T2

Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation

1.1 Vækstmål 2
1.2 Vækstligninger 2
1.3 Konstant vækst I 2
1.4 Konstant vækst II 3
1.5 Plusskala og gangeskala 3
1.6 Regneskemaer 4
1.7 Konstant vækst III, regressionslinier 5
1.8 Regning med vækstprocenter 5
1.9 Andre vækstformer 5
1.10 Lineær vækst med to variable 6
1.11 Konstant acceleration, potensvækst 7
1.12 Potensblanding, polynomium 7
2. Stakke i tid II, forudsigelig variation 8
2.1 Algebra, genforene 8
2.2 Forskel på lineær og eksponentiel vækst 10
2.3 Hvordan forenes variable pr.tal? 11
2.4 Stakregning 11
2.5 Kurvetegning 12
2.6 To variable 13
2.7 Vækstligninger 13
2.8 Projekt De 8 vækstfortællinger 14
T2 OPGAVER 15
Projekt Familefirmaet 20

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

En mangfoldighed kan være konstant (antal rum i en pung), eller variabel (antal kroner i en pung). Variationen kan være konstant eller variable. Vi begynder med at se på konstant variation.

1.1 Vækstmål

Variation, ændring eller vækst kan angiver på tre forskellige vækstmål:

- Væksttal, tilvækst = Sluttal – begyndelsestal $\Delta T = T2 - T1$
- Vækstfaktor, indeks = Sluttal/begyndelsestal $I = T2/T1$
- Vækstprocent, rente = Tilvækst/begyndelsestal $r = \Delta T/T1 = (T2 - T1)/T1 = T2/T1 – 1 = I - 1$

Niveau		enkelt tilvækst				samlet tilvækst		
T		**ΔT**	**I**	**R**		**ΔT**	**I**	**R**
200								
230		+ 30	*115 (%)	+ 15%		+ 30	*115 (%)	+ 15%
210		- 20	*91,3 (%)	- 8,70%		+ 10	*105 (%)	+ 5%
450		+240	*214,3 (%)	+ 114,30%		+ 250	*225 (%)	+ 125%

1.2 Vækstligninger

Vi kan regne både fra niveau-tal til vækst-tal, og fra vækst-tal til niveau-tal (at løse en vækstligning). En vækstligning fortæller hvad tilvæksten er lig med, hvad enten det er et tal eller et regnestykke. Uden en vækstligning kan vi ikke *forudsige* hvad tilvæksten vil blive. vi kan da ofte kunne "*bagud-sige*", hvad tilvæksten har været i gennemsnit. Denne statistik bruges så til at forudsige, hvad tilvæksten sandsynligvis vil blive (statistik og sandsynlighedsregning, vækstregning II). Variation/vækst kan således være både systematisk eller usystematisk.

1.3 Konstant vækst I

En stak penge kan vokse på 3 forskellige måder, ved at tilføje kroner (+vækst, lineær vækst), ved at tilføje procenter (*vækst, eksponentiel vækst) eller ved at tilføje både kroner og procenter (+&*vækst, opsparings-vækst).

PLUSvækst

Ko + A = Ko + a*n = K

+ A = + a*n

PLUS&GANGEvækst

K = a*R/r

+ a kr	**+ r %**
+ …	**+ …**
+ a kr	**+ r %**
+ a kr	**+ r %**
Ko	

GANGEvækst

K = Ko*(1+r)^n = Ko*(1+R)

+ R %

1+R = (1+r)^n

Lineær vækst, vækst med konstant væksttal, +5kr+5kr vækst, plus-vækst ($\Delta K = 5$)

Kslut = Kbeg +a+a+a n gange: K = Ko + a*n = Ko + A, hvor A = a*n er den samlede tilvækst

Eksponentiel vækst, vækst med konstant vækstprocent, +5%+5% vækst, gange-vækst ($\Delta K/K = 5\%$)

Vi kan ikke lægge procent til kroner, og omskriver derfor Ko til 100%. K1 bliver da 100%+5% = 105% af Ko, dvs. K1 = Ko*105% = Ko*1,05 = Ko*(1+r)

Kslut = Kbeg +r%+r%+r% n gange: K = Ko*(1+r)*(1+r)*(1+r) = Ko*(1+r)^n = Ko*(1+R)

R er den samlede rente, som er summen af simpel rente SR og rentes rente RR: R = SR+RR. Enkeltrente r og samlet rente R har sammenhængen (1+r)^n = 1+R

Eksempel. 7 år á 5kr = 7*5 kr = 35 kr.
7 år á 5% = 7*5% + RR = 35% + 5% = SR + RR = R = 40% (da 1+R=107%^5 = 140%)

Dobbeltbeskatning: Bilpris + 200% afgiftsskat + 25% momsskat = Bilpris*(1+2)*(1+0,25) = Bilpris*3,75 = Bilpris*(1+2,75) = Bilpris + 275% skat. Og 275% skat = 225% skat af bil + 50% skat af skat

Fordobling: Hvis R=100% er vækstfaktoren 2. Fordoblingstiden N findes: (1+r)^N=2, N=log2/log(1+r)≈ 70/r

Opsparingsvækst, vækst med konstant væksttal&procent, +(5%&7kr)+(5%&7kr) vækst, plus&gange-vækst.

Ved opsparing vokser kapitalen K af mit indskud a kr. og af bankens rente r%. Opsparingen kan foregå ved benyttelse af to konti I og II. På konto I indsættes a/r kroner, hvis rentebeløb a/r*r = a hver gang overføres til konto II, som da vil indeholde dem samlede rente, dvs. a/r*R. Samtidig indeholder II den opsparing K, som fremkommer ved tilførsel af et konstant kronebeløb a og en konstant rente r:

K = a/r*R = a/r*((1+r)^n-1). Der betales kun skat af renterne idet indskuddene allerede er beskattet.

På konto III står en gæld, som er vokset eksponentielt ved at få tilført renter: K = G*(1+R). Gælden på konto III kan da udlignes af opsparingen på konto II, dvs. gennem afbetaling: G*(1+R) = a/r*R:

G = a/r*R/(1+R) = a/r*(1-(1+r)^-n).

1.4 Konstant vækst II

Opfattes de konstante vækstformer lineær og eksponentiel vækst som +vækst og *vækst, er de i familie med opsparingsvækst +&vækst.

Opfattes de konstante vækstformer lineær og eksponentiel vækst som ++vækst og +*vækst, er de i familie med potensvækst, **vækst.

Lineær vækst (++ vækst)	*Eksponentiel vækst (+* vækst)*	*Potens vækst (** vækst)*
x: +1 stk., y: +a stk., ex. indkøb	x: +1 stk., y: +a %, ex. renter	x: +1 %, y: +a %, ex. dimensionering
b+x gange á 3 kr/gang er totalt T	b + x gange á 3 %/gang er totalt T	Dimension T = 3*Dimension x b er omsætningsfaktor mellem enhed
b + x*a = T	b * (1+3%)^x = T	b * x^3 = T
Δy/Δx = a, y = b+a*x	Δy/Δx = a*y, y = b*a^x	Δy/y = a*Δx/x, y = b*x^a
Δy/Δx: hældning, stigning ≈dy/dx=y’	(Δy/Δx)/y: rente, vækstprocent	(Δy/y)/(Δx/x): elasticitet

1.5 Plusskala og gangeskala

På en plus-skala (ækvidistant skala) plusses samme tal på for hvert skridt: 0,10,20,30,40

På en gange-skala (logaritmisk skala) ganges samme tal på for hvert skridt: 1,2,4,8,16,32

Lineær vækst giver en ret linie som kurve (graf) på ++ papir (millimeterpapir).

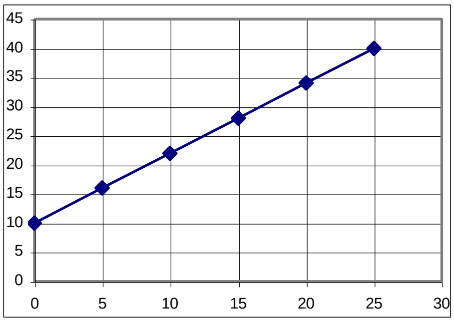
Eksponentiel vækst giver en ret linie som kurve (graf) på +* papir (enkelt logaritmisk papir).

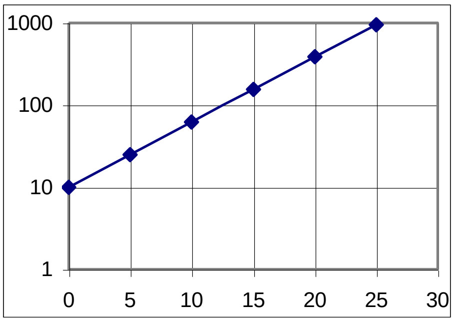
Potens vækst giver en ret linie som kurve (graf) på ** papir (dobbelt logaritmisk papir).

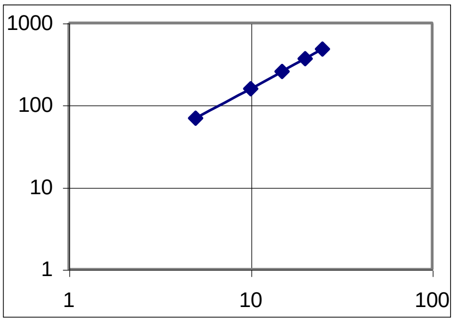
b	10
a	1,2
x	**y = 10 + 1,2*x**
0	10
5	16
10	22
15	28
20	34
25	40

b	10
a	1,2
x	**y = 10 * 1,2^x**
0	10
5	25
10	62
15	154
20	383
25	954

b	10
a	1,2
x	**y = 10 * x^ 1,2**
0	0
5	69
10	158
15	258
20	364
25	476







Dobbeltklik og rediger

1.6 Regneskemaer

De konstante vækstformer giver alle anledning til 4 regneskemaer:

	Lineær vækst
K = ?	K = Ko+a*n
Ko = 40 a = 3 n = 5	K = 40+3*5 **K = 55**

	Eksponentiel vækst
K = ?	K = Ko*a^n
Ko= 40 a= 1.03 n = 5	K = 40*1.03^5 **K = 46.371**

	Potens vækst
K = ?	K = Ko*n^a
Ko= 40 a= 3 n = 5	K = 40*5^3 **K = 5000**

Ko = ?	K = Ko+a*n
K = 70 a = 3 n = 5	K = Ko+(a*n) K - (a*n) = Ko 70 – (3*5) = Ko **55 = Ko**
Kontrol:	*70 =? 55+3*5* *70 =! 70*

Ko = ?	K = Ko*a^n
K = 70 a = 1.03 n = 5	K = Ko*(a^n) K/(a^n) = Ko 70/(1.03^5) = Ko **60.383 = Ko**
Kontrol:	*70 =? 60.383*1.03^5* *70 =! 70*

Ko = ?	K = Ko*n^a
K = 70 a = 3 n = 5	K = Ko*(n^a) K/(n^a) = Ko 70/(5^3) = Ko **0.56 = Ko**
Kontrol:	*70 =? 0.56*5^3* *70 =! 70*

a = ?	K = Ko+a*n
Ko = 40 K = 70 n = 5	K = Ko+(a*n) K-Ko = a*n (K-Ko)/n = a (70-40)/5 = a **6 = a**
Kontrol:	*70 =? 40+6*5* *70 =! 70*

a = ?	K = Ko*a^n
Ko = 40 K = 70 n = 5	K = Ko*(a^n) K/Ko = a^n n√(K/Ko) = a 5√(70/40) = a **1.118 = a**
Kontrol:	*70 =? 40*1.118^5* *70 =! 69.866*

a = ?	K = Ko*n^a
Ko = 40 K = 70 n = 5	K = Ko*(n^a) K/Ko = n^a log(K/Ko)/log n = a log(70/40)/log 5 = a **0.348 = a**
Kontrol:	*70 =? 40*5^0.348* *70 =! 70.032*

n = ?	K = Ko+a*n
Ko = 40 a = 3 K = 70	K = Ko+(a*n) K-Ko = a*n (K-Ko)/a = n (70-40)/3 = n **10 = n**
Kontrol:	*70 =? 40+3*10* *70 =! 70*

n = ?	K = Ko*a^n
Ko = 40 a = 1.03 K = 70	K = Ko*(a^n) K/Ko = a^n log(K/Ko)/log a = n log(70/40)/log 1.03 = n **18.9 = n**
Kontrol:	*70 =? 40*1.03^18.9* *70 =! 69.933*

n = ?	K = Ko*n^a
Ko = 40 a = 3 K = 70	K = Ko*(n^a) K/Ko = n^a a√(K/Ko) = n 3√(70/40) = n **1.205 = a**
Kontrol:	*70 =? 40*1.205^3* *70 =! 69.988*

Opsparingsvækst giver anledning til 3 regneskemaer:

K = ?	K = a/r*R
a = 100 n = 12 r = 0.05 1+R=1.05^12 R = 0.796	K=100/0.05*0.796 **K = 1592**

a = ?	K = a/r*R
K = 1000 n = 12 r = 0.05 1+R=1.05^12 R = 0.796	K/R*r = a 1000/0.796*0.05=a **62.81 = a**
Kontrol:	*1000= 62.814/0.05*0.796* *1000 =! 999.999*

n = ?	K = a/r*R
K=1000 a = 100 r = 0.05	K*r/a = R =(1+r)^n-1 1 + K*r/a = (1+r)^n log(1+K*r/a)/log(1+r)=n **8.3 = n** R = 1.05^8.3-1 = 0.499
Kontrol:	*1000 =? 100/0.05*0.499* *1000 =! 998*

Vi kan ikke opstille et regneskema for r, fordi den ubekendte r forekommer to steder og derfor giver anledning til en ligning af grad n. Kun ligninger af grad 1, 2 (og 3) kan løses ved formler.

8 gange á 100kr. & ?% er totalt 1000kr.: K = a/r*R: 1000 = 100/r*((1+r)^8-1). Renten kan gættes i Excel, evt. ved at bruge målsøgning:

Uden målsøgning

a	100
n	8
r-gæt	4,2%
K-beregnet	928,01
K-mål	1000

Med målsøgning

a	100
n	8
r-målsøgt	6,3%
K-beregnet	1000,00
K-mål	1000

dobbeltklik og rediger

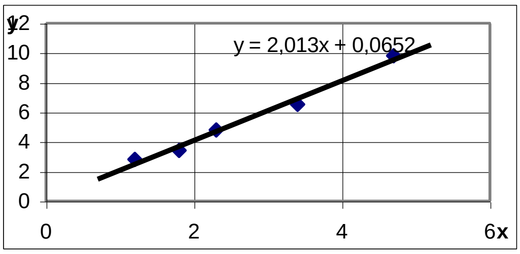
1.7 Konstant vækst III, regressionslinier

En tabel med to punkter fastlæger en ret linie, og dermed dens ligning.

En tabel med flere end 2 punkter kan føre til den bedste rette linie ved en *regressions*-metode, som minimere summen af kvadraterne på afstandene mellem punkt-y og linie-y.

Indtast en tabel i Excel. Højreklik på dens kurve, og der vælges 'tilføj tendenslinie'. Vælg en af de seks tendenslinier og vælg 'angiv ligning'.

x	y
1,2	2,8
1,8	3,4
2,3	4,8
3,4	6,5
4,7	9,8



Dobbeltklik og rediger

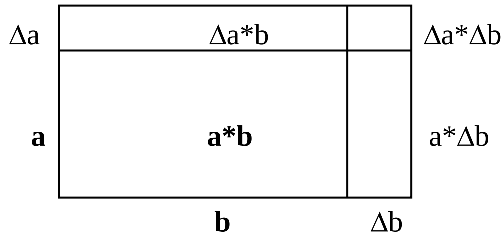
1.8 Regning med vækstprocenter

Vi indtegner tilvæksterne på en T = a*b-stak

ΔT = Δa*b + a*Δb + Δa*Δb, eller i procent:

ΔT/T = Δa/a + Δb/b + Δa/a*Δb/b
≈ Δa/a + Δb/b,
eller som forhold med a = T/b

Δa/a = ΔT/T - Δb/b



Eksempel 1. Da produktion = (produktion/indbygger)*indbygger gælder:

Hvis produktion/indbygger stiger med 2% og indbyggertallet stiger med 3%, vil produktionen stige med ca. 2%+3%= 5%.

Hvis produktionen stiger med 2% og indbyggertallet stiger med 3%, vil produktion/indbygger stige med ca. 2%-3%= -1%.

Eksempel 2. Hvis T = x^5 = x*x*x*x*x gælder tilnærmelsesvis:

ΔT/T ≈ Δx/x + Δx/x + Δx/x + Δx/x + Δx/x = 5*Δx/x, dvs.
ΔT ≈ 5*Δx/x*T = 5*Δx/x*x^5 = 5*Δx/x^4, eller
ΔT/Δx ≈ 5*x^4, eller for meget små tilvækster (ΔT -> dT):

Hvis T = x^5, så er dT/dx = 5*x^4, eller
Hvis T = x^5, så er T' = (x^5)' = 5*x^4, hvilket kaldes potensreglen i differentialregning:
Hvis T = x^n, så er T' = (x^n)' = n*x^(n-1).

Eksempler på tilnærmelsesformler (korrekte tal i parentes):

5.1^2 = (5+0.1)^2 ≈ 5^2 + 2*5*0.1 = 26 (26.01), 5.1^3 = (5+0.1)^3 ≈ 5^3 + 3*5^2*0.1 = 132.5 (132.65)

1/5.1 = (5+0.1)^(-1) = 5^-1 –1*5^-2*0.1 = 0.196 (0.196), 1/4.9 = (5-0.1)^(-1) = 5^-1 –1*5^-2*(-0.1) = 0.204 (0.0.204)

Lette huskeregler: (1±t)^2 ≈ 1±2*t, (1±t)^3 ≈ 1±3*t, 1/(1+t) ≈ 1-t, 1/(1-t+t) ≈ 1+t:

1.07^2 ≈ 1+0.14 = 1.14, 0.96^3 ≈1-0.12 = 0.88, 1/1.07 ≈1-0.07 = 0.93, 1/0.96 ≈ 1+0.04 = 1.04

1.9 Andre vækstformer

Andengradsvækst, vækst med konstant voksende vækstal (ΔK = a*n+b, K=Ko + (b-½a) + ½a*n^2)

n	K	ΔK = a*n+b	ΔΔK
0	Ko	b	a
1	Ko+b	a+b	a
2	Ko+2b+a	2a+b	a
3	Ko+3b+3a	3a+b	a
4	Ko+4b+6a	4a+b	a
5	Ko+5b+10a	5a+b	
n	Ko+nb+½n(n-1)a		

En *differensrække* har konstant differens a mellem to naboled, som derfor udfører plusvækst: 0a, 1a, 2a, 3a osv. En differensrække har derfor en sum S, som er antal led (n+1) gange det midterste led (0+n*a)/2:

S = (n+1)*n/2 *a.

En *kvotientrække* har konstant kvotient a mellem to følgende led, som derfor udfører gangevækst: 1, a, a^2, a^3 osv. En kvotientrækkes sum S findes ved at gange den med a og fratrække S

	1*S =	1+a+a^2 + … +a^n
	a*S =	a+a^2 + … +a^(n+1)
a*S-1*S =	S*(a-1) =	(a^(n+1) – 1)
	S =	**(a^(n+1) – 1)/(a-1)**

Eksempel på ikke-konstant vækst: Svingende vækst, vækst med konstant svingende væksttal (ΔK = 0, ±1, ±2). Et andet eksempel på svingende vækst er sinus og cosinus.

n	K	ΔK = 0, ±1, ±2	ΔΔK
0	Ko	0	+1
1	Ko	1	+1
2	Ko+1	2	-1
3	Ko+3	1	-1
4	Ko+4	0	-1
5	Ko+4	-1	-1
6	Ko+3	-2	+1
7	Ko+1	-1	+1
8	Ko	0	

Eksempel på ikke-konstant vækst: Uforudsigelig vækst, vækst med stokastisk variation (ΔK= 2*(terningeøjetal -3.5)). Stokastisk tilfældig vækst vender vi tilbage til under statistik og sandsynlighedsregning.

n	K	ΔK = 2*(terningeøjetal-3.5)	
0	12	-3	
1	9	+5	
2	14	-1	
3	13	-5	
4	8	+3	
5	11	-1	
6	10	+1	
7	11		

1.10 Lineær vækst med to variable

Hvis Totalprisen T afhænger af to varemængder opstår lineær vækst med to variable, som kan indtegnes i et tredimensionalt koordinatsystem.

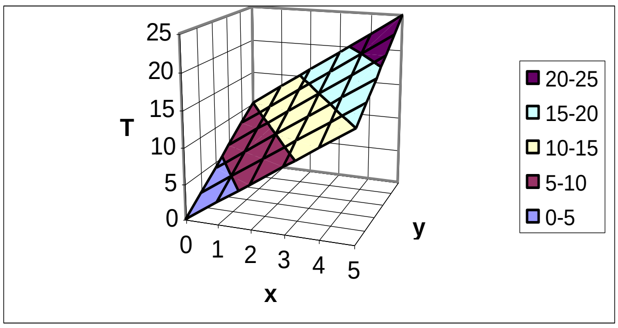
Eksempel: x kg. á 2 kr/kg + y kg á 3 kr/kg et totalt T = 2*x + 3*y

T = c*x+d*y

c	2
d	3

T = 2*x+3*y *med niveaulinier*

x \ y	0	1	2	3	4	5
0	0	3	6	9	12	15
1	2	5	8	11	14	17
2	4	7	10	13	16	19
3	6	9	12	15	18	21
4	8	11	14	17	20	23
5	10	13	16	19	22	25



dobbeltklik og rediger

1.11 Konstant acceleration, potensvækst

Hvis en størrelses tilvækst er konstant er størrelsen konstant voksende.

Hvis en størrelses tilvækst er konstant voksende er størrelsen konstant accelereret og kvadratisk voksende.

Hvis en størrelses tilvækst er konstant accelereret er størrelsen kubisk voksende.

Konstant, kvadratisk, kubisk vækst kalde under et potens-vækst.

Konstant acceleration findes f.eks. hvor ting falder mod jorden.

Sum	x^3	Tilvækster												
441	T	1	8	27	64	125	216							
215	ΔT		7	19	37	61	91							
84	ΔΔT			12	18	24	30							
18	ΔΔΔT				6	6	6							
0	ΔΔΔΔT					0	0							

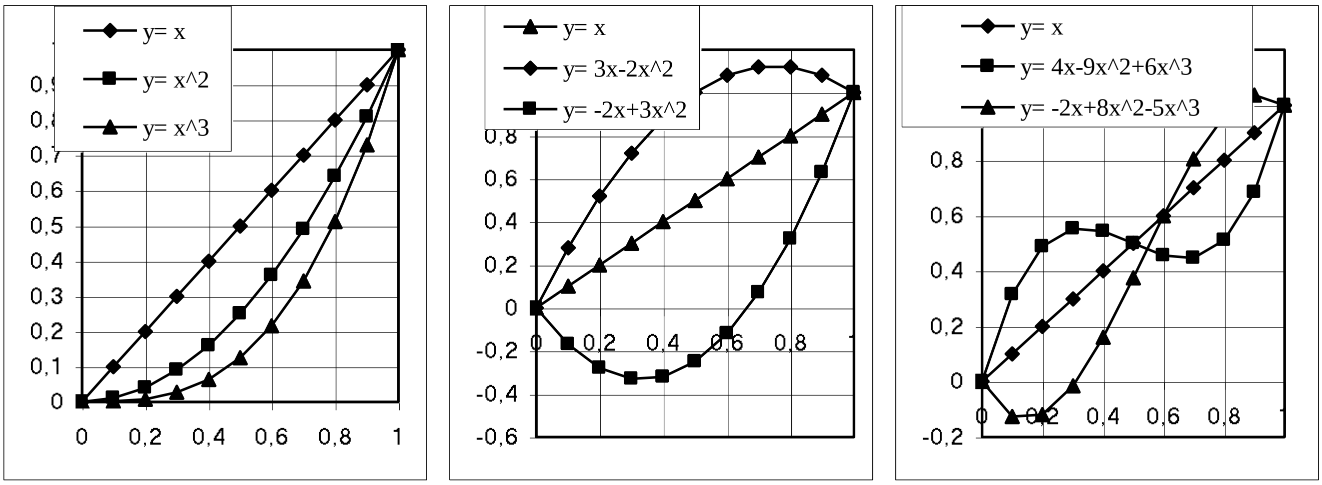
Dobbeltklik og rediger

1.12 Potensblanding, polynomium

En blanding af potenser kaldes et polynomium. Den højest forekommende potens bestemmer polynomiets grad.

Grad		Nulpunkter
0	Po = a (da x^0 = 1)	-
1	P1 = a + b*x	-b/a
2	P2 = a + b*x + c*x^2	(-b ± √(b^2-4*a*c))/(2*c)
3	P3 = a + b*x + c*x^2 + d*x^3	Formel findes
4	P4 = a + b*x + c*x^2 + d*x^3 + e*x^4	Formel findes
5, 6, …		Formel findes ikke

Polynomier kan bruges til at bøje kurever så de passer til bestemte punkter:



Tre måder at vokse fra 0 til 1 x giver *hældning, stigning* x^2: Senere *krumning* x^3: Endnu senere *(mod)krumning*	For stor positiv hældning (3 x) korrigeresmed senere negativ krumning (-2 x^2)	For stor negativ krumning (-9 x^2) korrigeresmed senere positiv modkrumning (6 x^3)
y=x^n : Jo større n, jo større forsinkelse på krumningen	For stor negativ hældning (-2 x) korrigeresmed senere positiv krumning (3 x^2)	For stor positiv krumning (8 x^2) korrigeresmed senere negativ modkrumning (-5 x^3)

Dobbeltklik og rediger

2. Stakke i tid II, forudsigelig variation

2.1 Algebra, genforene

På arabisk betyder ordet algebra 'genforene'. Der er 4 måder at forene tal på fordi der er 2*2 forskellige typer tal i verden: Konstante og variable styktal og pr.tal.

<u>Plus</u> forener variable styktal til en total: 2m+3m = ?m <u>Minus</u> opdeler en total i variable styktal: 2m+?m =7m	<u>Gange</u> forener konstante styktal til en total: 2m 3gange = ?m <u>Division</u> opdeler en total i konstante styktal: 2m ?gange = 6m
<u>Integration</u> forener variable pr.tal: 3m á 4m/s voksende lineært til 5m/s = ?m <u>Differentiation</u> opdeler en total i variable pr.tal: 3m á 4m/s voksende ? til 5m/s = 20m	<u>Potens</u> forener konstante pr.tal til en total: 2% 3gange = ?% <u>Rod</u> opdeler en total i konstante pr.tal: ?% 3 gange = 9% <u>Logaritme</u> opdeler en total i konstante pr.tal: 2% ?gange = 9%

Eller, opstillet i et skema:

TOTALEN opsamler/opdeles i	**variable**	**konstante**
styk-tal kr, m, s, ...	$\mathbf{T = a+n}$ $T-n = a$	$\mathbf{T = a*n}$ $\frac{T}{n} = a$
pr.tal kr/kg, m/s, m/100m=%, ...	$\mathbf{\Delta T = \int f dx}$ $\frac{dT}{dx} = f$	$\mathbf{T = a^n}$ $\sqrt[n]{T} = a$ $\frac{\log T}{\log a} = n$

De forskellige opsamlings- eller opdelings–spørgsmål giver anledning til både fremad- og tilbageregning:

	Fremadregning	*Tilbageregning (ligninger)*	
Variabelt styk-tal	3 kr. og 5 kr. er totalt ? kr. **3 + 5 = T**		3 kr. og ? kr. er totalt 21 kr. 3 + x = 21 *x = 21–3*
Konstant styk-tal	3 kr. 5 gange er totalt ? kr. **3 * 5 = T**		3 kr. ? gange er totalt 21 kr. 3 * x = 21 *x = 21/3*
Konstant pr.tal	3 % 5 gange er totalt ? % **103% ^ 5 = T**	3 % ? gange er totalt 21% 103% ^ x = 121% *x = log 1.21/log 1.03*	? % 5 gange er totalt 21% (1+x) ^ 5 = 121% *x* = $(\sqrt[5]{121\%}) - 100\%$

C1	Fra bunke til bundt - mangfoldighed, bundtning & stakning
C2	Uforudsigelig variation kan forudsiges af gennemsnitstal
A1	Sammenstakning af konkrete og abstrakte stakke
A2	Sammenlægning af per-tal
T1	Opstakning og afstakning, fremadregning og tilbageregning
T2	Stakke i tid, konstant og forudsigelig variation
S1	Stakke i rum, geometri
S2	Stakke i gitre, koordinatgeometri
PoMo	*Mængde-matematik eller mangfoldigheds-matematik*
KL	*Kvantitativ litteratur, Algebra: Opsamle & opdele*
GE	*Geometri: Jordmåling*

MATH**e**CADEMY: Matematik *nedefra*

Variabelt pr.tal	3 m/s voksende jævnt til 4 m/s over 5 sek. er totalt ? m $\displaystyle\int_0^5 \left(3 + \frac{4-3}{5}x\right) dx = \Delta T$	0 m/s voksende ? over x sek. er totalt x^2 m $\displaystyle\int_0^x f\, dx = x^2$ $f = \frac{d}{dx}\ x^2$

Integralregning vokser ud af forskellige rødder:

Spørgsmålet ”hvad er forskellen på lineær og eksponentiel vækst?”

Newtons naturvidenskabelige revolution: Hvordan forenes variable pr.tal?

2.2 Forskel på lineær og eksponentiel vækst

Hvordan kan vi beskrive forskellen på lineær og eksponentiel vækst?

Lineær vækst: 8 kr 5 gange giver 40 kr

Eksponentiel vækst: 8 % 5 gange giver 40% PLUS rentes-rente RR, eller

8 % 5 gange giver 40% + 6.9% = 46.9% = R = samlet rente

Vi introducer her et tal k, som er totalt negligeret af moderne matematik, Rentes-Renten RR defineret som $1+R = (1+r)^n = 1 + n*r + RR$ = noget lineært + RR

Rentes-Renten RR giver således svaret på spørgsmålet: Hvor tæt er eksponentiel vækst på at være lineær?

Som forventet giver en lille rente r en lille rentes rente RR:

r = 8%: $1.08^5 = 1.469$

r = 0.8%: $1.008^5 = 1.04065$

r = 0.08%: $1.0008^5 = 1.0040064$

så for meget små renter kan rentes-renten negligeres, hvorved den eksponentielle vækst bliver lineær:

$(1 + r)^n \approx 1 + r*n$, hvis $r \approx 0$, eller

$(1 + r)^n \to 1 + r*n$, hvis $r \to 0$, eller $\lim_{n \to 0} ((1+r)^n - r*n) = 1$

Hermed er vi nået frem til differentialregningens kerne: *Det ikke-lineære er lokalt lineært*.

Herfra er der ikke langt til kernereglen $d/dx(x^n) = n*x^{(n-1)}$:

Lad $y = x^n$. Hvis x får en lille tilvækst dx vil y få en lille tilvækst dy, som kan beregnes:

$$\begin{aligned}
y &= x^n \\
y+dy &= (x+dx)^n \\
&= (x*(1+dx/x))^n \\
&= x^n*(1+dx/x)^n \\
&= x^n*(1+n*dx/x) && \text{(da dx er meget lille, er også renten dx/x er meget lille)} \\
&= x^n + n*dx*x^{(n-1)} \\
&= y + n*dx*x^{(n-1)}
\end{aligned}$$

dvs. $dy = n*dx*x^{(n-1)}$

eller $dy/dx = n*x^{(n-1)}$

Og herfra er der ikke langt til integralregningens kerne:

Uanset antallet af enkelt-tilvækster dy kan den samlede tilvækst Δy altid beregnes på to forskellige måder: Som summen af enkelt-tilvæksterne $\int dy$ og som stuttal – begyndelsestal, dvs. y-slut – y-beg:

$\Delta y = \int_a^b dy = yb - ya$, eller da $y' = dy/dx$: $\int_a^b y'\, dx = yb - ya$

niveau		samlet tilvækst Δy	
21	enkelt-tilvækster	sum af enkelt-tilvækster	stuttal – begyndelsestal
23	2	2	2
26	3	5	5
24	-2	3	3
28	4	7	7
25	-3	4	4
25	0	4	4
30	5	9	9

2.3 Hvordan forenes variable pr.tal?

Vi kan nu løse integralregningens hovedproblem, at forene variable pr.tal:

Eksempel 1. Acceleration: Tid x=sekund-tallet, strækning s=meter-tallet, hastighed v=meter/sekund-tallet=s'.

En hastighed v vokser fra 2m/s til 3m/s på 5 sek., dvs. som v = 2 + (3-2)/5*x = 2+0.2*x = ds/dx= s'.

Differentialligningen s' = 2 +0.2*x løses ved at bruge omvendt differentiation (integration):

Hvis s' = 2 +0.2*x så er s = 2*x + 0.1*x^2.

Dvs. $\Delta s = \int_0^5 ds = \int_0^5 s'dx = \int_0^5 (2+0.2x)*dx$ = s5-s0 = (2*5 + 0.1*5^2) - (2*0 + 0.1*0^2) = 12.5 m

Eksempel 2. Rabat: Vægt x = kg-tallet, samlet pris s = kroner-tallet, stykpris p = kroner/kg-tallet = s'.

En stykpris p falder fra 20kr/kg til 12kr/kg over 50kg dvs. som p = 20 - (20-12)/50*x =20-0.16*x =ds/dx= s'.

Differentialligningen s' = 20-0.16*x løses ved at bruge omvendt differentiation (integration):

Hvis s' = 20-0.16*x så er s = 20*x - 0.08*x^2.

Dvs. $\Delta s = \int_0^{50} ds = \int_0^{50} s'dx = \int_0^{5} (20-0.08x)*dx$ = s50-s0 = (20*50 - 0.08*50^2)-(20*0 + 0.08*0^2) = 800 kr

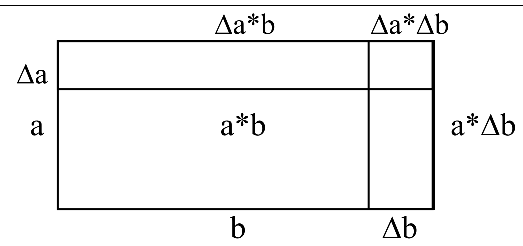
2.4 Stakregning

Vi vil nu se på, hvordan totalen T = a*b ændrer sig når a og b ændrer sig.

Ved at tegne et rektangel ses at

ΔT = Δa*b + a*Δb + Δa*Δb, eller i procent:

ΔT/T = Δa/a + Δb/b ved små ændringer



Hvis velstand = Produktion/Person kan vi nu indse at en Produktionstilvækst på 2.1% kombineret med en Persontilvækst på 3.4% desværre giver et vesltandsfald på 1.3%.

Eller vi kan pludselig se to nye beviser for differentialregningens kerneregel:

Hvis T = x^n = x*x*x n gange, så er dT/T = n*dx/x, eller dT/dx = n*T/x = n*x^n-1. Dvs.

Et 2-dimenionalt rektangel har 2 væsktlag hvor på x*dx.
Et 3-dimenionalt rektangel har 3 væsktlag hvor på x2*dx.
Et 4-dimenionalt rektangel har 4 væsktlag hvor på x3*dx. Osv.

Eksempel 1. Hvis T = x^5 = x*x*x*x*x gælder tilnærmelsesvis:

ΔT/T = Δx/x + Δx/x + Δx/x + Δx/x + Δx/x = 5*Δx/x, dvs.

ΔT = 5*Δx/x*T = 5*Δx/x*x^5 = 5*Δx/x^4, eller

ΔT/Δx = 5*x^4, eller for meget små tilvækster (ΔT -> dT):

Hvis T = x^5, så er dT/dx = 5*x^4, eller
Hvis T = x^5, så er T' = (x^5)' = 5*x^4, hvilket kaldes potensreglen i differentialregning:
Hvis T = x^n, så er T' = (x^n)' = n*x^(n-1).

Eksempel 2. Idealgasligningen p*V = n*R*T forbinder en luftarts tryk p og rumfang V med antal molekyler n og temperaturen T. Alle kan variere på nær R, som er en konstant der får enhederne til at stemme overens:

Δp/p + ΔV/V = Δn/n + ΔR/R + ΔT/T, eller da ΔR = 0 eftersom R er en konstant, Δp/p + ΔV/V = Δn/n + ΔT/T

Ved ændringerne V: +5%, n: +3%, T: +4% vil p: +3%+4%-5% = +2%

2.5 Kurvetegning

Et variabelt tal kaldes f.eks. x. Et regnestykke med et variabelt tal x kaldes en funktion f(x), som f.eks. f(x) = 3*x^2 – 4*x + 5. En funktion f(x) kan indtegnes i et koordinatsystem som en f-kurve.

Vi kan sige ”løs ligningen 3+x = 7”. Men vi kan ikke sige ”løs ligningen 3+5 = 7”

Vi kan sige ”f(x) = 3+x”, altså at 3+x er et regnestykke, som indeholder x som et variabelt tal.

Men vi kan hverken sige f(x) = 7 eller f(3) = 7:

At sige ’f(x) = 7” er at sige at 7 er et regnestykke, som indeholder x som et variabelt tal, hvilket er meningsløst, da 7 er et tal og ikke et regnestykke.

At sige ’f(3) = 7” er at sige at 7 er et regnestykke, som indeholder 3 som et variabelt tal, hvilket er meningsløst, da 7 er et tal og ikke et regnestykke, og da 3 ikke er et variabelt tal.

y = f(x)	udregner y-kurvens niveau
y’ = f’(x)	udregner y-kurvens stigning og dermed også tangentens stigning, da kurven er lokalt lineær
y” = f”(x)	udregner y-kurvens krumning
∫y dx	udregner arealet under y-kurven, eller det gennemsnitlige y-tal

Eksempel 1. En f-tabel består af fire rækker med hhv. x, y, y’ og y”

x	3
y = 3*x^2–4*x+5	y = 3*3^2–4*3+5 = 20
y’ = 6*x–4	y’ = 6*3 – 4 = 14
y” = 3	y” = 3

Heraf ses at i punktet hvor x = 3 har kurven et niveau på 20, en stigning på 14 og en krumning, der går opad. Dvs. lige efter x=3 er niveauet over 20 og stigningen er over 14

Eksempel 2. Top og bundpunkter på en kurve kan findes ved tegning. Eller ved regning ved at opstille en f-tabel, f.eks. for kurven y = f(x) = x^3+3*x^2–9*x

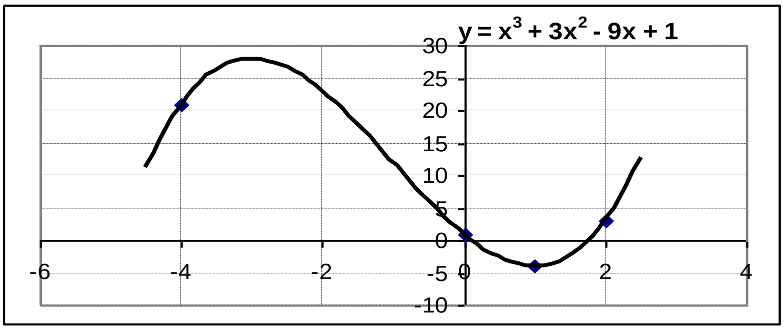
x		-3		-1		1	
y =x^3+3*x^2–9*x+1	↗			↘			↗
y’ =3*x^2+6*x–9 *y’=0 for x=-3 og x=1*	+	y’ =0 toppunkt		-		y’= 0 bundpunkt	+
y” = 6*x+6 *y”=0 for x=-1*		-		y” = 0 vendetangent		+	

Heraf ses at i punkterne hvor x = -3 eller x = 1 har kurven en vandret tangent med stigning y’= 0.

I x = -3 krummer kurven nedad (y” negativ), dvs. vi har her et toppunkt, hvilket også kan ses af at fortegnet for y’ (tangentstigningen) skifter fra + til - i x = -3. . I x = 1 krummer kurven opad (y” positiv), dvs. vi har her et bundpunkt, hvilket også kan ses af at fortegnet for y’ (tangentstigningen) skifter fra - til + i x = 1.

I x = -1 har vi en vendetangent, idet tangentstigningen her har et bundpunkt, dvs. ophører med at falde og begynder at vokse, eftersom fortegnet for y’’ (krumningen) skifter fra - til + i x = -1.

x	y
-4	21
0	1
1	-4
2	3



Dobbeltklik og rediger

2.6 To variable

Hvis en total T indeholder to variable x og y kan den indtegnet i et tredimensionalt koordinatsystem blive et flade. Hvis man holder en af variablerne konstant vil fladen blive opdelt i retningskurver med hver deres stigning, som kan findes ved partiel diferentierentiation:

Eksempel. T = x^2 + y^2 – 2*x + 3

Stigning i x-retningen Tx’ = ∂T/∂x = ∂/∂x (x^2 + y^2 – 2*x + 3) = 2*x – 2   (husk at y er konstant)
Stigning i y-retningen Ty’ = ∂T/∂y = ∂/∂y (x^2 + y^2 – 2*x + 3) = 2*y   (husk at x er konstant)

Fladen er da lokal vandret i punktet hvor Tx’ = 0 og Ty’ = 0, dvs. i punktet (x,y) = (1,0)

En niveaukurve på fladen T har konstant T-værdi, f.eks. T = 6:

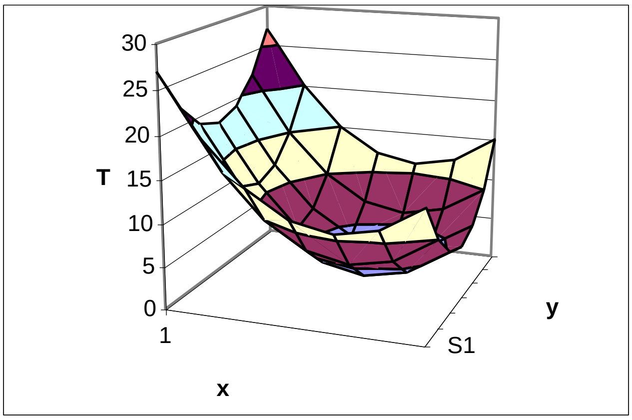
Niveaukurve = ?	x^2 + y^2 – 2*x + 3 = T
T = 6	x^2– 2*x + 1 + y^2 = 6 – 3 + 1
	(x-1)^2 + (y-0)^2 = 4 = 2^2

Dvs. niveaukurven T = 6 er en cirkel med centrum i (x,y) = (1,0) og radius r = 2.

T = a*x^2 + b*x + c*y^2 + d*y + e

a	b	c	d	e
1	-2	1	0	3

	T \ y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-3	27	22	19	18	19	22	27
	-2	20	15	12	11	12	15	20
	-1	15	10	7	6	7	10	15
	0	12	7	4	3	4	7	12
	1	11	6	3	2	3	6	11
	2	12	7	4	3	4	7	12
	3	15	10	7	6	7	10	15



Dobbeltklik og rediger

2.7 Vækstligninger

En vækstligning (differentialligning) fortæller hvad væksten er. At løse en vækstligning vil sige at udregne sluttallet ud fra begyndelsestallet og vækstligningen. Løsningen kan ske ved regning (integration) eller ved tælling (numerisk integration). Eksempler på vækstligninger:

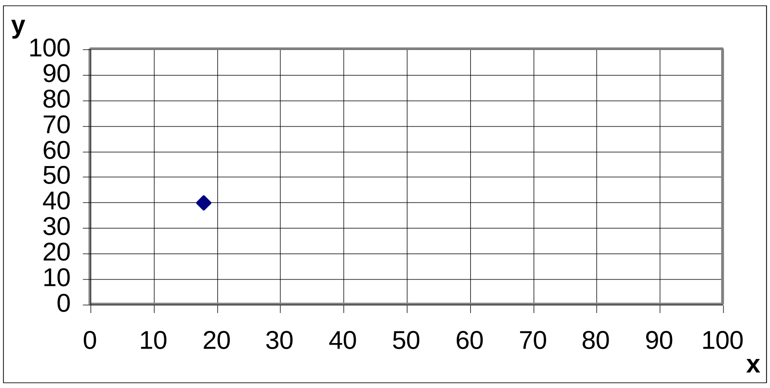
Væksttype	*Begyndelsestal*	*Vækstligning*	*Sluttal*
Konstant tilvækst	To = b	ΔT = a	T = b + a*x
Konstant vækstprocent	To = b	ΔT = r%*T	T = b * a^x, a = 1+r
Konstant tilvækst&vækstprocent	To = 0	ΔT = r%*T + a	T/a = R/r, 1+R = (1+r)^n
Variabel forudsigelig tilvækst	To = b	dT = f*dx	T = b + ∫ f*dx
Variabel uforudsigelig tilvækst	-	ΔT = ?	T = Tgns ± 2*ΔTgns

Eksempler på numerisk integration:

Nulstil/Begynd: 0/1 *1*

	x	y
Begyndelsestal	0	100
Tilvækst	1	-2,091
Sluttal	**18**	**39,721**

Vejledning
1. Indtast 0 i B1, tryk på F9
2. Indtast begyndelsestal
3. Indtast tilvækstligninger
4. Indtast 1 i B1, tryk på F9
5. Tryk F9 gentagne gange



Dobbeltklik og rediger

2.8 Projekt De 8 vækstfortællinger

Der var engang otte begyndelsesværdier b, der gerne ville være større. De valgte hver deres egen vækstmåde:

1. Den første begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med samme konstante tal a: +a +a +a osv. Omsider nåede den da sin slutværdi (finalværdi) f:

Plus vækst: $\Delta f = a$ $f = b + a*x$

2. Den anden begyndelsesværdi b gangede sig hver dag med samme konstante tal a: *a *a *a osv. Dette svarede til at plusse sig med samme konstante pct. r: +r% +r% +r% osv., idet b+r*b = b*(1+r) = b*a. Omsider nåede den da sin slutværdi f:

Gange vækst: $\Delta f = r*f$ $f = b * a\text{^}x = b * (1+r)\text{^}x$

3. Den tredje begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med både samme konstante tal a og samme konstante procent r :+r%+a kr, +r%+a kr, +r%+a kr osv. Omsider nåede den da sin slutværdi f:

Plus&Gange vækst: $\Delta f = r*f + a$ $f = b * (1+r)\text{^}x + a*R/r$, hvor $1+R = (1+r)\text{^}x$

4. Den fjerde begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med et konstant voksende tal: +1a +2a +3a osv. Omsider nåede den da sin slutværdi f:

PlusPlus vækst: $\Delta\Delta f = a$ $f = b + \ldots + a/2*x\text{^}2$

5. Den femte begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med et konstant voksende voksende tal: +1a +2a +4a +7a. Omsider nåede b da sin slutværdi f:

Plus-I-Tredje vækst: $\Delta\Delta\Delta f = a$ $f = b + \ldots + a/3*x\text{^}3$

6. Den sjette begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med tal, hvis tilvækst var en vis procentdel af slutværdien. Dette bremsede både stigning og fald, og medførte, at slutværdien f svingede harmonisk:

Svingende vækst: $\Delta\Delta f = r*f$ $f = a*\sin(c*x)$

8. Den syvende begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med et variabelt, men forudsigeligt tal, som den beregnede af en vækstligning $\Delta f = a/x$ ($df = f'dx$). Omsider nåede b da sin slutværdi f:

Ligningsstyret vækst: $\Delta f = a/x$ ($df = f\,'dx$) $f = b + \sum \Delta f = b + \int f\,'\,dx$

8. Den ottende begyndelsesværdi b plussede sig hver dag med et variabelt, men uforudsigeligt tal, som den fandt ved et møntkast: Krone betød +a, og Plat -a. Dette medførte, at slutværdien f svingede tilfældigt omkring middelværdien.

Tilfældig vækst: Δf = tilfældig $f = MID \pm 2 * SPR$ (med 95% sandsynlighed)

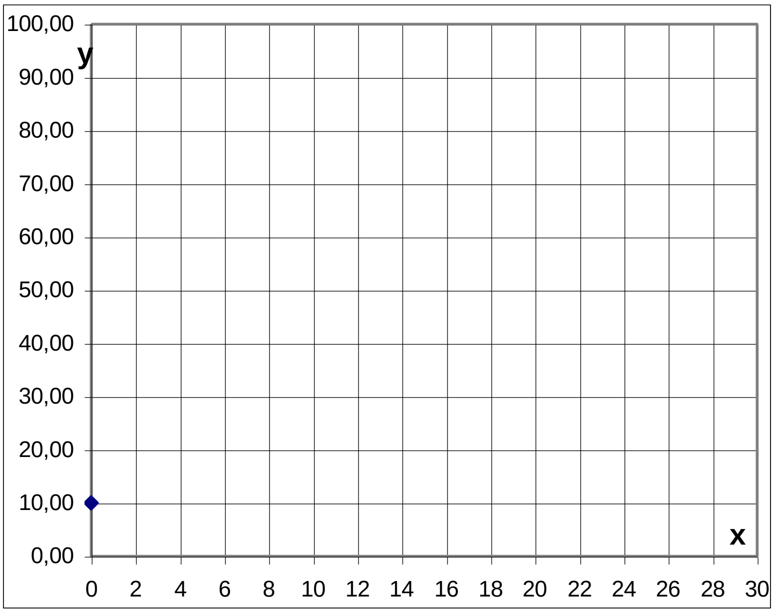
Nulstil/Begynd: 0/1 0

	x	y
Begyndelsestal	0	10
Tilvækst Δ	1	-2,76
Sluttal	**0**	**10,00**

Vækststal 0,5

Vejledning
1. Indtast 0 i B1, tryk på F9
2. Indtast begyndelsestal
3. Indtast tilvækstligninger
4. Indtast 1 i B1, tryk på F9
5. Tryk F9 gentagne gange

Tilvækstligning i C4
1 =B6
2 =B6*C5
3 =B6*C6+C6
4 =B6*B5
7 =0,2*B5^2-3*B5+1
8 =10*(slump()-0,5)



Dobbeltklik og rediger

T2 OPGAVER

Spørgsmål: Hvordan kan vi regne os frem til sluttallet, hvis tilvæksten er konstant? Svaret er anvendelse af konstante vækstligninger: Hvis $Ko=300$ og $\Delta K/n = a = 2$, så er $K7 = Ko + a*n = 300 + 2*7 = 314$. Hvis $Ko = 300$ og $\Delta K/K = r = 2\%$, så er $K7 = Ko*(1+r)\hat{}n = 300*1.02\hat{}7 = 344.61$.

Spørgsmål: Hvordan kan vi regne os frem til sluttallet, hvis tilvæksten er variabel? Svaret er anvendelse af variable vækstligninger: Hvis $Ko=300$ og $\Delta K=2$ og $\Delta\Delta K=-1$, så er $K = Ko+b*n+a*n\hat{}2$. Hvis $Ko=300$ og $dK/dx = K'$, så er $\Delta K = K-Ko = \int K'dx$.

T21.1 Faglige opgaver

1. Vækstlagsregning: *Niveauregning*: $T = 3*4 = ?*5$
Vækstregning: Hvis $T = a*b$, så er tilvæksten i T $\Delta T = ?$

Deduktivt svar oppefra:

Begyndelses-bundter: a og b — Slut-bundter: $a+\Delta a$ og $b+\Delta b$
Begyndelses-stak: $T = a*b$ — Slut-stak: $T+\Delta T = (a+\Delta a)*(b+\Delta b)$

$T+\Delta T$	$= (a+\Delta a)*(b+\Delta b)$
	$= (a+\Delta a)*b+(a+\Delta a)*\Delta b$
	$= a*b + \Delta a*b + a*\Delta b + \Delta a*\Delta b$
	$= T + \Delta a*b + a*\Delta b + \Delta a*\Delta b$
$\boldsymbol{\Delta T}$	$\boldsymbol{= \Delta a*b + a*\Delta b + \Delta a*\Delta b}$
$\Delta T/T$	$= \Delta a*b/(a*b) + a*\Delta b/(a*b) +\Delta a*\Delta b/(a*b)$
$\Delta T/T$	$= \Delta a/a + \Delta b/b +\Delta a/a*\Delta b/b$
$\Delta T\%$	$= \Delta a\% + \Delta b\% +\Delta a\%*\Delta b\%$

Δa	$\Delta a*b$	$\Delta a*\Delta b$
a	**T = a*b**	$a*\Delta b$
	b	Δb

Induktivt svar nedefra:

Hvilken regel gælder for en staks vækstlag?

Vækstlag 1,1

Hvis T = 3 5ere = 3*5 -> (3+1)*(5+1), så er ΔT = ? svar: ΔT = 3+5+1
Hvis T = 4 7ere = 4*7 -> (4+1)*(7+1), så er ΔT = ? svar: ΔT = 4+7+1
Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+1)*(b+1), så er ΔT = ? svar: ΔT = a+b+1

Vækstlag 2,2

Hvis T = 3 5ere = 3*5 -> (3+2)*(5+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 6+10+4
Hvis T = 4 7ere = 4*7 -> (4+2)*(7+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 8+14+4
Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+2)*(b+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 2a+2b+4

Vækstlag 1,2

Hvis T = 3 5ere = 3*5 -> (3+1)*(5+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 6+5+2
Hvis T = 4 7ere = 4*7 -> (4+1)*(7+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 8+7+2
Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+1)*(b+2), så er ΔT = ? svar: ΔT = 2a+b+2

Regler

Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+n)*(b+n), så er ΔT = ? svar: ΔT = na+nb+nn
Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+m)*(b+n), så er ΔT = ? svar: ΔT = na+mb+mn
eller hvis m = Δa og n = Δb:
Hvis T = a b'ere = a*b -> (a+Δa)*(b+Δb) så er ΔT = Δa*b + a*Δb +Δa*Δb

Afprøv eksempler på forskellige vækstlag.

Afprøv øvelsen både på dig selv og/eller på en anden fra din omgangskreds.

Løs opgaven både på bordet og på papiret, både ved tælling og ved regning.

Rapporter dine observationer af hvad du og/eller forsøgspersonen gør og siger/tænker.

2. Omformuler ligningerne for alle konstante vækstformer (lineær, eksponentiel, opsparings, potens så alle beregningsformler fremkommer (f.eks. a=(K-Ko)/n osv.)

3. Find ved bogstavregning skæringspunkterne for alle par af ens vækstkurver.

4. Et politisk parti foreslår at rentesrenten beskattes med yderligere 10% som bruges til udviklingslande. Et andet parti afviser med den begrundelse at rentesrente ikke kan beregnes da der ikke findes nogen formel for rentesrente. Har de ret? Et beløb på 1000 kr er i 10 år blevet forrentet med 6% p.a.. Hvad er rentesrenten?

5. Er der en sammenhæng mellem tilvælster og summer i tabellen over konstant acceleration?

6. I Excel-regnearket ”VækstkurverI” er alle formler fjernet i arket ”studielån&pension”. Kopier arket og genetabler formlerne.

7. Færdiggør arket ”potensvækst” i Excel-regnearket ”VækstkurverI”

T21.2 Rutineopgaver

1. Opstil og løs en række niveauopgaver (K=?, Ko=?, a=?, n=?) og kontroller ved tegning.

2. Opstil og løs en række skæringsopgaver (K1 = K2) og kontroller ved tegning.

3. Løs prognoseopgaver ved tegning og regning: I 1992 var (krone/medlems/eller andet)tallet 460. I 1997 var tallet 610. Hvad er tallet i 2005? Hvornår er tallet 700? (Antagelse/scenarie1: Konstant årlig tilvækst, Antagelse/scenarie 2: Konstant årlig vækstprocent. Hent evt. tal fra tids-serier i statistisk tiårsoversigt.

4. Find og løs nogle eksamensopgaver fra HF matematik fællesfag.

T21.3 Didaktisk opgave

Opgaven består af to dele, opgave 1. samt én af 2a og 2b.

1. Undervisningsforløb i plus&gange-vækst

Du skal udarbejde et forslag til et 2*3-lektioners undervisningsforløb i plus&gange-vækst i 3. klasse.

Forslaget skal bl.a. indeholde et forslag til inddragelse af konkrete materialer som f.eks. et skakbræt, og plus-vækst skal kobles sammen med tabeltræning.

Forslaget skal afprøves på én eller flere forsøgspersoner og afrapporteres efter sædvanlige retningslinier: Rapporter dine observationer af hvad du gør og tænker (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på assimilering og akkommodering (genkendelse og erkendelse).

2a. Undervisningsforløb i lineær vækst

Du skal udarbejde et forslag til et 5*3-lektioners undervisningsforløb i lineær vækst i 8. klasse.

Forslaget skal bl.a. indeholde

- planer for hver uge (3 timer), herunder forslag til hjemmeopgaver.
- mulighed for tværfaglig undervisning med et eller flere andre fag.
- referencer til relevant didaktisk og pædagogisk teori.

2b. Undervisningsforløb i eksponentiel vækst

Du skal udarbejde et forslag til et 5*3-lektioners undervisningsforløb i eksponentiel vækst i 9. klasse.

Forslaget skal bl.a. indeholde

- planer for hver uge (3 timer), herunder forslag til hjemmeopgaver.
- mulighed for tværfaglig undervisning med et eller flere andre fag.
- referencer til relevant didaktisk og pædagogisk teori.

T22.1 Faglige opgaver

1. Vis på forskellige måder, at d/dx(x^3) = 3*x^2

2. Vis på forskellige måder, at d/dx(1/x) = -1/(x^2)

3. Vis at i intervallet fra 0 til 1 er gennemsnitshøjden ½ for kurven y = x, 1/3 for y = x^2, 1/(n+1) for y = x^n.

4. En stykpris falder jævnt fra 7 kr/kg ved 0 kg til 4 kr/kg ved 20 kg. Hvad er prisen for 20 kg?

5. En stykpris falder fra 7 kr/kg ved 0 kg over 6 kr/kg ved 10 kg til 4 kr/kg ved 20 kg. Hvad er prisen for 20 kg? Beregn to scenarier, et hvor stykprisen falder lineært fald, et hvor stykprisen falder som et polynomium.

6. En medlemstilgang voksede eksponentielt fra 70 personer/år i 1970 til 100 personer/år i 1990. Hvor mange nye medlemmer kom til i perioden fra 1970 til 1990.

7. Hvordan kan man udregne cirka værdier for summer som Sn = 1/n (dvs. 1+1/2+1/3+ osv.), Sn = 1/(n^2), Sn = 1/(n^3), Sn = n/(n+1)^2 osv.?

8. Opstil din egen vækstfortælling og lav en tabel over dens forløb.

9. Opstil et alternativt scenarium for familiefirmaet.

10. Vis at d/dx(sinx) = cosx, d/dx(cosx) = -sinx, d/dx(x^-1) = -x^-2, d/dx(x^-n) = -n*x^-(n-1), d/dx(lnx)=1/x.

11. I idealgasligningen p*V = n*R*T find ∂p/∂V, ∂p/∂n, ∂p/∂T. Find ∂V/∂p, ∂V/∂n, ∂V/∂T. Find ∂n/∂p, ∂n/∂V, ∂n/∂T. Find ∂T/∂p, ∂T/∂V, ∂T/∂n.

T22.2 Rutineopgaver

1. Opstil en tabel med 3 punkter og brug 8.3 til at opsille ligningen for et 2.grads polynomium, som passer til tabellen. Undersøg dernæst polynomiet mht. niveau og variation, top- og bundtpunketr, vendetangent samt areal under kurven.

2. Opstil en tabel med 4 punkter og brug 8.3 til at opsille ligningen for et 3.grads polynomium, som passer til tabellen. Undersøg dernæst polynomiet mht. niveau og variation, top- og bundtpunketr, vendetangent samt areal under kurven.

3. Løs opgaverne

		x = 3 y = ?	y = 0 x = ?		y '	y ' = 0	y ''	Integreret	Toppunkt		Tangent i x=2	∫ y dx fra 1 til 2	Fortegn	Faktoropløsning
1	y = x^2 -6x+5	-4	1	5	2x-6	3	2	0,33x^3-3x^2+5x+k	3	-4	y = -2x+1	1,67	+ - +	(x-1)(x-5)
2	y = x^2 -3x+2	2	1	2	2x-3	1,5	2	0,33x^3-1,5x^2+2x+k	1,5	-0,25	y = +1x-2	0,17	+ - +	(x-2)(x-1)
3	y = 2x^2 -10x+12	0	2	3	4x-10	2,5	4	0,67x^3-5x^2+12x+k	2,5	-0,5	y = -2x+4	-1,67	+ - +	2(x-3)(x-2)
4	y = 2x^2 -6x-8	-8	-1	4	4x-6	1,5	4	0,67x^3-3x^2-8x+k	1,5	-12,5	y = +2x-16	12,33	+ - +	2(x-4)(x+1)
5	y = 3x^2 -18x+15	-12	1	5	6x-18	3	6	1,00x^3-9x^2+15x+k	3	-12	y = -6x+3	5,00	+ - +	3(x-5)(x-1)
6	y = 3x^2 -24x+36	-9	2	6	6x-24	4	6	1,00x^3-12x^2+36x+k	4	-12	y = -12x+24	-7,00	+ - +	3(x-6)(x-2)
7	y = 4x^2 -40x+84	0	3	7	8x-40	5	8	1,33x^3-20x^2+84x+k	5	-16	y = -24x+68	-33,33	+ - +	4(x-7)(x-3)
8	y = 4x^2 -40x+64	-20	2	8	8x-40	5	8	1,33x^3-20x^2+64x+k	5	-36	y = -24x+48	-13,33	+ - +	4(x-8)(x-2)
9	y = -4x^2 -12x-8	-80	-1	-2	-8x-12	-1,5	-8	-1,33x^3-6x^2-8x+k	-1,5	1	y = -28x+8	35,33	- + -	-4(x+1)(x+2)
10	y = -4x^2 -4x+8	-40	1	-2	-8x-4	-0,5	-8	-1,33x^3-2x^2+8x+k	-0,5	9	y = -20x+24	7,33	- + -	-4(x+2)(x-1)
11	y = -3x^2 -6x+9	-36	1	-3	-6x-6	-1	-6	-1,00x^3-3x^2+9x+k	-1	12	y = -18x+21	7,00	- + -	-3(x+3)(x-1)
12	y = -3x^2 -6x+24	-21	2	-4	-6x-6	-1	-6	-1,00x^3-3x^2+24x+k	-1	27	y = -18x+36	-8,00	- + -	-3(x+4)(x-2)
13	y = -2x^2 -4x+30	0	3	-5	-4x-4	-1	-4	-0,67x^3-2x^2+30x+k	-1	32	y = -12x+38	-19,33	- + -	-2(x+5)(x-3)
14	y = 2x^2 +8x-24	18	-6	2	4x+8	-2	4	0,67x^34x^2-24x+k	-2	-32	y = +16x-32	7,33	+ - +	2(x+6)(x-2)
15	y = 3x^2 +18x-21	60	-7	1	6x+18	-3	6	1,00x^39x^2-21x+k	-3	-48	y = +30x-33	-13,00	+ - +	3(x+7)(x-1)
16	y = x^2 +6x-16	11	-8	2	2x+6	-3	2	0,33x^33x^2-16x+k	-3	-25	y = +10x-20	4,67	+ - +	(x+8)(x-2)

4. Løs opgaverne

		x=4 y=?	Nulpunkter			Fortegn	Toppunkter		Faktoropløsning	Tangent i x=2	Differentieret	Integreret
1	y = x^3 -2x^2-5x+6	18	1	-2	3	- + - +	-0,79 8,21	2,12 -4,06	(x-1)(x+2)(x-3)	y=-4-1(x-2)	3x^2-4x-5	0,25x^4-0,67x^3-2,50x^2+6x+k
2	y = x^3 -6x^2+11x-6	6	1	2	3	- + - +	1,42 0,38	2,58 -0,38	(x-1)(x-2)(x-3)	y=-1(x-2)	3x^2-12x+11	0,25x^4-2,00x^3+5,50x^2-6x+k
3	y = 2x^3 -8x^2-22x+60	-28	2	-3	5	- + - +	-1,00 72,00	3,67 -29,63	2(x-2)(x+3)(x-5)	y=-30(x-2)	6x^2-16x-22	0,5x^4-2,67x^3-11,00x^2+60x+k
4	y = 2x^3 -20x^2+62x-60	-4	2	3	5	- + - +	2,45 1,26	4,22 -4,23	2(x-2)(x-3)(x-5)	y=6(x-2)	6x^2-40x+62	0,5x^4-6,67x^3+31,00x^2-60x+k
5	y = 3x^3 -18x^2-57x+252	-72	3	-4	7	- + - +	-1,21 289,30	5,21 -109,30	3(x-3)(x+4)(x-7)	y=90-93(x-2)	9x^2-36x-57	0,75x^4-6,00x^3-28,50x^2+252x+k
6	y = 3x^3 -42x^2+183x-252	0	3	4	7	- + - +	3,46 2,64	5,87 -18,19	3(x-3)(x-4)(x-7)	y=-30+51(x-2)	9x^2-84x+183	0,75x^4-14,00x^3+91,50x^2-252x+k
7	y = 4x^3 -32x^2-116x+720	0	4	-5	9	- + - +	-1,43 808,75	6,76 -290,82	4(x-4)(x+5)(x-9)	y=392-196(x-2)	12x^2-64x-116	1x^4-10,67x^3-58,00x^2+720x+k
8	y = 4x^3 -72x^2+404x-720	0	4	5	9	- + - +	4,47 4,51	7,53 -52,51	4(x-4)(x-5)(x-9)	y=-168+164(x-2)	12x^2-144x+404	1x^4-24,00x^3+202,00x^2-720x+k
9	y = -4x^3 +24x^2+76x-336	96	-4	3	7	+ - + -	5,21 145,74	-1,21 -385,74	-4(x+4)(x-3)(x-7)	y=-120+124(x-2)	-12x^2+48x+76	-1x^4+8,00x^3+38,00x^2-336x+k
10	y = -4x^3 +148x+336	672	-4	-3	7	+ - + -	3,51 682,51	-3,51 -10,51	-4(x+4)(x+3)(x-7)	y=600+100(x-2)	-12x^20x+148	-1x^40,00x^3+74,00x^2+336x+k
11	y = -3x^3 +12x^2+33x-90	42	-3	2	5	+ - + -	3,67 44,44	-1,00 -108,00	-3(x+3)(x-2)(x-5)	y=45(x-2)	-9x^2+24x+33	-0,75x^4+4,00x^3+16,50x^2-90x+k
12	y = -3x^3 +57x+90	126	-3	-2	5	+ - + -	2,52 185,63	-2,52 -5,63	-3(x+3)(x+2)(x-5)	y=180+21(x-2)	-9x^20x+57	-0,75x^40,00x^3+28,50x^2+90x+k
13	y = -2x^3 +4x^2+10x-12	-36	-2	1	3	+ - + -	2,12 8,12	-0,79 -16,42	-2(x+2)(x-1)(x-3)	y=8+2(x-2)	-6x^2+8x+10	-0,5x^4+1,33x^3+5,00x^2-12x+k
14	y = -2x^3 +14x+12	-60	-2	-1	3	+ - + -	1,53 26,26	-1,53 -2,26	-2(x+2)(x+1)(x-3)	y=24-10(x-2)	-6x^20x+14	-0,5x^40,00x^3+7,00x^2+12x+k
15	y = -x^3 +3x+2	-50	-1	-1	2	+ - + -	1,00 4,00	-1,00 0,00	-(x+1)(x+1)(x-2)	y=-9(x-2)	-3x^20x+3	-0,25x^40,00x^3+1,50x^2+2x+k
16	y = -x^3 +3x^2+1x-4	-16	-1	2	2	+ - + -	2,15	-0,15	-(x+1)(x-2)(x-2)	y=2+1(x-2)	-3x^2+6x+1	-0,25x^4+1,00x^3+0,50x^2-4x+k

T22.3 Didaktisk opgave

Projekt kanonkugle. Simuler en kanonkugle på et kvadratisk papir. Indtegn en affyringsrampe svarende til begyndelseshastigheden, f.eks. vandret begyndelseshastighed x’ = a, og lodret begyndelseshastighed y’ = b. Integn et mål.

Integn bevægelsen som en række pile, der har samme vandrette længde, men hvis lodrette længde aftager med 1 tern pr. pil. Rammes målet?

Beregn bevægelsen ved at løse bevægelsesligningerne xo = 0, yo = 0, xo’ = a, yo’ = b, x” = 0, y” = -1.

Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

Projekt Spring fra gynge. En gynge har snorlængden 1 meter. Gyngen føres ud til 45 grader og slippes. Hvor skal gyngen forlades for at få den maksimale springlængde? Hvor lnagt bliver springet. Gentag opgaven med udsvinget 30 grader. Gentag opgaven med udsvinget 60 grader.

Afprøv opgaven på dig selv og på en anden. Rapporter dine observationer af hvad forsøgspersonen gør og tænker/siger (handling og refleksion). Vær især opmærksom på eksempler på genkendelse og ny erkendelse (assimilering og akkommodering).

Projekt Familefirmaet

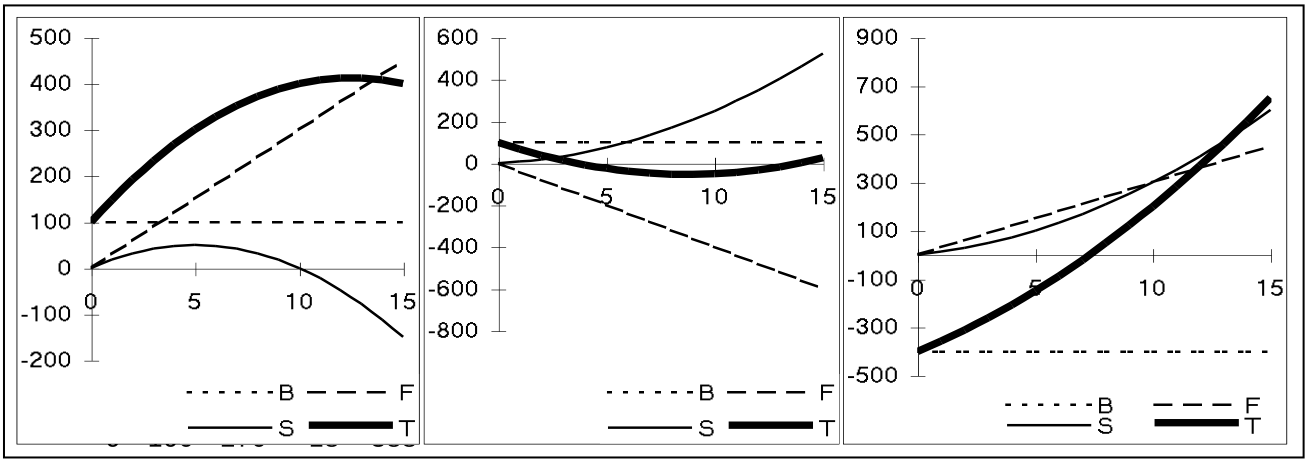
Et familiefirma opbygger sin kapital gennem tilskud fra tre generationer. Bedstefaderen er gået på pension og har efterladt sig en formus på To$. Faderen har etableret en rutine som indbringer b$/dag. Sønne er netop kommet tilbage fra universitetet, hvor han har lært ny teknologi så han er derfor i stand til langsomt at hæve sin daglige indkomst på s$ med d$/dag, dvs. s = so + d*n

Den total familiekapital efter n dage kan da udregnes som en sum af polynomier:

Bedstefader	To	0. grads polynomium, en konstant
Fader	b*n	1. grads polynomium
Søn	s*n = (so+½*d*n)* n = so*n + ½*d*n^2	2. grads polynomium
Total	To + (b+so)*n + d*n^2	2. grads polynomium

Samlere og spredere

I mange familier sker der det, at “efter en samler kommer en spreder”.



Spredere: Sønnen   Faderen   Bedstefaderen

Prissætning af teen

I familefirmaet mener man at en stigning i kg.prisen vil medføre et fald i kg.salget.

Bedstefaderens scenarium

Bedstefaderen mener at salget falder jævnt ved voksende stykpriser, og foreslår derfor en lineær sammenhæng y = a + b*x bestemt ved tabellen:

kg.pris x	kg.salg y
0	100
10	0

Konstanterne a og b kan bestemmes til a = 100 og b = -10 ud fra to ligninger med to ubekendte eller ud fra en vektorligning:

100 = a + b*0 og 0 = a + b*10, eller $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$

Salget bliver da y = 100 - 10x

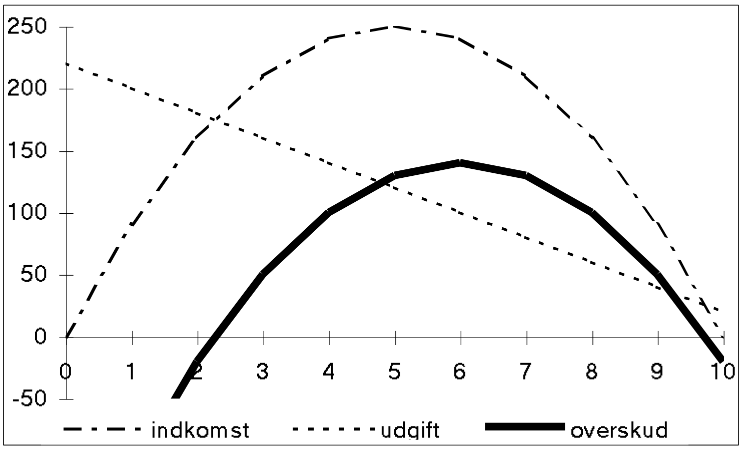
Den totale indkomst T er T = stykpris*salg = x*y = x*(100 - 10x) = 100*x - 10*x^2, altså et 2.grads polynomium.

Udgiften U til at producere y enheder består af en fast udgift uo = 20 og en variabel styukudgift m = 2:

Dvs. U = uo + m*y = 20 + 2*y = 20 + 2*(100–10*x) = 20 + 200–20*x = 220–20*x

Overskuddet P bliver da P = T–U = (100*x – 10*x^2)–(220 – 20*x) = – 220 + 80x – 10*x^2, dvs. igen et 2.grads polynomium.

pris	salg	indkomst	udgift	overskud
0	100	0	220	-220
1	90	90	200	-110
2	80	160	180	-20
3	70	210	160	50
4	60	240	140	100
5	50	250	120	130
6	40	240	100	140
7	30	210	80	130
8	20	160	60	100
9	10	90	40	50
10	0	0	20	-20



Dobbeltklik og rediger

Faderens scenarium

Faderen mener at salget falder langsommere ved højere kg.priser, og foreslår derfor et 2.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 bestemt ved tabellen

kg.pris x	kg.salg y
0	100
5	80
10	0

Konstanterne a, b og c kan bestemmes til a = 100 og b = 2 og c = -1.2 ud fra tre ligninger med tre ubekendte eller ud fra en vektorligning:

100 = a + b*0 + c*0 og 80 = a + b*5 + c*25 og 0 = a + b*10 + c*100, eller $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$

Salget bliver da y = 100 + 2*x – 1.2*x^2

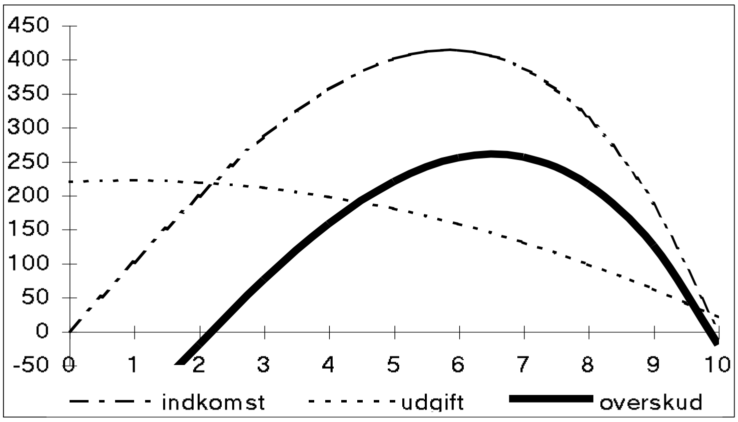
Den totale indkomst T er T = stykpris*salg = x*y = x*(100 + 2*x – 1.2*x^2) = 100*x + 2*x^2 – 1.2*x^3, altså et 3.grads polynomium.

Udgiften U til at producere y enheder består af en fast udgift uo = 20 og en variabel styukudgift m = 2:

Dvs. U = uo + m*y = 20 + 2*y = 20 + 2*(100 + 2*x – 1.2*x^2) = 20 + 200 + 4*x – 2.4*x^2 = 220 + 4*x – 2.4*x^2 .

Overskuddet P bliver da P = T–U = (100*x + 2*x^2 – 1.2*x^3) – (220 + 4*x – 2.4*x^2) = – 220 + 104*x – 0.4*x^2 – 1.2*x^3, dvs. et 3.grads polynomium.

pris	salg	indkomst	udgift	overskud
0	100	0	220	-220
1	101	101	222	-121
2	99	198	218	-20
3	95	286	210	75
4	89	355	198	158
5	80	400	180	220
6	69	413	158	255
7	55	386	130	256
8	39	314	98	215
9	21	187	62	126
10	0	0	20	-20



Dobbeltklik og rediger

Sønnens scenarium

Sønnen mener at salget falder mest ved lave og høje stykpriser, og foreslår derfor et 3.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 + d*x^3 bestemt ved tabellen

kg.pris x	kg.salg y
0	100
2	60
8	40
10	0

Konstanterne a, b, c og d kan bestemmes til a = 100 og b = -30.833 og c = 6.25 og d = -0.417 ud fra fire ligninger med fire ubekendte eller ud fra en vektorligning:

100 = a + b*0 + c*0 + d*0 og 60 = a + b*2 + c*4 + d*8 og 40 = a + b*8 + c*64 + d*512 og 0 = a + b*10 + c*100 + d*1000,

eller $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Salget bliver da y = 100 – 30.833*x + 6.25*x^2 – 0.417*x^3

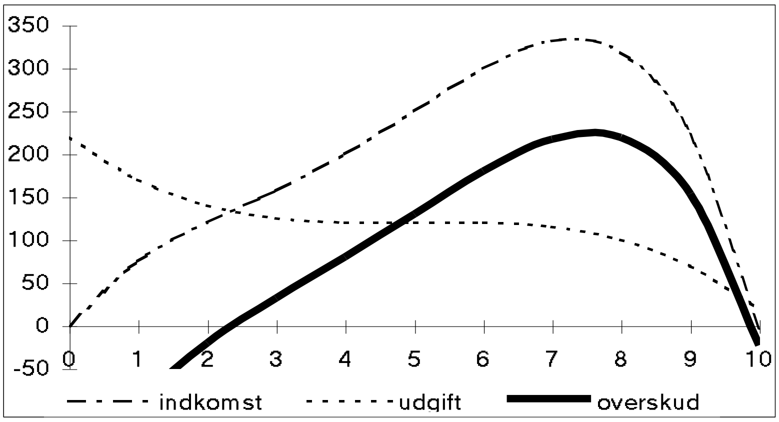
Den totale indkomst T er T = stykpris*salg = x*y = x*(100 – 30.833*x + 6.25*x^2 – 0.417*x^3) = 100*x – 30.833*x^2 + 6.25*x^3 – 0.417*x^4, altså et 4.grads polynomium.

Udgiften U til at producere y enheder består af en fast udgift uo = 20 og en variabel styukudgift m = 2:

Dvs. U = uo + m*y = 20 + 2*y = 20 + 2*(100 – 30.833*x + 6.25*x^2 – 0.417*x^3) = 20 + 200 – 61.666*x + 12.5*x^2 – 0.434*x^3 = 220 – 61.666*x + 12.5*x^2 – 0.434*x^3.

Overskuddet P bliver da P = T–U = (100*x – 30.833*x^2 + 6.25*x^3 – 0.417*x^4) – (220 – 61.666*x + 12.5*x^2 – 0.434*x^3) = – 220 + 38.334*x – 18.333*x^2 +5.816*x^3– 0.417*x^4 , dvs. et 4.grads polynomium.

pris	salg	indkomst	udgift	overskud
0	100	0	220	-220
1	75	75	170	-95
2	60	120	140	-20
3	52	157	125	32
4	50	200	120	80
5	50	250	120	130
6	50	300	120	180
7	47	332	115	217
8	40	319	100	219
9	25	223	70	153
10	0	-3	19	-23



Dobbeltklik og rediger

Familiefirmaet har altså tre forskellige opfattelser af hvilken stykpris der vil give det størest overskud, bedstefaderen mener 6, faderen 7 og sønnen 8.