

A1

Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke

1.1 Overlæs og underlæs	2
1.2 Overflytning mellem stakke, bogføring.....	2
1.2.1 Simpel overførsel, encifrede tal.....	2
1.2.2 Simpel overførsel, flercifrede tal.....	2
1.2.3 Tilfældig overførsel med reduceret terning	2
1.2.4 Tilfældig overførsel med almindelig terning I	3
1.2.5 Tilfældig overførsel med almindelig terning II	3
1.2.6 Tilfældig overførsel med almindelig terning III.....	3
1.2.7 Tilfældig overførsel med almindelig terning IV.....	4
1.2.8 Tilfældig overførsel med almindelig terning V.....	4
1.3 Overflytning uden bogføring.....	4
1.3.1 Plusstykker	4
1.3.2 Minusstykker	5
1.3.3 Gangestykker.....	5
1.3.4 Delestykker.....	5
1.4. Sammenstakning af abstrakte stakke	6
1.4.1 Sammenlægning, plus, addition	6
1.4.2 Fratrækning, minus, subtraktion.....	6
1.4.3 Gange, multiplikation.....	7
1.4.4 Deling, division	7
1.4.5 Gangning med flercifrede tal.....	8
1.4.6 Division med flercifrede tal, mente og/eller omvendt diagonal?	8
1.4.7 Gangning og division med mange-stakke (poly-nomier).....	9
1.4.8 Gangning af specielle tostakke (binomier).....	10
1.4.9 Binomial-tallene: $(a+b)^n = ?$	10
A1 OPGAVER	11

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik
KL	Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele
GE	Geometri: Jordmåling

MATHeCADEMY: Matematik nedefra

En stak kan ændre form gennem sammenstakning og gennem afstakning. Sammenstakning har forskellige navne som tillægning, plus, addition. Afstakning har forskellige navne som fratrækning, minus, subtraktion. Det der fratrækkes forsvinder ikke, men overføres til en anden stak. Det der er tillægning i den ene stak er altså fratrækning i den anden stak, og omvendt.

1.1 Overlæs og underlæs

Ved sammenstakning opstår der ofte overlæs, som så klares ved en omstakning, dvs. ved en afstakning, en ombundtning og en opstakning:

$$T = 68 + 29 = 6 \text{ ti } 8 + 2 \text{ ti } 9 = 8 \text{ ti } 17$$

$$T = 17 = (17-10)+10 = 7 + 10 = 1 \text{ ti } 7$$

$$T = 68 + 29 = 6 \text{ ti } 8 + 2 \text{ ti } 9 = 8 \text{ ti } 17 = 8 \text{ ti } 0 + 1 \text{ ti } 7 = 9 \text{ ti } 7 = 9$$

Overlæs!

Afstakning og ombundtning

Sammenstakning

Ved afstakning opstår der ofte underlæs, som så klares ved en omstakning, dvs. ved en afstakning, en ombundtning og en opstakning:

$$T = 68 - 29 = 6 \text{ ti } 8 - 2 \text{ ti } 9 = 4 \text{ ti } -1$$

$$T = 4 \text{ ti } = (4-1)+1 \text{ ti } = 3+1 \text{ ti } = 3 \text{ ti } 10$$

$$T = 68 - 29 = 6 \text{ ti } 8 - 2 \text{ ti } 9 = 4 \text{ ti } -1 = 3 \text{ ti } 10 - 1 = 3 \text{ ti } 9 = 39$$

Underlæs!

Afstakning og ombundtning

Sammenstakning

1.2 Overflytning mellem stakke, bogføring

Overflytning mellem stakke kan italesættes gennem bogføring, hvor hver stak har en bog med to sider, en TIL-side (debit) og en FRA-side (kredit). Overflytning kan f.eks. ske i forbindelse med spil, eller med køb&salg, hvor en vare går den anden vej. Varen kan f.eks. være en perle på et perlebræt. I begyndelsen kan 1 perle koste 1 kr. Senere kan prisen øges eller sænkes til 2kr/perle eller 1kr/2perler (½ kr/perle). De nedenstående opgaver er formuleret som spil, men kunne ligeså godt formuleres som køb&salg opgaver. Før de negative tal blev indført skrev man en lodret streg mellem to tal for at adskille til-tal fra fra-tal, ligesom vi stadig skriver en vandret streg mellem to tal for at adskille gange-tal fra dele-tal:

$$T = 2 \mid 3 = 2-3 = -1, \quad T = 3/4 = 3:4 = 0.75$$

1.2.1 Simpel overførsel, encifrede tal

To spillere A og B har hhv. 2 og 8 tændstikker. Overførselsregel: 1 fra B til A. Udfør og bogfør fire overførsler. Hos A sker der en tillægning og en optælling. Hos B sker der en fratrækning og en nedtælling.

Eksempel			A				B
Nr.	til	fra	TOTAL		til	fra	TOTAL
			2				8
1	1		3			1	7
2	1		4			1	6
3	1		5			1	5
4	1		6			1	4

1.2.2 Simpel overførsel, flercifrede tal

To spillere A og B har hhv. 8 og 13 tændstikker. Overførselsregel: 1 fra B til A. Udfør og bogfør fire overførsler. Husk at hver spiller nu har to bøger at føre, en for enere og en for tiere. Der er således nu tale om to typer overførsler, en ydre til modspilleren, og en indre til sig selv, hvor ener-kontoret A1 handler med tier-kontoret A2.

Eksempel	tiere		A2	enere		A1		tiere		B2	enere		B1
Nr.	til	fra	TOT	til	fra	TOT		til	fra	TOT	til	fra	TOT
						8				1			3
1				1		9						1	2
2	1		1	1	10	0						1	1
3			1	1		1						1	0
4			1	1		2			1		10	1	9

1.2.3 Tilfældig overførsel med reduceret terning

To spillere A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjeblikket” aflæst på en reduceret terning med dobbeltforekomst af 1, 2 og 3. (4->1, 5->2, 6->3, brug evt. klisterpapir eller korrekturlak). Udfør og bogfør overførslen. A begynder. Gentag øvelsen med en kugleramme.

To handlende A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Som betaling for et salg modtager kasteren ”øjetallet” aflæst på en reduceret terning med dobbeltforekomst af 1, 2 og 3. (4->1, 5->2, 6->3). Udfør og bogfør overførslen. Som vare kan evt. bruges kort fra et kortspil, der så kan optælles som en dobbeltkontrol.

Eksempel	tiere		A2	enere		A1		tiere		B2	enere		B1
	til	fra	TOT	til	fra	TOT		til	fra	TOT	til	fra	TOT
start			1			5				1			5
Øjetal 4			1	1		6				1		1	4
Øjetal 6			1		3	3				1	3		7
Øjetal 4			1	1		4				1		1	6
Øjetal 3			1		3	1				1	3		9
Øjetal 1			1	1		2				1		1	8
Øjetal 6		1		10	3	9		1		2	3	10	1

1.2.4 Tilfældig overførsel med almindelig terning I

To spillere A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjetallet” aflæst på en almindelig terning. Udfør og bogfør overførslen. A begynder. Gentag øvelsen med en kugleramme.

Eksempel	tiere		A2	enere		A1		tiere		B2	enere		B1
	til	fra	TOT	til	fra	TOT		til	fra	TOT	til	fra	TOT
start			1			5				1			5
Øjetal 1			1	1		6				1		1	4
Øjetal 5			1		5	1				1	5		9
Øjetal 2			1	2		3				1		2	7
Øjetal 6		1		10	6	7		1		2	6	10	3
Øjetal 5	1		1	5	10	2			1	1	10	5	8
Øjetal 4		1		10	4	8		1		2	4	10	2

1.2.5 Tilfældig overførsel med almindelig terning II

A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjetallet” aflæst på en almindelig terning. Udfør og bogfør overførslen. A begynder. Brug flercifrede tal. Gentag øvelsen med en kugleramme.

Eksempel			A				B	
	til	fra	TOT		til	fra	TOT	
start			15				15	
Øjetal 1	1		16			1	14	
Øjetal 5		5	11		5		19	
Øjetal 2	2		13			2	17	
Øjetal 6		6	7		6		23	
Øjetal 5	5		12			5	18	
Øjetal 4		4	8		4		22	

1.2.6 Tilfældig overførsel med almindelig terning III

A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjetallet” aflæst på en almindelig terning. Udfør og bogfør overførslen. A begynder. Brug negative tal. Gentag øvelsen med en kugleramme.

Eksempel	tiere	A2	enere	A1		tiere	B2	enere	B1
	dT	TOT	dT	TOT		dT	TOT	dT	TOT
start		1		5			1		5
Øjetal 1		1	+1	6			1	-1	4
Øjetal 5		1	-5	1			1	+5	9
Øjetal 2		1	+2	3			1	-2	7
Øjetal 6	-1		-6+10	7		+1	2	+6-10	3
Øjetal 5	+1	1	+5-10	2		-1	1	-5+10	8
Øjetal 4	-1		-4+10	8		+1	2	+4-10	2

1.2.7 Tilfældig overførsel med almindelig terning IV

To spillere A og B har hver 15 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjeblikket” aflæst på en almindelig terning. Udfør og bogfør overførslen. A begynder. Brug negative tal og flercifrede tal. Gentag øvelsen med en kugleramme.

<i>Eksempel</i>		A			B
	dT	TOT		dT	TOT
start		15			15
Øjeblik 1	+1	16		-1	14
Øjeblik 5	-5	11		+5	19
Øjeblik 2	+2	13		-2	17
Øjeblik 6	-6	7		+6	23
Øjeblik 5	+5	12		-5	18
Øjeblik 4	-4	8		+4	22

En overvejelse: Hvad er egentlig forskellen på opgaverne 3.2.4 – 3.2.7?

1.2.8 Tilfældig overførsel med almindelig terning V

To spillere A og B har hver 50 tændstikker. Overførselsregel: Kasteren modtager ”øjebliksummen” aflæst på to almindelige terninger. Udfør og bogfør overførslen. A begynder. (Opgaven kan varieres med øjeproduktet, evt. med den ene terning som en reduceret terning.)

Version 1. Brug tændstikker og 10bundter af tændstikker (samt evt. en blyant som bundtsymbol).

Version 2. Brug en kugleramme.

Version 3. Brug to rækker på en kugleramme, hvor første række symboliserer enere, og anden række symboliserer tiere.

Version 4. Tændstikkerne er bundtede i 5bundter, hvor en blyant er et symbol på et bundt, og en bog er symbol på et 25bundt.

Version 5. Brug tre rækker på en kugleramme, hvor første række symboliserer enere, og anden række symboliserer 5ere, og tredje række 25ere.

1.3 Overflytning uden bogføring

Oftest undlader vi det omhyggelige bogføringsarbejde og nøjes med at angive hvad der foregår på egen konto.

1.3.1 Plusstykker

To terninger med forskellig farve kastes. Den røde viser antal tiere, den hvide antal enere. Tallet lægges til den eksisterende total. Processen illustreres på en kugleramme.

<i>Eksempel</i>	hundreder	tiere	enere
TOTAL	1	2	5
+46		4	6
total		6	11
afstakning		6	$11 = 11 - 10 + 10 = 1 + 10$
ombundtning		6+1	1
TOTAL	1	7	1
+65		6	5
total	1	13	6
afstakning	1	$13 = 13 - 10 + 10 = 3 + 10$	6
ombundtning	1+1	3	6
TOTAL	2	3	6

1.3.2 Minusstykker

To terninger med forskellig farve kastes. Den røde viser antal tiere, den hvide antal enere. Tallet trækkes fra den eksisterende total. (Den røde terning kan være en reduceret terning). Processen vises på en kugleramme.

Eksempel	hundreder	tiere	enere
Total	1	4	3
-15		1	5
total	1	3	-2
afstakning	1	$3 = 3-1+1 = 2+1$	-2
ombundtning	1	2	$-2+10 = 8$
Total	1	2	8
-31		3	1
total	1	-1	7
afstakning	$1 = 1-1+1 = 0+1$	-1	7
ombundtning	0	$-1+10 = 9$	7
Total		9	7

1.3.3 Gangestykker

En total ganges op med øjetallet på en reduceret terning (med tallene 2,3 og 4). Processen illustreres på en tier-kugleramme og ved hjælp af regnepenge (Tændstik/blyant/bog, tre farver perler, m.m.)

Metode 1. Afstakning & ombundtning

	hundreder	tiere	enere
Total		4	3
*4		16	12
afstakning		$16 = 16-10+10 = 6 + 10$	$12 = 12-10+10 = 2+10$
ombundtning	0+1	6+1	2
Total	1	7	2
*3	3	21	6
afstakning	3	$21 = 21-20 + 20 = 1+ 20$	6
ombundtning	3+2	1	6
Total	5	1	6

Metode 2. Omstakning og ombundtning

	hundreder	tiere	enere
Total		4	3
*4		16	12
omstakning		$16 = 16/10*10 = 1*10+6$	$12 = 12/10*10 = 1*10+2$
ombundtning	0+1	6+1	2
Total	1	7	2
*3	3	21	6
omstakning	3	$21 = 21/10*10 = 2*10+1$	6
ombundtning	3+2	1	6
Total	5	1	6

1.3.4 Delestykker

En total deles med øjetallet på en reduceret terning (med tallene 2,3 og 4). En eventuel rest kastes væk. Processen illustreres på en tier-kugleramme og ved hjælp af regnepenge.

	hundreder	tiere	enere
Total	6	5	3
/4 (omstak&ombundt)	$6 = 6/4*4 = 1*4+2$	$2*10+5 = 25 = 25/4*4 = 6*4+1$	$1*10+3 = 13 = 13/4*4 = 3*4+1$
Total	1	6	3
/4 (omstak&ombundt)	$1 = 1/3*3 = 0*3+1$	$1*10+6 = 16 = 16/3*3 = 5*3+1$	$1*10+3 = 13 = 13/3*3 = 4*3+1$
Total		5	4
/4 (omstak&ombundt)		$5 = 5/2*2 = 2*2+1$	$1*10+4 = 14 = 14/2*2 = 7*2$
Total		2	7

1.4. Sammenstakning af abstrakte stakke

Vi forlader den konkrete repræsentation af mangfoldighed - konkrete stakke, og går over til at arbejde med abstrakte stakke og stiller spørgsmålet: Hvordan kan vi regne uden at have konkrete objekter at tælle på?

1.4.1 Sammenlægning, plus, addition

Verbalt: $T = 283 + 78 = 2$ titi 8 ti 3 + 7 ti 8 = 2 titi 15 ti 11 = 2 titi 16 ti 1 = 6 titi 6 ti 1 = 361

Vandret beregning (matematik)		Lodret beregning (regning)		
$T = 283 + 78$ $= 2*B^2 + 8*B + 3*1 + 7*B + 8*1$ $= 2*B^2 + (8*B + 7*B) + (3*1 + 8*1)$ $= 2*B^2 + (8 + 7)*B + (3 + 8)*1$ $= 2*B^2 + 15*B + 11*1$ $= 2*B^2 + (15-B+B)*B + (11-B+B)*1$ $= 2*B^2 + (5+B)*B + (1+B)*1$ $= 2*B^2 + 5*B + B*B + 1*1 + B*1$ $= 2*B^2 + 5*B + 1*B^2 + 1*1 + 1*B$ $= 2*B^2 + 1*B^2 + 5*B + 1*B + 1*1$ $= (2+1)*B^2 + (5+1)*B + 1*1$ $= 3*B^2 + 6*B + 1*1$ $= 361$	ved omstakning	B²	B	1
	omstakning	<i>Mente-metoden:</i>		
	<u>overlæs!</u>	1	1	
	afstakning	2	8	3
			7	8
	ombundtning	3	6	1
		<i>Overlæs-metoden:</i>		
	omstakning	2	8	3
			7	8
		2	15	11
$T = 283 + 78$ $= 2*B^2 + 8*B + 3*1 + 7*B + 8*1$ $= 2*B^2 + (8*B + 7*B) + (3*1 + 8*1)$ $= 2*B^2 + (8 + 7)*B + (3 + 8)*1$ $= 2*B^2 + 15*B + 11*1$ $= 2*B^2 + (15/B*B)*B + (11/B*B)*1$ $= 2*B^2 + (1*B+5)*B + (1*B+1)*1$ $= 2*B^2 + 1*B^2 + 5*B + 1*B + 1*1$ $= (2+1)*B^2 + (5+1)*B + 1*1$ $= 3*B^2 + 6*B + 1*1$ $= 361$	ved ombundtning	2+1	5+1	1
	omstakning	3	6	1
	<u>overlæs!</u>			
	ombundtning			
	omstakning			
		Bemærk at vi omstakker, når vi sætter uden for parentes eller ganger ind i parentes		

1.4.2 Fratrækning, minus, subtraktion

Verbalt: $T = 263 + 87 = 2$ titi 6 ti 3 - 8 ti 7 = 2 titi -2 ti -4 = 2 titi -3 ti 6 = 1 titi 7 ti 6

Vandret beregning		Lodret beregning		
T = 263 - 87	ved omstakning	B^2	B	1
= 2*B^2 + 6*B + 3*1 - (8*B + 7*1)		Låne-metoden:		
= 2*B^2 + 6*B + 3*1 - 8*B - 7*1		-1	+10	-1
= 2*B^2 + (6*B - 8*B) + (3*1 - 7*1)	omstakning	2	6	10
= 2*B^2 + (6 - 8)*B + (3 - 7)*1	<u>underlæs!</u>		8	3
= 2*B^2 - 2*B - 4*1	afstakning			7
= (2-1+1)*B^2 - 2*B - 4*1		1	7	6
= (1+1)*B^2 - 2*B - 4*1		Optællings-metoden:		
= 1*B^2 + 1*B^2 - 2*B - 4*1	ombundtning	2	6	3
= 1*B^2 + 10*B - 2*B - 4*1	omstakning		8	7
= 1*B^2 + (10 - 2)*B - 4*1		1	7	6
= 1*B^2 + 8*B - 4*1	afstakning	1	1	
= 1*B^2 + (8-1+1)*B - 4*1		Gælds-metoden:		
= 1*B^2 + (7+1)*B - 4*1	ombundtning	2	6	3
= 1*B^2 + 7*B + 1*B - 4*1			8	7
= 1*B^2 + 7*B + 1*10 - 4*1		2	-2	-4
= 1*B^2 + 7*B + 10*1 - 4*1		2-1	+10-2-1	+10-4
= 1*B^2 + 7*B + (10 - 4)*1		1	7	6
= 1*B^2 + 7*B + 6*1				
= 176				

1.4.3 Gange, multiplikation

Verbalt: $T = 8 \cdot 246 = 8 \cdot 2 \text{ titi } 4 \text{ ti } 6 = 16 \text{ titi } 32 \text{ ti } 48 = 16 \text{ titi } 36 \text{ ti } 8 = 19 \text{ titi } 6 \text{ ti } 8 = 1 \text{ tititi } 9 \text{ titi } 6 \text{ ti } 8 = 1968$

Vandret beregning		Lodret beregning	
$T = 8 \cdot 246$ $= 8 \cdot (2 \cdot B^2 + 4 \cdot B + 6 \cdot 1)$ $= 8 \cdot 2 \cdot B^2 + 8 \cdot 4 \cdot B + 8 \cdot 6 \cdot 1$ $= 16 \cdot B^2 + 32 \cdot B + 48 \cdot 1$ $= (16-10+10) \cdot B^2 + (32-30+30) \cdot B + (48-40+40) \cdot 1$ $= (6+B) \cdot B^2 + (2+3 \cdot B) \cdot B + (8+4 \cdot B) \cdot 1$ $= 6 \cdot B^2 + 1 \cdot B \cdot B^2 + 2 \cdot B + 3 \cdot B \cdot B + 8 \cdot 1 + 4 \cdot B \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 6 \cdot B^2 + 3 \cdot B^2 + 2 \cdot B + 4 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + (6+3) \cdot B^2 + (2+4) \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 9 \cdot B^2 + 6 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1968$	omstakning	B^3 B^2 B 1	1
		Mente-metoden:	
		8*	3
			4
	overlæs!		
	afstakning	8*	2
			4
		1	9
			6
			8
$T = 8 \cdot 246 \text{ ved ombundtning}$ $= 8 \cdot (2 \cdot B^2 + 4 \cdot B + 6 \cdot 1)$ $= 8 \cdot 2 \cdot B^2 + 8 \cdot 4 \cdot B + 8 \cdot 6 \cdot 1$ $= 16 \cdot B^2 + 32 \cdot B + 48 \cdot 1$ $= (16/B \cdot B) \cdot B^2 + (32/B \cdot B) \cdot B + (48/B \cdot B) \cdot 1$ $= (1 \cdot B + 6) \cdot B^2 + (3 \cdot B + 2) \cdot B + (4 \cdot B + 8) \cdot 1$ $= 1 \cdot B \cdot B^2 + 6 \cdot B^2 + 3 \cdot B \cdot B + 2 \cdot B + 4 \cdot B \cdot 1 + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 6 \cdot B^2 + 3 \cdot B^2 + 2 \cdot B + 4 \cdot 1 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + (6+3) \cdot B^2 + (2+4) \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 9 \cdot B^2 + 6 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1968$	ombundtning	Overlæs-metoden:	
		8*	2
			4
			6
			8
		16	32
		48	
		0+1	6+3
			2+4
		1	9
$T = 8 \cdot 246 \text{ ved ombundtning}$ $= 8 \cdot (2 \cdot B^2 + 4 \cdot B + 6 \cdot 1)$ $= 8 \cdot 2 \cdot B^2 + 8 \cdot 4 \cdot B + 8 \cdot 6 \cdot 1$ $= 16 \cdot B^2 + 32 \cdot B + 48 \cdot 1$ $= (16/B \cdot B) \cdot B^2 + (32/B \cdot B) \cdot B + (48/B \cdot B) \cdot 1$ $= (1 \cdot B + 6) \cdot B^2 + (3 \cdot B + 2) \cdot B + (4 \cdot B + 8) \cdot 1$ $= 1 \cdot B \cdot B^2 + 6 \cdot B^2 + 3 \cdot B \cdot B + 2 \cdot B + 4 \cdot B \cdot 1 + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 6 \cdot B^2 + 3 \cdot B^2 + 2 \cdot B + 4 \cdot 1 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + (6+3) \cdot B^2 + (2+4) \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1 \cdot B^3 + 9 \cdot B^2 + 6 \cdot B + 8 \cdot 1$ $= 1968$	ombundtning	Harmonika-metoden:	
		8*	243
			= ?
	overlæs!	8*	243
	ombundtning		= 1944
		200	1600
	omstakning	40	320
		3	24
	omstakning		

1.4.4 Deling, division

Verbalt: $T = 253/8 = 2 \text{ titi } 5 \text{ ti } 3/8 = 25 \text{ ti } 3/8 = 3 \text{ ti } + 1 \text{ ti } 3/8 = 3 \text{ ti } + 13/8 = 3 \text{ ti } + 1 + 5/8 = 31 \text{ } 5/8$

Vandret beregning, $253/8 = ?$		Lodret beregning	
$T = 253$ $= 2 \cdot B^2 + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 2 \cdot B \cdot B + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 20 \cdot B + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= (20 + 5) \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 25 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 25/8 \cdot 8 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= (3 \cdot 8 + 1) \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 3 \cdot 8 \cdot B + 1 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 3 \cdot B \cdot 8 + B \cdot 1 + 3 \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (10+3) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (13/8 \cdot 8) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (1 \cdot 8 + 5) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + 1 \cdot 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= (30+1) \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= 31 \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= 31 \cdot 8 + 5 \cdot 1/8 \cdot 8$ $= 31 \cdot 8 + 5/8 \cdot 8$ $= (31 + 5/8) \cdot 8$ $= 31 \text{ } 5/8 \cdot 8$	ombundtning	Rest-metoden:	
	omstakning	8	253
			31
			24
			13
	ombundtning		8
			5
	ombundtning	Omvendt harmonika-metode:	
		8*	? = 253
	omstakning	8*	= 253
	ombundtning	30	240
	ombundtning		13
$T = 253$ $= 2 \cdot B^2 + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 2 \cdot B \cdot B + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 20 \cdot B + 5 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= (20 + 5) \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 25 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 25/8 \cdot 8 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= (3 \cdot 8 + 1) \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 3 \cdot 8 \cdot B + 1 \cdot B + 3 \cdot 1$ $= 3 \cdot B \cdot 8 + B \cdot 1 + 3 \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (10+3) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (13/8 \cdot 8) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + (1 \cdot 8 + 5) \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + 1 \cdot 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ $= 30 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= (30+1) \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= 31 \cdot 8 + 5 \cdot 1$ $= 31 \cdot 8 + 5 \cdot 1/8 \cdot 8$ $= 31 \cdot 8 + 5/8 \cdot 8$ $= (31 + 5/8) \cdot 8$ $= 31 \text{ } 5/8 \cdot 8$	omstakning	8*	= 253
		30	240
			13
	ombundtning	1	8
			+5
	ombundtning	8*	31
			+5 = 253
	omstakning	30	240
			13
		1	8
			+5
$T = 253 = 253/8 \cdot 8 = 31 \text{ } 5/8 \cdot 8$ dvs. $253/8 = 31 \text{ } 5/8$			

1.4.5 Gangning med flercifrede tal

Verbalt: $T = 42 \cdot 68 = 4 \text{ ti } 2 \cdot 6 \text{ ti } 8 = 24 \text{ titi } (32+12) \text{ ti } 16 = 24 \text{ titi } 44 \text{ ti } 16 = 24 \text{ titi } 45 \text{ ti } 6 = 28 \text{ titi } 5 \text{ ti } 6 = 2 \text{ tititi } 8 \text{ titi } 5 \text{ ti } 6 = 2856$

Vandret beregning

$$\begin{aligned}
 T &= 42 \cdot 68 \\
 &= 42 \cdot (6 \cdot B + 8 \cdot 1) && \text{omstakning} \\
 &= 42 \cdot 6 \cdot B + 42 \cdot 8 \cdot 1 \\
 &= (4 \cdot B + 2 \cdot 1) \cdot 6 \cdot B + (4 \cdot B + 2 \cdot 1) \cdot 8 \cdot 1 \\
 &= (4 \cdot B \cdot 6 \cdot B + 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot B) + (4 \cdot B \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1) && \text{omstakning} \\
 &= 24 \cdot B^2 + 12 \cdot B + 32 \cdot B + 16 \cdot 1 && \text{overlæs!} \\
 &= 24 \cdot B^2 + (12 + 32) \cdot B + 16 \cdot 1 && \text{omstakning} \\
 &= 24 \cdot B^2 + 44 \cdot B + 16 \cdot 1 && \text{overlæs!} \\
 &= (24/B \cdot B) \cdot B^2 + (44/B \cdot B) \cdot B + (16/B \cdot B) \cdot 1 && \text{ombundtning} \\
 &= (2 \cdot B + 4) \cdot B^2 + (4 \cdot B + 4) \cdot B + (1 \cdot B + 6) \cdot 1 \\
 &= 2 \cdot B^3 + 4 \cdot B^2 + 4 \cdot B^2 + 4 \cdot B + 1 \cdot B + 6 \cdot 1 \\
 &= 2 \cdot B^3 + (4 + 4) \cdot B^2 + (4 + 1) \cdot B + 6 \cdot 1 \\
 &= 2 \cdot B^3 + 8 \cdot B^2 + 5 \cdot B + 6 \cdot 1 \\
 &= 2856
 \end{aligned}$$

FYIS: første+ydre+indre+sidste

$$\begin{aligned}
 T &= 42 \cdot 68 \\
 &= (40+2) \cdot (60+8) \\
 &= 2400 + 320 + 120 + 16 \\
 &= 2856
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= 54^2 \\
 &= (50+4) \cdot (50+4) \\
 &= 2500 + 200 + 200 + 16 \\
 &= 2916
 \end{aligned}$$

Lodret beregning

Stak-gangning $T = 42 \cdot 68$ 'ere

		60	8
2		120	16
40		2400	320

Middelalder-gangning, diagonal-gangning

	6	8		
2	1	2	1	6
4	2	4	3	2
	2	8	5	6

Mente-gangning

		6	8
2		1	3
40		2	7
	2	8	5
			6

Regneark

	60	8	
40	2400	320	2720
2	120	16	136
	2520	336	2856

1.4.6 Division med flercifrede tal, mente og/eller omvendt diagonal?

$T = 2856 = 42 \cdot ?$

?: $4 \cdot 5 = 20$, $4 \cdot 6 = 24$, $4 \cdot 7 = 28$

!: $4 \cdot 6 = 24$

$2 \cdot 6 = 12$

$1 + 4 + ? = 8$, $? = 3$

Vi vælger dog to, da vi kan forvente en mente pga. 8

?: $4 \cdot 7 = 20$, $4 \cdot 8 = 32$

Forsigtigt prøver vi med 7

?: $4 \cdot 7 = 28$

!: $4 \cdot 8 = 32$

Svar: $D = 2856 = 42 \cdot ? = 42 \cdot 68$

2				
4				
	2	8	5	6

	6			
2	1	2		
4	2	4		
	2	5	2	0

	6	8		
2	1	2	1	6
4	2	4	3	2
	2	8	5	6

	6	7		
2	1	2	2	1
4	2	4	2	8
	2	8	5	6

1.4.7 Gangning og division med mange-stakke (poly-nomier)

Vandret beregning

$$\begin{aligned}
 T &= (4x+3y)*(6x+7y) \\
 &= (4*x + 3*y) * (6*x + 7*y) \\
 &= (4*x + 3*y) * 6*x + (4*x + 3*y) * 7*y \\
 &= (4*x*6*x + 3*y*6*x) + (4*x*7*y + 3*y*7*y) \\
 &= 24*x^2 + 18*xy + 28*xy + 21*y^2 \\
 &= 24*x^2 + (18 + 28)*xy + 21*y^2 \\
 &= 24*x^2 + 46*xy + 21*y^2
 \end{aligned}$$

FYIS: første+ydre+indre+sidste

T	= (4x+3y)*(6x+7y)
	= 24x ² + 28xy + 18xy + 21y ²
	= 24*x ² + 46*xy + 21*y ²

Polynomiers division:

$$(4x + 3y) * ? = 24x^2 + 4xy + 21y^2$$

$$4x * ? = 24x^2 \quad ? = 6x$$

$$3y * 6x = 18xy$$

$$18xy + ? = 46xy \quad ? = 28xy$$

$$4x * ? = 28xy \quad ? = 7y$$

$$3y * 7y = 21y^2$$

Dvs. $24x^2 + 4xy + 21y^2 = (4x + 3y) * (6x + 7y)$

Lodret beregning

Metode 1 (stakning) $T = (4x+3y)*(6x+7y)$

	6x	7y
3y	18xy	21y ²
4x	24x ²	28xy

Metode 2: FYIS

	6x	+ 7y
+ 3y	18xy	21y ²
4x	24x ²	28xy
	24x ²	+46xy
		+21y ²

	?	?
+ 3y		
4x		
	24x ²	+46xy
		+21y ²

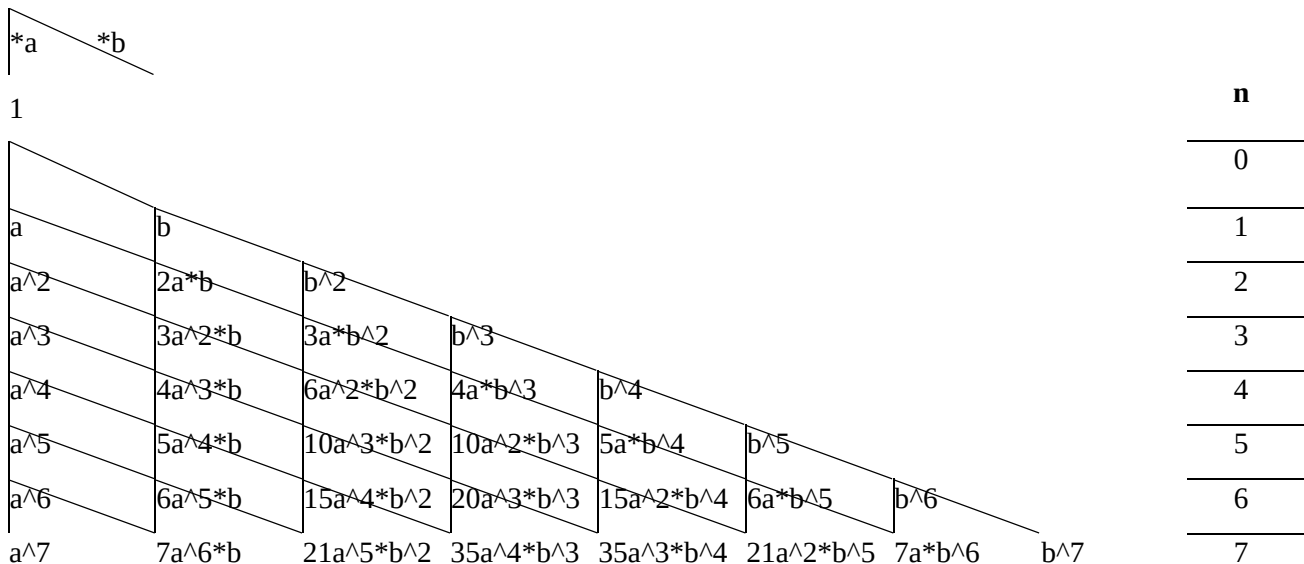
	6x	?
+ 3y	18xy	
4x	24x ²	
	24x ²	+46xy
		+21y ²

	6x	?
+ 3y	18xy	
4x	24x ²	28xy
	24x ²	+46xy
		+21y ²

	6x	+ 7y
+ 3y	18xy	21y ²
4x	24x ²	28xy
	24x ²	+46xy
		+21y ²

<u>Vandret beregning</u> <i>Kvadratet på en to-ledet sum:</i> $\begin{aligned} T &= (a+b)^2 \\ &= (a+b) \cdot (a+b) \\ &= (a \cdot a + b \cdot a) + (a \cdot b + b \cdot b) \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{aligned}$ <i>Kvadratet på en to-ledet differens:</i> $\begin{aligned} T &= (a-b)^2 \\ &= (a-b) \cdot (a-b) \\ &= (a-b) \cdot a - (a-b) \cdot b \\ &= a \cdot a - b \cdot a - (a \cdot b - b \cdot b) \\ &= a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{aligned}$ <i>To tals sum gange samme to tals differens:</i> $\begin{aligned} T &= (a+b) \cdot (a-b) \\ &= (a+b) \cdot a - (a+b) \cdot b \\ &= (a \cdot a + b \cdot a) - (a \cdot b + b \cdot b) \\ &= a^2 + a \cdot b - a \cdot b - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$	<u>Lodret beregning</u>
---	--

Pascall's trekant:



Der er forekomster af

A1 OPGAVER

I periode 3 er spørgsmålet: Hvordan sammenstakkes konkrete stakke? Svaret er at ammenstakning kan give overlæs som fjernes ved en ombundtning eller en afstakning med afstakningsligningen $T = (T-b)+b$.

Spørgsmål A11: $T = 27+16 = 2 \text{ ti } 7+1 \text{ ti } 6 = 3 \text{ ti } 13 = ?$

Svar1: $13=(13/10)*10=1*10+3=1\text{ti}3$; $T=3\text{ti}13=3\text{ti}0+1\text{ti}3=4\text{ti}3=43$

Svar2: $13=(13-10)+10=3+10 = 1\text{ti}3$; $T=3\text{ti}13=3\text{ti}0+1\text{ti}3=4\text{ti}3=43$

Spørgsmål A12: Hvordan sammenstakkes abstrakte stakke? Svar: Ved at bruge menter i lodrette talopstillinger, eller FYIS-ligningen $T = (a+b)*(c+d) = ac + (ad+bc) + bd$ i vandrette talopstillinger.

A11.1 Faglige opgaver

Udfør 3.2.4 med det engelske mønsystem, hvor 1 pund = 20 schilling, og 1 schilling = 12 pence, og hvor hver spiller begynder med 2pund, 3 shilling og 4 pence.

A11.2 Rutineopgaver

Gentag fagbilagets eksempler på plus, minus, gange og division, men brug denne gang med det gamle engelske møntsystem, hvor $B^2 = \text{pund}$, $B = \text{schilling}$ og $1 = \text{pence}$.

Eksempel	pund	schilling	pence
TOTAL	2	12	11
*3	6	36	33
Ombundtning		$36 = (36/20)*20 = 1*20+16$	$33 = (33/12)*12 = 2*12 + 9$
Omstakning	6+1	$16 + 2 = 18$	9
TOTAL	7	18	9
/2			
Ombundtning	$7 = (7/2)*2 = 3*2+1$	$1*20+18 = 38 = (38/2)*2 = 19*2$	$9 = (9/2)*2 = 4*2 + 1$
TOTAL	3	19	4

A11.3 Didaktisk opgave

Plus&minus med omstakning og ombundtning. To terninger kastes, en rød og en hvid, hvor den røde er reduceret til 1, 2 og 3. Den røde viser antal uger (7ere), den hvide antal dage (1ere). Tallene skiftevis tillægges og fratrækkes den eksisterende total. Der går 4 uger på en måned.

Der arbejdes med tre repræsentationsformer. Dels uføres spillet helt konkret med tændstikker, der er stakket som hhv. enkeltstyk, bundter og bundter af bundter. Dels en kugleramme med tre rækker, der repræsenterer hhv. dage, uger og måneder. Dels et skema, hvor regneprocessen nedskrives med talsymboler.

Eksempel	måneder	uger	dage
TOTAL	1	2	4
+36		3	6
total	1	5	10
omstakning	1	$5 = 5-4+4 = 1+4$	$10 = 10-7+7 = 3+7$
ombundtning	1+1	1+1	3
TOTAL	2	2	3
-25		2	5
total	2	0	-2
omstakning	$2 = 2-1 + 1 = 1 + 1$	0	-2
ombundtning&stakning	1	$0+4 = 4 = 4-1+1 = 3+1$	-2
ombundtning	1	3	$-2+7 = 5$
TOTAL	1	3	5
+23		2	3
	1	5	8
omstakning	1	$5 = 5-4 + 4 = 1+4$	$8 = 8-7+7 = 1+7$
ombundtning	1+1	1+1	1
TOTAL	2	2	1
-35		3	5
total	2	-1	-4
omstakning	$2 = 2-1 + 1 = 1+1$	-1	-4
ombundtning&stakning	1	$-1+4 = 3 = 3-1+1 = 2+1$	-4
ombundtning	1	2	$-4+7 = 3$
TOTAL	1	2	3

Løs opgaven både på bordet og på papiret, både ved tælling og ved regning.

Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

Sammenlign de forskellige måder at arbejde med plus og minus på: Dels matematik nedefra og dens ombundtnings&omstaknings-metode, dels de metoder, der er omtalt i "Matematik i læreruddannelsen 1, side 27-36 og 67-76.

A12.1 Faglige opgaver

Løs følgende opgaver inden for de to repræsentationsformer lodret og vandret beregning.

1. To terninger kastes, en rød og en hvid. Den røde viser antal tiere, og den hvide antal enere. Kastet gentages. De to tal kvadreres, og sammenganges med hinanden og med eget spejlbillede. (Tallet $2B+3$ har det (konjugerede) spejlbillede $2B-3$).

2. To terninger kastes, en rød og en hvid. Den røde viser antal x'er, og den hvide antal y'er. Kastet gentages. De to udtryk kvadreres, og sammenganges med hinanden og med eget spejlbillede..

3. Udregn følgende stykker ved vandret beregning og ved lodret beregning (på en tegning)

$$(20+3)*(10+2), \quad (20+3)*(10-2), \quad (20-3)*(10+2), \quad (20-3)*(10-2)$$

$$(a+b)*(c+d), \quad (a+b)*(c-d), \quad (a-b)*(c+d), \quad (a-b)*(c-d)$$

Begrund reglerne $++ = +$, $+* = -$, $-* = -$, $-- = +$ (tip: Hvorfor mon $9*9 = (10-1)*(10-1) = 81$?)

4. Hvad er $(a+b)^3$? Byg en figur, der viser resultatet.

5a. Pascal's trekant oplagt ved hjælp af bagsiden af et kortspil: Hvert kort får "to børn", en "pige" til venstre" og en "dreng" til højre. Optæl antal kort på de forskellige stakke og erstat stakken med et kort med stakkens antal.

5b. Pascal's trekant oplagt som kabale. Anbring randkort med bagsiden opad i fem rækker. Anbring åbne kort på de forskellige pladser 2, 3, 3, 4, 6, 4, 5, 10, 10, 5. Hvis kortet matcher, kan stakken inddrages til genbrug.

5c. Pascal's trekant som rentesregning. På konto $k(1,1)$ indsættes kapitalen 1. På terminsdagen overføres kapitalen på konto $k(1,1)$ til konto $k(2,1)$, og renten overføres til konto $k(2,2)$. Og så fremdeles: På terminsdagen overføres kapitalen på konto $k(n,r)$ til konto $k(n+1,r)$, og renten overføres til konto $k(n+1,r+1)$. Begynd med renten 100%. Hvad er den totale kapital efter 5 år? Same spørgsmål med renten 50%.

6. Lær de første 25 kvadrattal udenad.

7. Nedenstående algoritme udregner #1156. Hvad er #? Udregn #(5184).

a = 3	1156 900	$= (a*10 + b)^2$	$= 100*a^2 + 20*a*b + b^2$ $= 100*a^2$
b = 4	256 240		$20*a*b$
	16 OK		b^2 Svar: #(1156) = 34

A12.2 Rutineopgaver

Udfør 4.1, 4.2, 4.3 og 4.4 med uger, dage, timer.

A12.3 Didaktisk opgave

Udfør 4.1, 4.2, 4.3 og 4.4 med det engelske møntsystem.

Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).