (beviser), samt hvorfor netop denne formel og ikke andre er brugt til at finde et svar på virksomhedens spørgsmål.

7. Konklusion. Så kære Niece, matematik er et fremmedord for regning, kaldt algebra på arabisk. Vi skal lære algebra for at kunne forene og opdele totaler i konstante og variable styk-tal og per-tal:

Algebra **forener**/*opdeler i*	Variable	Konstante
Styk-tal (meter, sekund)	**T = a + b** *T – b = a*	**T = a*b** *T/b = a*
Per-tal (m/sek, m/100m = %)	**T = ∫ f dx** *dT/dx = f*	**T = a^b** *b√T = a* *loga(T) = b*

Kærlig hilsen, din onkel