Forslag

til

Matematikbiennalen

2016

i Sverige

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Matematik: Selvrefererende MetaMatisme eller rodfæstet MangeMatik

Matematik betyder på græsk ’det vi ved noget om’. Pythagoras brugte ordet som en fælles betegnelse for deres fire vidensområder: Stjerner, musik, former og størrelser. Med stjerner og musik som selvstændige vidensområder, omfattede matematik indtil 1960 kun geometri og algebra, som på græsk og arabisk betyder jordmåling og genforening af tal. Så matematikkens rødder er de to vigtige spørgsmål: Hvordan deler vi den jord, vi lever på, og det, den producerer?

Og netop høstning ved at bundte og stakke har skabt algebraens fire foreningsmåder, hvilket ses ved at skrive totalen 345 fuldtud som T = 345 = 3 bundt-bundter og 4 bundter og 5 ubundtede = 3*B^2 + 4*B + 5*1, hvor bundtstørrelsen normalt er ti. Her ses, at vi forener uens tal med plus, ens tal med gange, ens gangetal med potens, og uens blokke med vandret plus, også kaldet integration. Hver af disse foreningsmåder har sin egen opdelingsmåde: minus, division, rod og logaritme samt differentiation. Så algebraens rødder er optælling af det naturlige fænomen Mange. Tilsvarende er geometriens rødder de former, som ses i vore omgivelser: Linjer, trekanter, firkanter og cirkler.

Skolen underviste da også i tre fag, regning og algebra og geometri, indtil de omkring 1960 blev erstattet af et nyt fag med navnet matematik. Opfindelse af mængdebegrebet bevirkede, at alle begreber kunne vendes på hovedet, og defineres ud fra matematikken selv i stedet for ud fra sine rødder i omgivelserne. Altså kunne man nu definere begreber som eksempler på abstraktioner i stedet for som abstraktioner fra eksempler. Således blev en regneformel nu forvandlet til en funktion, der defineres som et eksempel på en mængderelation med den egenskab, at førstekomponent-identitet medfører andenkomponent-identitet. Med sin selvreference blev matematikken forvandlet fra at være en ’MangeMatik’, der oplyste om former og størrelser i sin omverden til en ’ MetaMatik’ som kun beskriver sig selv. Og som bliver til ’MetaMatisme’ med påstande, som er sande i, men ikke udenfor klasseværelset, som f.eks. brøkparadokset, der hævder at 1/2 + 2/3 er 7/6 til trods for, at 1 rød af 2 æbler plus 2 røde af 3 æbler giver 3 røde af 5 æbler og aldrig kan give 7 røde af 6 æbler.

Bruddet med sine rødder skabte store læringsproblemer, og metamatismen måtte derfor genskabe forbindelsen, men ’rødder’ kaldtes nu ’modeller’ eller ’tillempninger’. For med betegnelsen ’matematikmodeller’ kunne man forsat hævde, at man skal lære matematikken, før man kan modellere med den. Så modeller blev kun et lag sukker, som skulle få pillen til at glide lettere ned. Og de nationale PISA-tal viser igen og igen, at læringsproblemet blot vokser i stedet for at falde.

Ønsker man at vende de faldende PISA-tal, kræver det to ændringer. Den selvrefererende metamatisme skal erstattes af mangematik, dvs. af den matematik, den selv erstattede, algebra og geometri som naturvidenskaber om det fysiske fænomen mange. Samtidig skal den tyskinspirerede linjeopdelte skole erstattes af en blokopdelt skole efter Nordamerikansk model.

Skolen skal formidle viden. Men viden kan opfattes på to måder, oppefra og nedefra. Striden om videns natur begyndte i antikkens Grækenland, hvor to grupper ytrede sig om viden, sophia på græsk.

Sofisterne mente, at for at praktisere demokrati, skal man oplyses om forskellen mellem natur og vedtægt for at undgå formynderi ved at vedtægt præsenteret som natur. Filosofferne mente, at vedtægt er illusion, da alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som kun kan ses af filosoffer uddannet på Platons akademi. Derfor skal demokrati erstattes af formynderi udført af filosoffer.

Den kristne kirke videreførte Platons formynderitanke i form af pastoralt formynderi, og omdannede akademierne til klostre, der efter reformationen blev omdannet til skolastiske universiteter.

Oplysningen fik comeback med Brahe og Newton. Brahe nedskrev planeternes bevægelse mellem stjernerne i tabeller, som dannede grundlag for Newtons påvisning af, at planeter ikke følger en metafysisk uberegnelig vilje, som paven ellers hævdede: Både månen og æblet falder mod jorden af egen fysisk vilje, som kan sættes på formel, og dermed forudsiges. Hermed skabtes oplysningens videnskabelige metode: Af laboratorieobservationer induceres hypoteser, som søges valideret gennem deducerede forudsigelser til testning gennem nye observationer.

Påvisningen af, at faldende ting følger egen vilje, førte til oplysningstiden: Når æbler følger egen vilje og ikke de to formyndere, Herren og Fyrsten, kan mennesker gøre det samme og etablere demokrati.

To demokratier blev indført, et i USA, som stadig har den første republik, og et i Frankrig, som nu har deres femte republik, væltet flere gange af de tyske naboer. Omkring 1810 førte fransk besættelse af Berlin til, at man i Preussen indså, at man også her måtte mobilisere befolkningen gennem uddannelse. Dette skabte det Humboldtske skolesystem baseret på Bildung, som har tre formål: Bildung må ikke oplyse, for så vil befolkningen forlange demokrati som i Frankrig. I stedet skal Bildung indpode en nationalfølelse, så befolkningen ser sig som et folk, de beskytter sin nationale identitet ved at bekæmpe andre nationer. Endelig skal Bildung gradvist udskille folkets elite til embeder i en ny stærk centraladministration, så den tidligere blod-adel kan erstattes af en ny videns-adel.

Efter Napoleonskrigene bredte den preussiske Bildung-skole sig til resten af Europa. I dag findes der således to forskellige skolesystemer. USA’s blokopdelte oplysningsskoler er indrettet på at afdække og udvikle den unges individuelle talent gennem daglige lektier i selvvalgte halvårsblokke. Har man succes, siger skolen ’good job, du har talent, du skal have mere’. Hvis ikke siger skolen ’good try, du har mod til at afprøve noget nyt, du kan nu afprøve mere nyt.’

EU's har linjeopdelte Bildungsskoler, som fører frem til forskellige embeder. Her tvinges de unge til at følge deres aldersgruppe og læse de samme lektier. Og efter det linjeopdelte gymnasium skal de vælge mellem et utal af ukoordinerede universitære linjer, hvoraf man hele tiden skal tilbage til start hvis man ønsjker at skifte linje. Og hvor kun de bedste kan få embede, medens resten må acceptere ufaglært arbejde eller underbetalte timelærerjobs.

Bildungsskolens effektivitet bygger især på bevarelse af metamatismen. Så ønsker man at skolen skal være for alle og ikke kun skal reproducere den herskende vidensadel, skal linjeopdeling erstattes af blokopdeling; og i matematik skal selvrefererende metamatisme erstattes af rodfæstet matematik

Den selvrefererende metamatisme fremstiller tal som eksempler på mængder og mængdeprodukter. Regningsarter som eksempler på funktioner, der selv fremstilles som eksempler på relationer, som selv er eksempler på mængdeprodukter. Vækstregning fremstilles som eksempler på forskellige funktionstyper: lineære, eksponentielle osv. Calculus fremstilles som et eksempel på et grænseværdibegreb.

Rodfæstet matematik beskriver tal som fremkommet ved 1., 2. og 3.ordens tælling. 1.ordens tælling giver ikoner, som indeholder lige så mange pinde som ikonet beskriver. 2.ordens tælling bundter og stakker i ikon-bundter. 3.ordens tælling bundter og stakker i tiere, der eneste tal med eget navn men uden egen ikon. Regningsarter forudsiger tælling: 3+5 = 8 forudsiger at videretælling fra 3 5 gange giver 8. 3*5 = 15 forudsiger at plusning med 3 5gange giver 15. 3^5 = 243 forudsiger, at gangning med 3 5 gange giver 243. Ligeledes er de modsatte regningsrater forudsigelser: Løsning af problemet 3+x=8 forudsiges af x=8-3, løsning af problemet 3*x=15 forudsiges af x=15/3, løsning af problemet 3^x = 243 forudsiges af x=log3(243), og løsning af problemet x^3 = 243 forudsiges af x = 3√(243). Endelig forudsiger integralregning svaret på spørgsmål som ’3 sekunder á 5m/s voksende jævnt til 6m/s giver total hvor mange meter?’. Dvs. både tal og regningsarter er opbygget som modeller af Mange og behovet for at forene eller opdele Mange.

Tal kan være styktal og pertal. Tal kan være konstante og variable. Og variable tal kan have konstant variation, forudsigelig eller uforudsigelig variation. Vækstregning fremstiles som forudsigelse af forskellige vækstformer: konstant væksttal, konstant vækstprocent, konstant voksende væksttal mv. Calculus vedrører ikke-konstant forudsigelig vækst og fremstiles som opsamling af per-tal til totaler, samt opdeling af totaler til per-tal. Endelig omhandler statistik uforudsigelig vækst.

Postmoderne matematik

Det postmoderne har efterhånden bredt sig inden for alle områder. Og påvist, at det vi troede var natur, i virkeligheden er vedtægter. Med den konsekvens, at alt efterhånden har vist sig at være sociale konstruktioner, der kunne være anderledes. Og som dermed opfordrer til eventuel destruktion og rekonstruktion, dvs. til den dekonstruktion, der er et af det postmodernes kernebegreber.

Matematikkens hovedområder er geometri og algebra. Geometri er græsk for jord-måling, så geometri har ikke skabt sig selv, det har behovet for at opdele og opmåle den jord, vi lever på og af. Algebra er et arabisk ord, hvis betydning skjules af faget, men som ganske enkelt betyder genforening af tal. Hvilket giver god mening, da tal netop kan både forenes og opdeles: Ved indkøb er totalen en forening af de enkelte varer, som omvendt fremstår ved at opdele totalen, både hvis varerne er forskellige og ens. Så opsamlingsteknikkerne plus og gange samt opdelingsteknikkerne minus og division har ikke skabt sig selv, de er skabt af handel.

Men tallene er vel naturlige? I hvert fald præsenteres tal som 8, 9, 10, 11 som naturlige tal. Men er de i virkeligheden 'pastorale' vedtægter, der skjuler deres naturlige alternativer? Svaret fås ved dekonstruktion: Glem at tallene eksisterer og konstruer dem på ny. Kort sagt, hvordan ser matematikken ud opbygget som en naturvidenskab, der beskriver det naturlige faktum MANGE?

At sætte tal på MANGE kan ske ved tælling eller hurtigere ved regning. MANGE kan f.eks. være en bunke tændstikker. Udtages fire, kan de placeres som en ikon, der indeholder de fire tændstikker, 4. Så cifrene indtil ti er blot ikoner indeholdende det beskrevne antal, og ofte skrevet sjusket. Romerne brugte ikonet X for ti, vi bruger i stedet et tocifret tal 10, som skolen påstår er efterfølgeren til ni.

Tocifrede tal skyldes, at totaler optælles ved bundtning og stakning. Først bundtes totalen T i f.eks. 5ere, der så stakkes til måske 3 5-bundter og 2 ubundtede: $T = 3*5 + 2$, eller som decimaltal: T = 3.2 5ere, hvor decimaltegnet adskiller bundter fra ubundtede.

Ved 5-bundtning bliver tælleremsen 1, 2, 3, 4, bundt, bundt&1, bundt&2, osv. Eller med decimaltal: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.1, 1.2 osv. Naturlige tal er derfor decimaltal forsynet med enhed. Og ikonet for den valgte bundtstørrelse bruges aldrig. Derfor bruges ti-ikonet ikke ved ti-bundtning, hvor man burde tælle 8, 9, bundt, bundt&1 osv. Ved ti-bundtning er 10 efterfølger til ni, men ved fem-bundtning er 10 efterfølger til fire og efterfølgeren til ni er 20, da ni er 14.

Så skønt fremstillet som et naturligt tal, er 32 det modsatte, et pastoralt formynderi, som skjuler sine naturlige alternativer: 3.2 tiere, 3.5 niere, 4.0 ottere osv. Der er altså intet naturligt ved naturlige tal, som dels undlader enheden, og dels fejlplacerer decimaltegnet.

Ved regningsarterne angives den 'naturlige' rækkefølge at være plus, minus, gange og division. Igen viser denne rækkefølge sig at være pastoral, hvor den omvendte rækkefølge er den naturlige:

Optælling i 3ere sker ved at udtage 3-bundter. Udtagning af 3 én gang ikoniseres som T-3, hvilket fører til minus, $7-3 = 4$. Gentaget udtagning af 3 ikoniseres som T/3, hvilket fører til division: $6/3 = 2$. Opstakning af 2 3-bundter ikoniseres som 2x3, hvilket fører til gange. Opstakning af 2 ubundtede ikoniseres som +2, hvilket fører til plus. Ombundtning består altså af gentaget udtagning af f.eks. 5ere, der så stakkes. Eller som formel: $T = (T/5)*5$. Omstakning anbringer toppen af én stak i en ny stak ved siden af: $T = (T-5)+5$.

To stakke som 2.3 4ere og 1.2 5ere kan forenes på to måder, lodret eller vandret. Ved lodret forening skal enhederne være ens, f.eks. skal de 2.3 4ere ombundtes til 5ere. Dette kan gøres manuelt, eller forudsiges med de to formler: T = 2.3 4ere = $2*4+3 = ((2*4+3)/5)*5 = 2.?*5$, dvs. $(T-2*5)+2*5 = (2*4+3-2*5)+2*5 = 2.1*5$.

Enhederne var her 4ere og 5ere, men de kunne også være pund og dollar. Så ombundtningsformlens pastorale betegnelse 'proportionalitet' burde dekonstrueres til 'ombundtning', $T = (T/b)*b$.

Ved vandret forening anbringes de to stakke ved siden af hinanden som 9ere: T = 2.3 4ere + 1.2 5ere = 2.0 9ere, et resultat der igen fås manuelt eller forudsiges ved de to formler.

Vandret forening af stakke bruges ved forening af per-tal, f.eks. ved blandingsregning, hvor 3 kg á 4kr/kg blandes med 5kg á 6kr/kg til 8 kg á $(3*4+5*6)/8 = 5.25$ kr/kg, hvorfor fagets pastorale betegnelse 'integralregning' burde dekonstrueres til 'vandret forening' eller 'plusning af per-tal'.

Matematikkens tre hovedområder, forudsigende formler og proportionalitet og integralregning, vokser altså naturligt ud af forening af to naturlige tal beskrevet som stakke. Dog ikke hvis man kun tillader ti-bundtning, og derfor aldrig har brug for at ombundte eller at forene vandret.

Proportionalitet: Linaritet eller pertal

Formler af typen y = k*x er meget almindelige i algebra, geometri, økonomi, fysik og andre videnskaber. Denne formel er derfor central i matematikundervisningen, hvor den kan indføres på to forskellige måder, ovenfra eller nedenfra.

Den moderne tradition vælger oppefra. Først anføres, at x og y er proportionale, hvis de er forbundet af formlen y = k*x, hvor k er en konstant. Dernæst vises, hvordan proportionalitet er et eksempel på eller anvendelse af det mere abstrakte begreb lineær funktion, som igen er et eksempel på en funktion, som er et eksempel på en relation, som er et eksempel på et mængdeprodukt, som er et eksempel på en mængde.

Dvs. først defineres en mængde som en samling af veldefinerede objekter. Så defineres mængdeproduktet AxB af mængderne A og B som mængden af ordnede elementpar (a,b) hvor a og b er elementer i A og B. Så defineres en relation mellem mængderne A og B som en delmængde af produktmængden AxB. Så defineres en funktion f mellem to mængder A og B som en relation, hvor førstekomponentsidentitet medfører andenkomponentsidentitet, dvs. hvis a = b, så er også f(a) = f(b). Så kan en lineær funktion defineres som en funktion f, der opfylder kravet f(r+s) = f(r)+f(s). Så kan bevises en sætning: Funktionen f(x) = k*x, hvor k er en konstant er en lineær funktion fra mængden af de reelle tal til sig selv. Endelig kan proportionalitet y =k*x fremstilles som en anvendelse eller et eksempel på begrebet linaritet, idet f(x) her blot betegnes som y.

Samtidig defineres en lineær funktion som f(x) = b+a*x, hvor b og a er konstanter, til trods for at denne ikke overholder kravet, idet f(r+s) = b+a*(r+s) = b + ar + as, og f(r) + f(s) = 2b + ar + as.

Den moderne matematik løber derfor ind i to paradokser: 1. Den lineære funktion er ikke nødvendigvis lineær. 2. En mængde er ikke nødvendigvis en mængde, som vist af Russels paradoks:

Hvis M = {x|non(x€x)}, så x€M ↔ non(x€M).

Et postmoderne alternativ til moderne matematik, der definerer sine begreber oppefra som eksempler på abstraktioner, er at gøre det modsatte, dvs. at definere begreber nedefra som abstraktioner fra eksempler. Herved respekteres, at matematik historisk er opstået som en naturvidenskab, der udforsker der naturlige faktum MANGE. En given total T kan optælles ved bundtning og stakning, og beskrives med et naturligt tal som er et decimaltal, forsynet med en enhed, hvor decimaltegnet adskiller bundter og ubundtede. Således kan en total på 4 5ere omtælles eller ombudtes til andre bundtstørrelser: T = 4 5ere = 3.2 6ere = 2.6 7ere osv.

Da tal altid bærer enheder, er der ofte brug for at omtælle eller ombundte fra én enhed til en anden, f.eks. fra cm til meter, hvor sammenhængen mellem de to enheder udtrykkes ved et pertal 1m/100cm. Skal 235 cm omtælles til meter, bliver meter-tallet y = (1m/100cm)*230cm = 2.3m = k*x. Formlen y = k*x udtrykker således en ombundtning eller omtælling fra én enhed til en anden, dvs. et enhedsskift.

Enhedsskift optræder allerede i første klasse, hvor en total på 4 5ere kan ombudtes til andre bundtstørrelser. Rent fysisk foretages en optælling i 7-bundter ved at fjerene 7ere gentagne gange. Resultatet kan derfor forudsiges af en formel, der indeholder division og gange: T ombundtes til b'ere ved at fjerne b'ere T/b gange: T = (T/b)*b. Denne omtællingsformel har netop samme form som enhedsskiftformlen y = k*x.

Enhedsskift forekommer overalt i naturen, i fysik udtrykker de fleste formler enhedsskift. En bjælke kan eksempelvis optælles i både meter og kg. Enhedsskift forudsætter kendskab til et pertal, f.eks. 2m/3kg, der udtrykker et eksempel på en omtælling, hvor 2 meter gav 3 kg. Skal 12 meter omtælles til kg, optælles 12 først i 2ere: T = 12m = (12/2)*2m = (12/2)*3kg = 18 kg. Eller T = 15kg = (15/3)*3kg = (15/3)*2m = 10m.

Et specielt pertal er procenter, hvor man desværre udelader enheden og skriver 30% i stedet for 30kr/100kr. Med omtællingsformlen T = (T/b)*b kan rabatten på f.eks. 750kr findes ved at omtælle de 750kr i 100ere:

750kr = (750/100)*100kr = (750/100)*30kr = 225kr.

Tilsvarende kan pertallet 30kr/40kr let omregnes til procent ved at omtælle 100 i 40ere:

100kr = (100/40)*40kr = (100/40)*30kr = 75kr, dvs. 30kr/40kr = 75kr/100 kr.

Enhedsskift eller omtælling eller proportionalitet findes overalt i matematikken: I en rektangel delt af en diagonal omtælles højden a og længden b og i diagonalen c: a = sinA*c, b = cosA*c. I differentialregning omtælles y-tilvækst dy til x-tilvækster dx: dy = (dy/dx)*dx = y'*dx. Osv.

Den naturlige måde til indlæring af proportionalitet er således at respektere dens fysiske rødder, behovet for omtælling i forbindelse med enhedsskift. En sådan fremgangsmåde bruges naturligt, hvis matematik indføres som den opstod historisk, altså som en naturvidenskab til udforskning af det naturlige faktum MANGE.

1DigitMath: Matematik som naturvidenskab

Matematikkens hovedområder hedder geometri og algebra. Geometri er græsk for jord-måling, så geometri er skabt af behovet for at opdele og opmåle den jord, vi lever på og af. Algebra er arabisk for genforening af tal: Ved indkøb er totalen en forening af de enkelte varer, som omvendt fremstår ved at opdele totalen, både hvis varerne er forskellige og ens. Så opsamlingsteknikkerne plus og gange samt opdelingsteknikkerne minus og division er skabt af handel.

At sætte tal på mange kan ske ved tælling eller hurtigere ved regning. Mange kan f.eks. være en bunke tændstikker. Udtages fire, kan de placeres som en ikon, der indeholder de fire tændstikker, 4. Så cifrene indtil ti er blot ikoner indeholdende det beskrevne antal, og ofte skrevet sjusket. Romerne brugte ikonet X for ti, vi bruger i stedet et tocifret tal 10, som skolen påstår er efterfølgeren til ni.

Tocifrede tal skyldes, at totaler optælles ved bundtning og stakning. Først bundtes totalen T i f.eks. 5ere, der så stakkes til måske 3 5-bundter og 2 ubundtede: T = 3*5 + 2, eller som decimaltal: T = 3.2 5ere, hvor decimaltegnet adskiller bundter fra ubundtede.

Ved 5-bundtning bliver tælleremsen 1, 2, 3, 4, bundt, bundt&1, bundt&2, osv. Eller med decimaltal: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.1, 1.2 osv. Naturlige tal er derfor decimaltal forsynet med enhed. Og ikonet for den valgte bundtstørrelse bruges aldrig. Derfor bruges ti-ikonet ikke ved ti-bundtning, hvor man burde tælle 8, 9, bundt, bundt&1 osv. Ved ti-bundtning er 10 efterfølger til ni, men ved fem-bundtning er 10 efterfølger til fire og efterfølgeren til ni er 20, da ni er 14.

Så skønt fremstillet som et naturligt tal, er 32 det modsatte, et pastoralt tal, som skjuler sine naturlige alternativer: 3.2 tiere, 3.5 niere, 4.0 ottere osv. Der er altså intet naturligt ved naturlige tal, som dels undlader enheden, og dels fejlplacerer decimaltegnet.

Ved regningsarterne angives den 'naturlige' rækkefølge at være plus, minus, gange og division. Igen viser denne rækkefølge sig at være pastoral, hvor den omvendte rækkefølge er den naturlige:

Optælling i 3ere sker ved at udtage 3-bundter. Udtagning af 3 én gang ikoniseres som T-3, hvilket fører til minus, 7-3 = 2. Gentaget udtagning af 3 ikoniseres som T/3, hvilket fører til division: 6/3 = 2. Opstakning af 2 3-bundter ikoniseres som 2x3, hvilket fører til gange. Opstakning af 2 ubundtede ikoniseres som +2, hvilket fører til plus.

5-bundtning består altså af gentaget udtagning af 5ere, der så stakkes. Eller som formel: T = (T/5)*5. Dobbelt-stakning anbringer toppen af én stak i en ny stak ved siden af: T = (T-5)+5.

To stakke som 2.3 4ere og 1.2 5ere kan forenes på to måder, lodret eller vandret. Ved lodret forening skal enhederne være ens, dvs. de 2.3 4ere skal ombundtes til 5ere. Dette kan gøres manuelt eller forudsiges med de to formler: T = 2.3 4ere = 2*4+3 = ((2*4+3)/5)*5 = 2.?*5, dvs. (T-2*5)+2*5 = (2*4+3-2*5)+2*5 = 2.1*5

Enhederne var her 4ere og 5ere, men de kunne også være pund og dollar. Så ombundtningsformlens pastorale betegnelse 'proportionalitet' burde dekonstrueres til 'ombundtning', T = (T/b)*b.

Ved vandret forening anbringes de to stakke ved siden af hinanden som 9ere: T = 2.3 4ere + 1.2 5ere = 2.0 9ere, et resultat der igen fås manuelt eller forudsiges ved de to formler.

Vandret forening af stakke bruges ved forening af per-tal, f.eks. ved blandingsregning, hvor 3 kg á 4kr/kg blandes med 5kg á 6kr/kg til 8 kg á (3*4+5*6)/8 = 5.25 kr/kg, hvorfor fagets pastorale betegnelse 'integralregning' burde dekonstrueres til 'vandret forening' eller 'plusning af per-tal'.

Matematikkens tre hovedområder, forudsigende formler og proportionalitet og integralregning, vokser altså naturligt ud af forening af to naturlige tal beskrevet som stakke. Dog ikke hvis man kun tillader ti-bundtning, og derfor aldrig har brug for at ombundte eller at forene vandret.

Så matematik bliver 'pastoral' ved at skjule, at man naturligvis kan bundte i forskellige enheder. Og ved at underkaste elever 12 års belæring om 'naturlige' tal, om at efterfølgerne til ni 'naturligvis' er 10, om den 'naturlige' rækkefølge af regningsarterne, om den 'uundværlige' proportionalitet og integralregning. En belæring, der langsomt men sikkert får eleverne til at miste lysten til at lære matematik.

Alternativet til pastoral matematik er naturlig matematik opbygget som en naturvidenskab, der beskriver totaler ved bundtning og stakning, og som indfører formler og proportionalitet og integralregning allerede i første klasse, før der indføres tocifrede tal. Og som let læres af alle.

Modellere med eller skabe matematik

Relationen mellem matematik og dens omverden kan anskues på to forskellige måder, ovenfra og nedenfra.

Moderne matematik ser relationen ovenfra: Matematik er ren tænkning udledt af aksiomer og logik. Matematik behøver ikke relateres til den konkrete omverden, men det er et ekstra kvalitet, at den har så talrige relationer i form af anvendelser og modeller. Faktisk forudsætter det moderne samfund eksistensen af matematik, som anvendes i stadig nye sammenhænge. Derfor bør matematikmodellering også indgå i matematikundervisningen. Dog først efter, at matematikken er lært, for anvendelse af matematik forudsætter naturligvis, at man kender den matematik, der skal anvendes. I tilfælde af tidsnød kan anvendelser overlades til de fag, som er afhængig af matematik, f.eks. fysik og økonomi.

Postmoderne matematik ser relationen nedenfra. Matematik er vokset ud af den konkrete verden gennem abstraktioner. Matematik har sine rødder og er dermed grounded i den konkrete omverden: Matematikkens hovedområder hedder geometri og algebra. Geometri er græsk for jord-måling, så geometri er skabt af behovet for at opdele og opmåle den jord, vi lever på og af. Algebra er arabisk for genforening af tal: Ved indkøb er totalen en forening af de enkelte varer, som omvendt fremstår ved at opdele totalen, både hvis varerne er forskellige og ens. Så opsamlingsteknikkerne plus og gange samt opdelingsteknikkerne minus og division er skabt af handel.

Moderne matematik beskriver tal og regningsarter som eksempler på mængder. De naturlige tal frembringes med et efterfølger-princip. De øvrige tal fremstilles som ækvivalensklasser i mængdeproduktet af naturlige tal med sig selv. Hele tal: (a,b)≈(c,d) hvis a+d=b+c. Rationelle tal: (a,b)≈(c,d) hvis a*d=b*c. Regningsarter fremstilles som funktioner fra et mængdeproduktet af en talmængde til sig selv.

Postmoderne matematik beskriver tal som fremkommet ved 1., 2. og 3.ordens tælling. 1.ordens tælling giver ikoner, som indeholder lige så mange pinde som ikonet beskriver. 2.ordens tælling bundter og stakker i ikon-bundter. 3.ordens tælling bundter og stakker i tiere, der eneste tal med eget navn men uden egen ikon. Regningsarter forudsiger tælling: 3+5 = 8 forudsiger at videretælling fra 3 5 gange giver 8. 3*5 = 15 forudsiger at plusning med 3 5gange giver 15. 3^5 = 243 forudsiger, at gangning med 3 5 gange giver 243. Ligeledes er de modsatte regningsrater forudsigelser: Løsning af problemet 3+x=8 forudsiges af x=8-3, løsning af problemet 3*x=15 forudsiges af x=15/3, løsning af problemet 3^x = 243 forudsiges af x=log3(243), og løsning af problemet x^3 = 243 forudsiges af x=3V(243). Endelig forudsiger integralregning svaret på spørgsmål som 3 sekunder á 5m/s voksende jævnt til 6m/s. Dvs. både tal og regningsarter er opbygget som modeller af MANGE og behovet for at forene eller opdele MANGE.

Nye læreplaner påtvinger moderne matematik til at inddrage matematikmodellering. I stedet for at respektere den historisk relation mellem matematik og dens konkrete omverden, forsøger den moderne matematik at sløre den ved at fremstille den med et lineært rutediagram.

Postmoderne matematik respekterer, at der ved matematikmodellering altid vil være 2X2 modsætninger, modsætningen mellem den konkrete verden og modellen, og modsætning mellem problem og løsning. Derfor vil modellering omfatte fire faser i cyklisk forbindelse: et problem fra den konkrete verden giver anledning til et abstrakt modelproblem, der søges løst, hvorefter løsningen oversættes til en løsning af det konkrete problem, og til sidst vurderes om løsningen er til fredsstillende eller der skal ske modifikationer. Denne fire-fasede cykliske proces illustrerer også, hvordan matematikken selv er skabt som model for sin omverden.

	Problem		Løsning
Abstrakt model		→	
	↑		↓
Konkret verden		←	

Striden om verden skal forstås oppefra eller nedefra går tilbage til antikkens Grækenland, hvor sofisterne påpegede, at oplyses folket om forskellen mellem natur og vedtægt, vil det undgå formynderi, der præsenterer vedtægt som natur. Modsat hævdede filosofferne, at alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som kun kan ses af personer uddannet på Platons akademi. Folket skal derfor ikke oplyses, men acceptere filosoffernes formynderi. Først omkring år 1700 lykkes det naturvidenskaben at påvise, at laboratoriet har forrang for biblioteket, og at der fra laboratoriets data kan induceres formler, der kan bruges til at deducere forudsigelser til testning. Så matematik er historisk opstået som et formelsprog til forudsigelse af omverdenshændelser. Men opfindelsen af mængdebegrebet løsrev matematikken sig fra sine rødder, som i stedet præsenteres som dens anvendelser. Den moderne matematik beskytter således sin diskurs ved begrebstvang: Hvad der burde kaldes skabelse af matematik kaldes i stedet anvendelse af matematik.

hvilket fører til plus. Ombundtning består altså af gentaget udtagning af f.eks. 5ere, der så stakkes. Eller som formel: T = (T/5)*5. Omstakning anbringer toppen af én stak i en ny stak ved siden af: T = (T-5)+5.

To stakke som 2.3 4ere og 1.2 5ere kan forenes på to måder, lodret eller vandret. Ved lodret forening skal enhederne være ens, f.eks. skal de 2.3 4ere ombundtes til 5ere. Dette kan gøres manuelt, eller forudsiges med de to formler: T = 2.3 4ere = 2*4+3 = ((2*4+3)/5)*5 = 2.?*5, dvs. (T-2*5)+2*5 = (2*4+3-2*5)+2*5 = 2.1*5.

Enhederne var her 4ere og 5ere, men de kunne også være pund og dollar. Så ombundtningsformlens pastorale betegnelse 'proportionalitet' burde dekonstrueres til 'ombundtning', T = (T/b)*b.

Ved vandret forening anbringes de to stakke ved siden af hinanden som 9ere: T = 2.3 4ere + 1.2 5ere = 2.0 9ere, et resultat der igen fås manuelt eller forudsiges ved de to formler.

Vandret forening af stakke bruges ved forening af per-tal, f.eks. ved blandingsregning, hvor 3 kg á 4kr/kg blandes med 5kg á 6kr/kg til 8 kg á (3*4+5*6)/8 = 5.25 kr/kg, hvorfor fagets pastorale betegnelse 'integralregning' burde dekonstrueres til 'vandret forening' eller 'plusning af per-tal'.

Matematikkens tre hovedområder, forudsigende formler og proportionalitet og integralregning, vokser altså naturligt ud af forening af to naturlige tal beskrevet som stakke. Dog ikke hvis man kun tillader ti-bundtning, og derfor aldrig har brug for at ombundte eller at forene vandret.

Matematik: oplysning eller bildung

Viden kan opfattes på to forskellige måder, oppefra og nedefra. Striden om videns natur begyndte i antikkens Grækenland, hvor to grupper ytrede sig om viden, sophia på græsk.

Sofisterne mente, at skal folket praktisere demokrati, skal det oplyses om forskellen mellem natur og vedtægt for at undgå formynderi ved at vedtægt præsenteret som natur. Filosofferne mente, at vedtægt er illusion, da alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som kun kan ses af filosoffer uddannet på Platons akademi.

Den kristen kirke videreførte Platons formynderitanke i form af pastoralt formynderi, og omdannede akademierne til klostre, der siden med reformationen blev omdannet til skolastiske universiteter.

Oplysningen fik comeback med Brahe og Newton. Brahe nedskrev planeternes bevægelse mellem stjernerne i tabeller, so dannede grundlag for Newtons påvisning af, at planeter ikke følger en metafysisk uberegnelig vilje: Både månen og æblet falder mod jorden af egen beregnelig vilje, som kan sættes på formel, og dermed forudsiges. Hermed skabtes oplysningens videnskabelige metode: Af laboratorieobservationer induceres hypoteser, som søges valideret gennem deducerede forudsigelser til testning gennem nye observationer.

Påvisningen af, at faldende ting følger egen vilje, førte til oplysningstiden: Når æbler følger egen vilje og ikke de to formyndere, Herren og Fyrsten, kan mennesker gøre det samme og etablere demokrati. To blev installeret, et i USA, som stadig har der første republik, og et i Frankrig, som nu har deres femte republik, væltet flere gange af de tyske naboer. Omkring 1810 førte fransk besættelse til at Preussen indførte en stærk centraladministration, og til det Humboldtske skolesystem baseret på Bildung, som har to formål: Bildung skal modvirke oplysning så kun eliten udskilles til centraladministrationens embeder, og Bildung skal vække folkets nationalfølelse. Den preussiske Bildung bredte sig hurtigt til resten af EU. Og modsiges kun af fransk poststrukturel tænkning, som advarer mode pastorale ord, sætninger og frelserinstitutioner.

I dag findes således to forskellige skolingssystemer: USA’s blokopdelte oplysningsskoler, hvor så mange som muligt skal oplyses så meget som muligt. Og EU's linjeopdelte Bildungsskoler, hvor kun de bedste kan gå videre til universitetsforskolerne, Humboldtgymnasiet, hvoraf kun de bedste kan gå videre til universiteternes utal af ukoordinerede linjer, hvoraf kun de bedste kan bestå, hvoraf kun de bedte kan får embede, medens resten må accepter ufaglært arbejde leer underbetalte timelærerjobs.

Også matematik har to former. Moderne pastoral matematik oppefra ser matematik som eksempler på metafysiske former. Postmoderne oplysende matematik nedefra respekterer, at geometri og algebra, begge har fysiske rødder, idet geometri betyder jordmåling på græsk, og algebra betyder genforening af tal på arabisk. Dvs. matematik var en naturvidenskab, som udforsker det naturlige faktum mange, og hvis evne til at forudsige tal med formler grundlagde oplysningens videnskabelige metode. Indtil opfindelsen af mængdebegrebet vendte matematikken på hovedet, så matematik blev METAmatik, der præsenterer sine begreber oppefra som eksempler af abstraktioner, i stedet for nedefra som abstraktioner fra eksempler.

Oplysende matematik fremstiller tal som ikoner, som indeholder det antal streger, ikonet beskriver, og hvor flercifrede tal viser tælleresultat som stakkede bundter. Regningsarterne fremstilles som forudsigelser af tælleresultater. Vækstregning fremstiles som forudsigelse af forskellige vækstformer: konstant vækstal, konstant vækstprocent, konstant voksende vækstal mv. Calculus fremstiles som opsamling af per-tal til totaler, og opdeling af totaler til per-tal. Oplysende matematik oplyser om omverden. Tal kan være styktal og pertal. Tal kan være konstante og variable. Og variable tal kan have konstant variation, forudsigelig eller uforudsigelig variation.

Den pastorale METAmatik fremstiller tal som eksempler på mængder og mængdeprodukter. Regningsarter som eksempler på funktioner, der selv fremstilles som eksempler på relationer, som selv er eksempler på mængdeprodukter. Vækstregning fremstilles som eksempler på forskellige funktionstyper: lineære, eksponentielle osv. Calculus fremstilles som et eksempel på et grænseværdibegreb. Med sin reference til mængdeproduktet oplyser den pastorale METAmatik ikke om sin omverden, kun om sig selv.

I oplysningsskolen er matematik opdelt i blokke, som afsluttes hver for sig: Introduktion to algebra, intermediate algebra, further algebra, geometry, trigonometry, statistics, propability, precalculus, two varibale calculus, many varibale calculus etc. I Bildungsskolen er disse blokke integreret og eksamen kan kun aflægges en gang, så kun elever med de bedtse karakterer kan udskilles til videregående uddannelse.

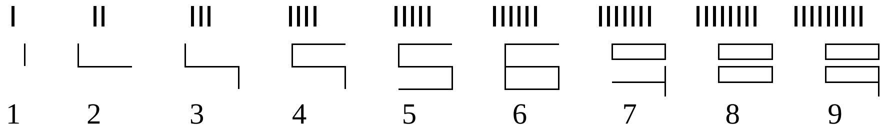
Matematikken er således et af de vigtigste fag i striden om videns natur. Skal formynderi erstattes af oplysning, skal pastoral METAmatik erstattes af oplysnede matematik.

Bedre PISA-tal i førskolen

Krisen i den svenske matematikundervisning kan skyldes en mål-middel ombytning, hvor matematik er mål i stedet for et middel til målet: at kunne håndtere omverdens-fænomenet Mange.

Matematik som en Naturvidenskab om mange

At spørge ’hvor mange’ besvares ved at tælle og regne. Vi tæller ved at bundte og stakke. Vi ikoniserer fem ved at samle fem enere til én femmer, som omplaceres som et fem-ikon 5 med fem pinde, hvis skrevet på en mindre sjusket måde. Vi skaber ikoner indtil ti, da vi ikke har brug for et ikon for det, vi bundter i: når vi tæller i femmere, siger vi: en, to, tre, fire, bundt, én bundt én, én bundt to osv



Vi tæller ved at bundte i ikon-bundter (ikon-tælling). Således kan en total T på 7 1ere bundtes i 3ere som T = 2 3'ere og 1. Ved at placere 2 pinde i en venstre bundt-kop og 1 pind i en højre enkelt-kop kan vi skrive totalen på ’algebra-form’. Kop-indholdet kan nu beskrives som et ikon, først ved hjælp af 'kop-skrivning’ 2) 1), så med ’decimal-skrivning’ med et komma til at adskille bundter fra ubundtede, og med enheden 3ere, T = 2.1 3ere.

Alternativt kan vi bruge plastik bogstaver, B for et bundt og C for et bundt af bundter.

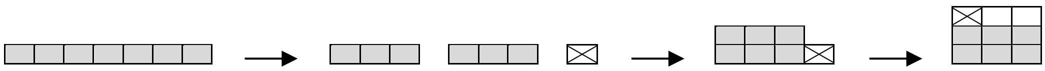
IIIIIII → III III I → II) I) → 2)1) → 2.1 3s eller BBI → 2BI

En lommeregner kan forudsige et optællingsresultat. Vi tæller i 3ere ved at fjerne 3ere, ikoniseret som '/3', der viser kosten, som fejer 3ere væk flere gange. Opbygning af en stak af 2 3ere ikoniserer vi som ’2x3’, der viser en donkraft til at løfte 3eren. Og '-2x3’ ikoniserer det spor, der kommer ved at fjerne 2 3s for at se efter ubundtede. Disse tre operationer kaldes division, multiplikation og subtraktion hhv. Indtastes ’7/3’ er svaret ’2.noget’. For at finde de ubundtede fjernes de 2 3s ved at spørge '7 - 2x3’. Af svaret '1' kan vi konkludere, at 7 = 2.1 3ere.

7/3	2.some
7 – 2 * 3	1

En total T optælles således en i 3ere ved at fjerne 3 T/3 gange. Dette kan skrives som en 'omtællings-formel ’T = (T/3)*3’ eller som ’T = (T/b)*b hvis omtæller T i b’ere. At fjerne en stak b og placere den ved siden af de ubundtetde T-b kan skrives som en omstaknings-formel ’T = (T-b) + b’.

For at skrive totalen på 'geometri-form’ bruger vi firkanter eller LEGO-blokke eller en kugleramme til at stable 2 3-bundter oven på hinanden med en ekstra stak af ubundtede 1ere ved siden af eller oven på, og derved beskrive totalen som et decimaltal 2.1 3ere, eller som en brøk 2 1/3 3ere ved at optælle den ubundtede 1 i 3s.



T = 7 = 2 3s & 1 = 2.1 3s = 2 1/3 3s

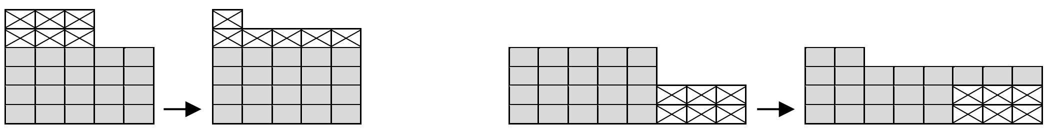
Dobbelt-tælling skaber per-tal til at forbinde enheder

En fysisk størrelse kan optælles i forskellige enheder, fx som 4 kg eller som 5 $. Dette skaber ’per-tallet’ '4 kg/5 $ = 4/5 kg/$. Vi skifter mellem enheder ved at omtælle i den del af per-tallet, der har den samme enhed:

7 kg = ? $	8 $ = ? kg
7 kg = (7/4) * 4 kg = (7/4) * 5 $ = 8.75 $	8 $ = (8/5) * 5 $ = (8/5) * 4 kg = 6.4 kg

Addere Totaler

Optalte totaler kan adderes vertikalt eller horisontalt. For at adderes vertikalt skal enhederne gøres ens ved at omtælle en total i den anden total enhed. At addere totaler horisontalt kaldes at integrerer dem.



Vertikalt: 4 5ere + 2 3ere = 5.1 5ere Horisontalt: 4 5ere + 2 3ere = 3.2 8ere

At addere ved siden af bruges til at addere stykkevis konstante per-tal

4 kg til 5 $/kg + 2 kg til 3 $/kg = (4*5 + 2*3) $ = Σ (mængde*per-tal)

Eller til at addere lokalt konstante (kontinuerte) per-tal:

6 kg til 5 $/kg faldende til 3 $/kg = $\int_0^6 (5 + \frac{3-5}{6} u)\, du$

Omvendt Addition eller ligningsløsning

Ved omvendt addition spørges fx '2 +? = 8'. Omstakkes 8 som (8-2) +2 fås svaret 8-2. Ved omvendt multiplikation spørges fx '2*? = 8'. Omtælles 8 i 2ere som (8/2)*2 fås svaret 8/2. Vi ser, at ligninger løses ved at overflytte tal til den modsatte side med det modsatte fortegn.

Vertikalt		Horisontalt
2 + ? = 8 = (8-2) + 2	**2 * ? = 8** = (8/2) * 2	**2 3s + ? 5s = 3 8s**
? = 8-2	? = 8/2	? = (3 8s – 2 3s)/5

Ved omvendt horisontal addition spørges fx '2 3'ere +? 5s = 3 8s'. For at finde det, der blev tilføjet, fjernes de 2 3ere og resten optælles i 5ere. Subtraktion og division kombineret på denne måde kaldes omvendt integration eller differentiation.

Algebra-projektet: De fire måder at addere

Algebra betyder 'at genforene' på arabisk, og 'Algebra-firkanten' viser, at med variable og konstante styk-tal og per-tal er der fire måder at forene tal til en total, og fem måder at opdele en total: Addition/subtraktion forener/opdeler-i variable styk-tal. Multiplikation/division forener/opdeler-i konstante styk-tal. Potens/rod & logaritme forener/opdeler-i konstant per-tal. Og integration/differentiation forener/opdeler-i i variable per-tal.

Forener/*opdeler i*	Variable	Konstante
Styk-tal	**T = a + n**, *T – a = n*	**T = a * n**, *T/n = a*
Per-tal	**T = ∫ a dn**, *dT/dn = a*	**T = a^n**, *loga(T) = n, n√T = a*

Skolen tæller kun i tiere og skriver 2.3 tiere som 23 uden enhed og med fejlplaceret kommaet. Derfor skal ikon-optælling foregå i førskolen. Udskrives 345 som 3*10 ^ 2 + 4*10 + 5*1, dvs. som tre horisontale blokke placeret, ses igen, at der er fire måder at forene tal på, og at alle tal har enheder.

Råd til førskolen

1. Lad børnene opbygge ikoner for tallene 1-9 med pinde, dukker, skeer, osv.

2. Lad børnene optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af algebra-metoden.

3. Lad børnene optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af geometri metoden-metoden.

4. Som 2 og med brug af en IKEA kugleramme.

5. Som 3 og med brug af en IKEA kugleramme.

4. Som 2 og med brug af en lommeregner til at forudsige resultatet.

5. Som 3 og med brug af en lommeregner til at forudsige resultatet.

6. Adder 2 3ere og 4 5ere vertikalt med brug af algebra-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

7. Adder 2 3ere og 4 5ere vertikalt med brug af geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

8. Adder 2 3ere og 4 5ere horisontalt med brug af algebra-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

9. Adder 2 3ere og 4 5ere horisontalt med brug af geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

10. Løs ligningen 2+? = 8, 2*? = 8 og 2*3 + ?*5 = 3*8

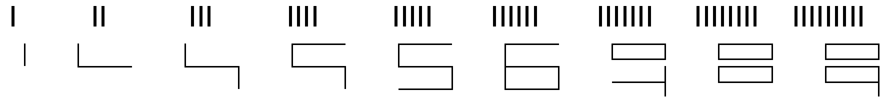
Materiale: http://mathecademy.net/preschool/icon-mathematics/

Bedre PISA-tal i første skoleår

Krisen i den svenske matematikundervisning kan skyldes en mål-middel ombytning, hvor matematik er mål i stedet for et middel til målet: at kunne håndtere omverdens-fænomenet Mange.

Matematik som en Naturvidenskab om mange

At spørge 'hvor mange' besvares ved at tælle og regne. Vi tæller ved at bundte og stakke. Vi ikoniserer fem ved at samle fem enere til én femmer, som omplaceres som et fem-ikon 5 med fem pinde, hvis skrevet på en mindre sjusket måde. Vi skaber ikoner indtil ti, da vi ikke har brug for et ikon for det, vi bundter i: når vi tæller i femmere, siger vi: en, to, tre, fire, bundt, én bundt én, én bundt to osv



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vi tæller ved at bundte i ikon-bundter (ikon-tælling). Således kan en total T på 7 1ere bundtes i 3ere som T = 2 3'ere og 1. Ved at placere 2 pinde i en venstre bundt-kop og 1 pind i en højre enkelt-kop kan vi skrive totalen på 'algebra-form'. Kop-indholdet kan nu beskrives som et ikon, først ved hjælp af 'kop-skrivning' 2) 1), så med 'decimal-skrivning' med et komma til at adskille bundter fra ubundtede, og med enheden 3ere, T = 2.1 3ere.

Alternativt kan vi bruge plastik bogstaver, B for et bundt og C for et bundt af bundter.

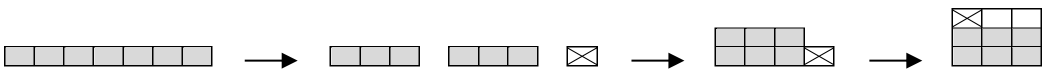
IIIIIII → III III I → II) I) → 2)1) → 2.1 3s eller BBI → 2BI

En lommeregner kan forudsige et optællingsresultat. Vi tæller i 3ere ved at fjerne 3ere, ikoniseret som '/3', der viser kosten, som fejer 3ere væk flere gange. Opbygning af en stak af 2 3ere ikoniserer vi som '2x3', der viser en donkraft til at løfte 3eren. Og '-2x3' ikoniserer det spor, der kommer ved at fjerne 2 3s for at se efter ubundtede. Disse tre operationer kaldes division, multiplikation og subtraktion hhv. Indtastes '7/3' er svaret '2.noget'. For at finde de ubundtede fjernes de 2 3s ved at spørge '7 - 2x3'. Af svaret '1' kan vi konkludere, at 7 = 2.1 3ere.

7/3	2.some
7 – 2 * 3	1

En total T optælles således en i 3ere ved at fjerne 3 T/3 gange. Dette kan skrives som en 'omtællings-formel 'T = (T/3)*3' eller som 'T = (T/b)*b hvis omtæller T i b'ere. At fjerne en stak b og placere den ved siden af de ubundtetde T-b kan skrives som en omstaknings-formel 'T = (T-b) + b'.

For at skrive totalen på 'geometri-form' bruger vi firkanter eller LEGO-blokke eller en kugleramme til at stable 2 3-bundter oven på hinanden med en ekstra stak af ubundtede 1ere ved siden af eller oven på, og derved beskrive totalen som et decimaltal 2.1 3ere, eller som en brøk 2 1/3 3ere ved at optælle den ubundtede 1 i 3s.



T = 7 = 2 3s & 1 = 2.1 3s = 2 1/3 3s

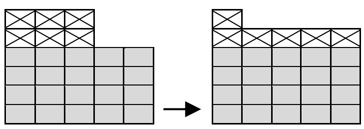
Dobbelt-tælling skaber per-tal til at forbinde enheder

En fysisk størrelse kan optælles i forskellige enheder, fx som 4 kg eller som 5 $. Dette skaber 'per-tallet' '4 kg/5 $ = 4/5 kg/$. Vi skifter mellem enheder ved at omtælle i den del af per-tallet, der har den samme enhed:

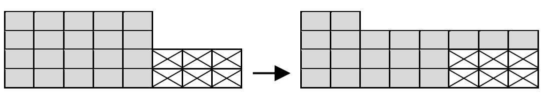
7 kg	= ? $	8 $	= ? kg
7 kg	= (7/4) * 4 kg = (7/4) * 5 $ = 8.75 $	8 $	= (8/5) * 5 $ = (8/5) * 4 kg = 6.4 kg

Addere Totaler

Optalte totaler kan adderes vertikalt eller horisontalt. For at adderes vertikalt skal enhederne gøres ens ved at omtælle en total i den anden total enhed. At addere totaler horisontalt kaldes at integrerer dem.



Vertikalt: 4 5ere + 2 3ere = 5.1 5ere



Horisontalt: 4 5ere + 2 3ere = 3.2 8ere

At addere ved siden af bruges til at addere stykkevis konstante per-tal

4 kg til 5 $/kg + 2 kg til 3 $/kg = (4*5 + 2*3) $ = Σ (mængde*per-tal)

Eller til at addere lokalt konstante (kontinuerte) per-tal:

6 kg til 5 $/kg faldende til 3 $/kg = $\int_0^6 (5 + \frac{3-5}{6} u)\,du$

Omvendt Addition eller ligningsløsning
Ved omvendt addition spørges fx '2 +? = 8'. Omstakkes 8 som (8-2) +2 fås svaret 8-2. Ved omvendt multiplikation spørges fx '2*? = 8'. Omtælles 8 i 2ere som (8/2)*2 fås svaret 8/2. Vi ser, at ligninger løses ved at overflytte tal til den modsatte side med det modsatte fortegn.

Vertikalt		Horisontalt
2 + ? = 8 = (8-2) + 2	**2 * ? = 8** = (8/2) * 2	**2 3s + ? 5s = 3 8s**
? = 8-2	? = 8/2	? = (3 8s – 2 3s)/5

Ved omvendt horisontal addition spørges fx '2 3'ere +? 5s = 3 8s'. For at finde det, der blev tilføjet, fjernes de 2 3ere og resten optælles i 5ere. Subtraktion og division kombineret på denne måde kaldes omvendt integration eller differentiation.

Algebra-projektet: De fire måder at addere
Algebra betyder 'at genforene' på arabisk, og 'Algebra-firkanten' viser, at med variable og konstante styk-tal og per-tal er der fire måder at forene tal til en total, og fem måder at opdele en total: Addition/subtraktion forener/opdeler-i variable styk-tal. Multiplikation/division forener/opdeler-i konstante styk-tal. Potens/rod & logaritme forener/opdeler-i konstant per-tal. Og integration/differentiation forener/opdeler-i i variable per-tal.

Forener/*opdeler i*	Variable	Konstante
Styk-tal	**T = a + n**, *T – a = n*	**T = a * n**, *T/n = a*
Per-tal	**T = ∫ a dn**, *dT/dn = a*	**T = a^n**, *loga(T) = n, n√T = a*

Skolen tæller kun i tiere og skriver 2.3 tiere som 23 uden enhed og med fejlplaceret kommaet. Derfor skal ikon-optælling foregå i førskolen. Udskrives 345 som 3*10 ^ 2 + 4*10 + 5*1, dvs. som tre horisontale blokke placeret, ses igen, at der er fire måder at forene tal på, og at alle tal har enheder.

Råd til første skoleår: Lad børnene lære ikon-tælling før ti-tælling og før addition
1. Lad børnene opbygge ikoner for tallene 1-9 med pinde, dukker, skeer, osv.

2. Lad børnene optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af algebra-metoden.

3. Lad børnene optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af geometri metoden-metoden.

4. Som 2 og med brug af en IKEA kugleramme.

5. Som 3 og med brug af en IKEA kugleramme.

4. Som 2 og med brug af en lommeregner til at forudsige resultatet.

5. Som 3 og med brug af en lommeregner til at forudsige resultatet.

6. Adder 2 3ere og 4 5ere vertikalt med brug af algebra-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

7. Adder 2 3ere og 4 5ere vertikalt med brug af geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

8. Adder 2 3ere og 4 5ere horisontalt med brug af algebra-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

9. Adder 2 3ere og 4 5ere horisontalt med brug af geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.

10. Løs ligningen 2+? = 8, 2*? = 8 og 2*3 + ?*5 = 3*8

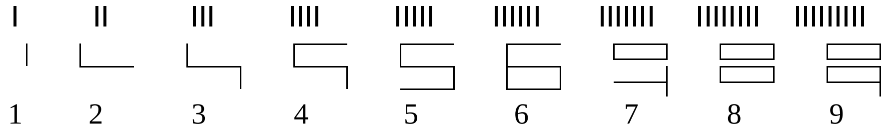
Materiale: http://mathecademy.net/preschool/icon-mathematics/

Bedre PISA-tal i mellemste og sidste skoleår

Krisen i den svenske matematikundervisning kan skyldes en mål-middel ombytning, hvor matematik er mål i stedet for et middel til målet: at kunne håndtere omverdens-fænomenet Mange.

Matematik som en Naturvidenskab om mange

At spørge 'hvor mange' besvares ved at tælle og regne. Vi tæller ved at bundte og stakke. Vi ikoniserer fem ved at samle fem enere til én femmer, som omplaceres som et fem-ikon 5 med fem pinde, hvis skrevet på en mindre sjusket måde. Vi skaber ikoner indtil ti, da vi ikke har brug for et ikon for det, vi bundter i: når vi tæller i femmere, siger vi: en, to, tre, fire, bundt, én bundt én, én bundt to osv



Vi tæller ved at bundte i ikon-bundter (ikon-tælling). Således kan en total T på 7 1ere bundtes i 3ere som T = 2 3'ere og 1. Ved at placere 2 pinde i en venstre bundt-kop og 1 pind i en højre enkelt-kop kan vi skrive totalen på 'algebra-form'. Kop-indholdet kan nu beskrives som et ikon, først ved hjælp af 'kop-skrivning' 2) 1), så med 'decimal-skrivning' med et komma til at adskille bundter fra ubundtede, og med enheden 3ere, T = 2.1 3ere.

Alternativt kan vi bruge plastik bogstaver, B for et bundt og C for et bundt af bundter.

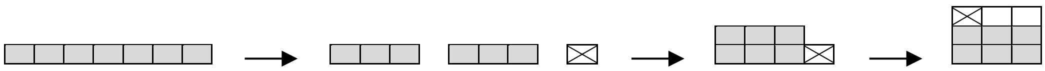
IIIIIII → III III I → II) I) → 2)1) → 2.1 3s eller BBI → 2BI

En lommeregner kan forudsige et optællingsresultat. Vi tæller i 3ere ved at fjerne 3ere, ikoniseret som '/3', der viser kosten, som fejer 3ere væk flere gange. Opbygning af en stak af 2 3ere ikoniserer vi som '2x3', der viser en donkraft til at løfte 3eren. Og '-2x3' ikoniserer det spor, der kommer ved at fjerne 2 3s for at se efter ubundtede. Disse tre operationer kaldes division, multiplikation og subtraktion hhv. Indtastes '7/3' er svaret '2.noget'. For at finde de ubundtede fjernes de 2 3s ved at spørge '7 - 2x3'. Af svaret '1' kan vi konkludere, at 7 = 2.1 3ere.

7/3	2.some
7 – 2 * 3	1

En total T optælles således en i 3ere ved at fjerne 3 T/3 gange. Dette kan skrives som en 'omtællings-formel 'T = (T/3)*3' eller som 'T = (T/b)*b hvis omtæller T i b'ere. At fjerne en stak b og placere den ved siden af de ubundtetde T-b kan skrives som en omstaknings-formel 'T = (T-b) + b'.

For at skrive totalen på 'geometri-form' bruger vi firkanter eller LEGO-blokke eller en kugleramme til at stable 2 3-bundter oven på hinanden med en ekstra stak af ubundtede 1ere ved siden af eller oven på, og derved beskrive totalen som et decimaltal 2.1 3ere, eller som en brøk 2 1/3 3ere ved at optælle den ubundtede 1 i 3s.



T = 7 = 2 3s & 1 = 2.1 3s = 2 1/3 3s

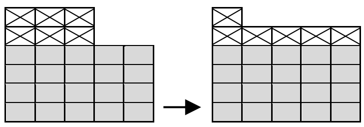
Dobbelt-tælling skaber per-tal til at forbinde enheder

En fysisk størrelse kan optælles i forskellige enheder, fx som 4 kg eller som 5 $. Dette skaber 'per-tallet' '4 kg/5 $ = 4/5 kg/$. Vi skifter mellem enheder ved at omtælle i den del af per-tallet, der har den samme enhed:

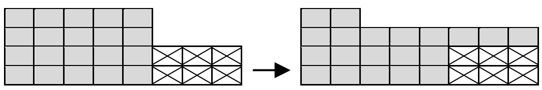
7 kg = ? $	8 $ = ? kg
7 kg = (7/4) * 4 kg = (7/4) * 5 $ = 8.75 $	8 $ = (8/5) * 5 $ = (8/5) * 4 kg = 6.4 kg

Addere Totaler

Optalte totaler kan adderes vertikalt eller horisontalt. For at adderes vertikalt skal enhederne gøres ens ved at omtælle en total i den anden total enhed. At addere totaler horisontalt kaldes at integrerer dem.



Vertikalt: 4 5ere + 2 3ere = 5.1 5ere



Horisontalt: 4 5ere + 2 3ere = 3.2 8ere

At addere ved siden af bruges til at addere stykkevis konstante per-tal

4 kg til 5 $/kg + 2 kg til 3 $/kg = (4*5 + 2*3) $ = Σ (mængde*per-tal)

Eller til at addere lokalt konstante (kontinuerte) per-tal:

$$6 \text{ kg til 5 \$/kg faldende til 3 \$/kg} = \int_0^6 \left(5 + \frac{3\text{-}5}{6}\, u\right) du$$

Omvendt Addition eller ligningsløsning

Ved omvendt addition spørges fx '2 +? = 8'. Omstakkes 8 som (8-2) +2 fås svaret 8-2. Ved omvendt multiplikation spørges fx '2*? = 8'. Omtælles 8 i 2ere som (8/2)*2 fås svaret 8/2. Vi ser, at ligninger løses ved at overflytte tal til den modsatte side med det modsatte fortegn.

Vertikalt		Horisontalt
2 + ? = 8 = (8-2) + 2	**2 * ? = 8** = (8/2) * 2	**2 3s + ? 5s = 3 8s**
? = 8-2	? = 8/2	? = (3 8s – 2 3s)/5

Ved omvendt horisontal addition spørges fx '2 3'ere +? 5s = 3 8s'. For at finde det, der blev tilføjet, fjernes de 2 3ere og resten optælles i 5ere. Subtraktion og division kombineret på denne måde kaldes omvendt integration eller differentiation.

Algebra-projektet: De fire måder at addere

Algebra betyder 'at genforene' på arabisk, og 'Algebra-firkanten' viser, at med variable og konstante styk-tal og per-tal er der fire måder at forene tal til en total, og fem måder at opdele en total: Addition/subtraktion forener/opdeler-i variable styk-tal. Multiplikation/division forener/opdeler-i konstante styk-tal. Potens/rod & logaritme forener/opdeler-i konstant per-tal. Og integration/differentiation forener/opdeler-i i variable per-tal.

Forener/*opdeler i*	Variable	Konstante
Styk-tal	**T = a + n**, *T – a = n*	**T = a * n**, *T/n = a*
Per-tal	**T = ∫ a dn**, *dT/dn = a*	**T = a^n**, *loga(T) = n, n√T = a*

Skolen tæller kun i tiere og skriver 2.3 tiere som 23 uden enhed og med fejlplaceret kommaet. Derfor skal ikon-optælling foregå i førskolen. Udskrives 345 som 3*10 ^ 2 + 4*10 + 5*1, dvs. som tre horisontale blokke placeret, ses igen, at der er fire måder at forene tal på, og at alle tal har enheder.

Råd til mellemste skoleår: Lad eleverne lære dobbelt-tælling og pertal før proportionalitet og integration

1. Lad eleverne løse 3&4&5-opgaver (hvis 3kg koster 4kr, hvad koster da 5kg) med pertal

2. Lad eleverne løse 3&4&6-opgaver (hvis 3kg koster 4kr, hvad fås da for 6kr) med pertal

3. Som 1 men med proportioner

4. Som 2 men med proportioner

5. Lad eleverne løse 3&4&5&6-opgaver (3kg til 4 kr/kg plus 5kg til 6 kr/kg giver 8kg til ? kr/kg) med integration.

5. Lad eleverne løse 3&4&5&6-ligninger (3kg til 4 kr/kg plus 5kg til ? kr/kg giver 8kg til 6 kr/kg) med differentiation.

6. Introducer calculus som addition af per-tal.

7. Diskuter de tre former for konstanthed med eleverne.

Materiale: http://mathecademy.net/papers/poor-pisa-performance/

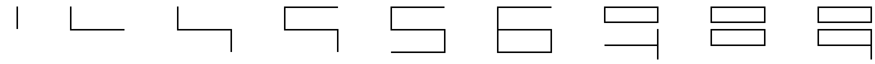
Bedre PISA-tal i læreruddannelsen

Krisen i den svenske matematikundervisning kan skyldes en mål-middel ombytning, hvor matematik er mål i stedet for et middel til målet: at kunne håndtere omverdens-fænomenet Mange.

Matematik som en Naturvidenskab om mange

At spørge ’hvor mange’ besvares ved at tælle og regne. Vi tæller ved at bundte og stakke. Vi ikoniserer fem ved at samle fem enere til én femmer, som omplaceres som et fem-ikon 5 med fem pinde, hvis skrevet på en mindre sjusket måde. Vi skaber ikoner indtil ti, da vi ikke har brug for et ikon for det, vi bundter i: når vi tæller i femmere, siger vi: en, to, tre, fire, bundt, én bundt én, én bundt to osv

I II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII IIIIIIIII



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vi tæller ved at bundte i ikon-bundter (ikon-tælling). Således kan en total T på 7 1ere bundtes i 3ere som T = 2 3'ere og 1. Ved at placere 2 pinde i en venstre bundt-kop og 1 pind i en højre enkelt-kop kan vi skrive totalen på ’algebra-form’. Kop-indholdet kan nu beskrives som et ikon, først ved hjælp af 'kop-skrivning’ 2) 1), så med ’decimal-skrivning’ med et komma til at adskille bundter fra ubundtede, og med enheden 3ere, T = 2.1 3ere.

Alternativt kan vi bruge plastik bogstaver, B for et bundt og C for et bundt af bundter.

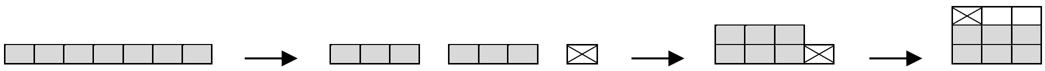
IIIIIII → III III I → II) I) → 2)1) → 2.1 3s eller BBI → 2BI

En lommeregner kan forudsige et optællingsresultat. Vi tæller i 3ere ved at fjerne 3ere, ikoniseret som '/3', der viser kosten, som fejer 3ere væk flere gange. Opbygning af en stak af 2 3ere ikoniserer vi som ’2x3’, der viser en donkraft til at løfte 3eren. Og '-2x3’ ikoniserer det spor, der kommer ved at fjerne 2 3s for at se efter ubundtede. Disse tre operationer kaldes division, multiplikation og subtraktion hhv. Indtastes ’7/3’ er svaret ’2.noget’. For at finde de ubundtede fjernes de 2 3s ved at spørge '7 - 2x3’. Af svaret '1' kan vi konkludere, at 7 = 2.1 3ere.

7/3	2.some
7 – 2 * 3	1

En total T optælles således en i 3ere ved at fjerne 3 T/3 gange. Dette kan skrives som en 'omtællings-formel ’T = (T/3)*3’ eller som ’T = (T/b)*b hvis omtæller T i b’ere. At fjerne en stak b og placere den ved siden af de ubundtetde T-b kan skrives som en omstaknings-formel ’T = (T-b) + b’.

For at skrive totalen på 'geometri-form’ bruger vi firkanter eller LEGO-blokke eller en kugleramme til at stable 2 3-bundter oven på hinanden med en ekstra stak af ubundtede 1ere ved siden af eller oven på, og derved beskrive totalen som et decimaltal 2.1 3ere, eller som en brøk 2 1/3 3ere ved at optælle den ubundtede 1 i 3s.



T = 7 = 2 3s & 1 = 2.1 3s = 2 1/3 3s

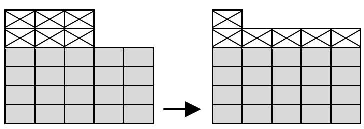
Dobbelt-tælling skaber per-tal til at forbinde enheder

En fysisk størrelse kan optælles i forskellige enheder, fx som 4 kg eller som 5 $. Dette skaber ’per-tallet’ '4 kg/5 $ = 4/5 kg/$. Vi skifter mellem enheder ved at omtælle i den del af per-tallet, der har den samme enhed:

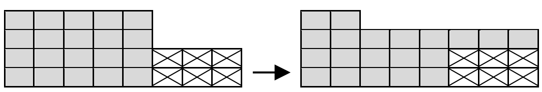
7 kg = ? $	8 $ = ? kg
7 kg = (7/4) * 4 kg = (7/4) * 5 $ = 8.75 $	8 $ = (8/5) * 5 $ = (8/5) * 4 kg = 6.4 kg

Addere Totaler

Optalte totaler kan adderes vertikalt eller horisontalt. For at adderes vertikalt skal enhederne gøres ens ved at omtælle en total i den anden total enhed. At addere totaler horisontalt kaldes at integrerer dem.



Vertikalt: 4 5ere + 2 3ere = 5.1 5ere



Horisontalt: 4 5ere + 2 3ere = 3.2 8ere

At addere ved siden af bruges til at addere stykkevis konstante per-tal

4 kg til 5 $/kg + 2 kg til 3 $/kg = (4*5 + 2*3) $ = Σ (mængde*per-tal)

Eller til at addere lokalt konstante (kontinuerte) per-tal:

6 kg til 5 \$/kg faldende til 3 \$/kg = $\int_0^6 (5 + \frac{3-5}{6} u)\, du$

Omvendt Addition eller ligningsløsning
Ved omvendt addition spørges fx '2 +? = 8'. Omstakkes 8 som (8-2) +2 fås svaret 8-2. Ved omvendt multiplikation spørges fx '2*? = 8'. Omtælles 8 i 2ere som (8/2)*2 fås svaret 8/2. Vi ser, at ligninger løses ved at overflytte tal til den modsatte side med det modsatte fortegn.

Vertikalt		Horisontalt
2 + ? = 8 = (8-2) + 2	**2 * ? = 8** = (8/2) * 2	**2 3s + ? 5s = 3 8s**
? = 8-2	? = 8/2	? = (3 8s – 2 3s)/5

Ved omvendt horisontal addition spørges fx '2 3'ere +? 5s = 3 8s'. For at finde det, der blev tilføjet, fjernes de 2 3ere og resten optælles i 5ere. Subtraktion og division kombineret på denne måde kaldes omvendt integration eller differentiation.

Algebra-projektet: De fire måder at addere
Algebra betyder 'at genforene' på arabisk, og 'Algebra-firkanten' viser, at med variable og konstante styk-tal og per-tal er der fire måder at forene tal til en total, og fem måder at opdele en total: Addition/subtraktion forener/opdeler-i variable styk-tal. Multiplikation/division forener/opdeler-i konstante styk-tal. Potens/rod & logaritme forener/opdeler-i konstant per-tal. Og integration/differentiation forener/opdeler-i i variable per-tal.

Forener/*opdeler i*	Variable	Konstante
Styk-tal	**T = a + n**, *T – a = n*	**T = a * n**, *T/n = a*
Per-tal	**T = ∫ a dn**, *dT/dn = a*	**T = a^n**, *loga(T) = n, n√T = a*

Skolen tæller kun i tiere og skriver 2.3 tiere som 23 uden enhed og med fejlplaceret kommaet. Derfor skal ikon-optælling foregå i førskolen. Udskrives 345 som 3*10 ^ 2 + 4*10 + 5*1, dvs. som tre horisontale blokke placeret, ses igen, at der er fire måder at forene tal på, og at alle tal har enheder.

Råd til læreruddannelsen: Lad studenterne lære begge matematik-former, indefra-ud og udefra-ind

1. Lad studenterne opbygge ikoner for tallene 1-9 med pinde, dukker, skeer, osv.
2. Lad studenterne optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af algebra-metoden.
3. Lad studenterne optælle 4 5ere og omtælle totalen i 3ere, 4ere, 6ere under brug af geometri metoden-metoden.
4. Som 2 og med brug af en IKEA kugleramme og en lommeregner til at forudsige resultatet.
5. Som 3 og med brug af en IKEA kugleramme og en lommeregner til at forudsige resultatet.
6. Adder 2 3ere og 4 5ere vertikalt med brug af algebra- og geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.
7. Adder 2 3ere og 4 5ere horisontalt med brug af algebra- og geometri-metoden og en kugleramme og en lommeregner til forudsigelse.
8. Løs ligningen 2+? = 8, 2*? = 8 og 2*3 + ?*5 = 3*8
9. Lad studenterne løse 3&4&5-opgaver og 3&4&6-opgaver (hvis 3kg koster 4kr, hvad koster da 5kg og hvad fås for 6kr) med pertal og med proportioner.
10. Lad studenterne løse 3&4&5&6-opgaver (3kg til 4 kr/kg plus 5kg til 6 kr/kg giver 8kg til ? kr/kg) med integration.
11. Lad studenterne løse 3&4&5&6-ligninger (3kg til 4 kr/kg plus 5kg til ? kr/kg giver 8kg til 6 kr/kg) med differentiation.
12. Introducer calculus som addition af per-tal.
13. Diskuter de tre former for konstanthed med studenterne.
14. Introducer Algebra-firkanten for studenterne.

Materiale: http://mathecademy.net/preschool/icon-mathematics/
http://mathecademy.net/papers/poor-pisa-performance/
MrAlTarp YouTube videoer, fx https://www.youtube.com/watch?v=sTJiQEOTpAM

PerNumbers replace Proportionality, Fractions & Calculus

Allan Tarp

The MATHeCADEMY.net
Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net

Abstract
Increased research can lead to decreasing PISA math results as In Sweden. A goal/means confusion might be the cause. Grounded as a means to an outside goal, mathematics becomes a natural science about the physical fact Many. This ManyMatics differs from the school's MetaMatism, mixing MetaMatics, defining its concepts as examples from internal abstractions, with MatheMatism, true inside but not outside the class. Replacing proportionality, fractions and calculus with per-numbers will change math from goal to means.

Decreasing PISA Performance, a Result of a Goal/Means Confusion?

Being highly useful to the outside world has made mathematics a core of education. Consequently, research in mathematics education has grown as witnessed by the International Congress on Mathematics Education taking place each 4 year since 1969. Likewise funding has increased witnessed e.g. by the creation of a National Center for Mathematics Education in Sweden. However, despite increased research and funding, the former model country Sweden has seen its PISA level in mathematics decrease from 509 in 2003 to 478 in 2012, far below the OECD average at 494. This has made OECD write a report describing the Swedish school system as being 'in need of urgent change' (OECD, 2015).

Created to enable students cope with the outside world, schools consist of subjects that are described by goals and means with the outside world as the goal and the subjects as the means. However, a goal/means confusion might occur where the subjects become the goals and the outside world a means.

A goal/means confusion is problematic since while there is only one goal there are many means that can be replaced if not leading to the goal, unless an ineffective means becomes a goal itself, leading to a new discussing about which means will best lead to this false goal; thus preventing looking for alternative means that would more effectively lead to the original goal.

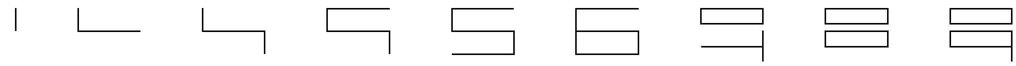
So we can ask: Does mathematics education build on a goal-means confusion seeing mathematics as the goal and the outside world as a means? For a grounded answer (Glaser 1967) we reformulate the question: How will mathematics look like if built as a means for proper real world actions?

Mathematics is not an action word itself, but so are its two main activities, geometry and algebra, meaning to measure earth in Greek, and to reunite numbers in Arabic. Thus mathematics is an answer to the two basic questions of mankind: How to divide the earth we live on, and the many goods it produces? (Tarp 2012). So what we really ask is: Which actions will enable us to deal with the physical fact Many as it exists in space and in time?

Mathematics as a Natural Science about Many

To deal with Many we count and add. To count we stack icon-bundles. To iconize five we bundle five ones to one fives to be rearranged as one five-icon 5 with five sticks if written in a less sloppy way. We create icons until ten since we do not need an icon for the bundle-number as show when counting in fives: one, two, three, four, bundle, one bundle one, one bundle two etc.

I II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII IIIIIIIII



1 2 3 4 5 6 7 8 9

With Icons we count by bundling a total in icon-bundles. Thus a total T of 7 1s can be bundled in 3s as T = 2 3s and 1. Now we place two sticks in a left bundle-cup and one stick in a right single-cup to write the total in ‘algebra-form’. Here the cup-content is described by an icon, first using ‘cup-writing’ 2)1), then using ‘decimal-writing’ with a decimal point to separate the bundles from the unbundled, and including the unit 3s, T= 2.1 3s.

Alternatively, we can use the plastic letters, B for a bundle and C for a bundle of bundles.

IIIIIII → III III I → II) I) → 2)1) → 2.1 3s or BBI → 2BI

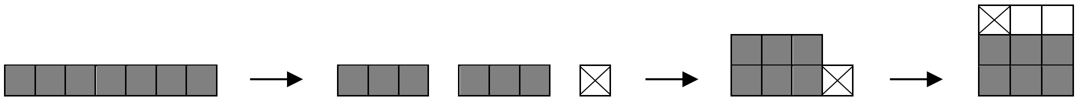
A calculator can predict the counting result. To count in 3s we take away 3s, iconized as ‘/3’ showing the broom wiping away the 3s several times. Building a stack of 2 3s we iconize as ‘2x3’ showing a jack used to lift the 3s. And ‘-2x3’ iconizes the trace coming from taking away 2 3s to look for unbundled. These three operations are called division, multiplication and subtraction respectively.

Entering ‘7/3’ the answer is ‘2.some’. To find the unbundled we take away the 2 3s by asking ‘7 – 2x3’. From the answer ‘1’ we conclude that 7 = 2.1 3s.

7 / 3	2.some
7 – 2 x 3	1

Thus a total T is counted in 3s by taking away 3 T/3 times. This can be written as a ‘re-count formula’ T = (T/3)x3 or as T = (T/b)xb if re-counting T in bs. Taking away a stack b to be placed next-to the unbundled T-b can be written as a ‘re-stack formula’ T= (T-b)+b.

To write the total in ‘geometry-form’ we use squares or LEGO blocks or an abacus to stack the 2 3-bundles on-top of each other with an extra stack of unbundled 1s next-to or on-top, thus describing the total as a decimal number 2.1 3s, or as a fraction number 2 1/3 3s counting the unbundled 1 in 3s.



T = 7 = 2 3s & 1 = 2.1 3s = 2 1/3 3s

DoubleCounting creates PerNumbers Bridging Units

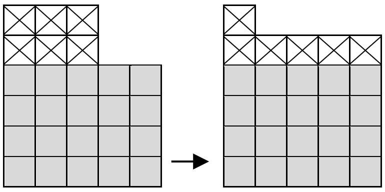
A physical quantity can be counted in different units, e.g. as 4kg or as 5$. This creates the ‘per-number’ 4kg/5$ = 4/5 kg/$. To shift from one unit to another we simply recount in the part of the per-number that has the same unit:

7 kg = ? $	8 $ = ? kg

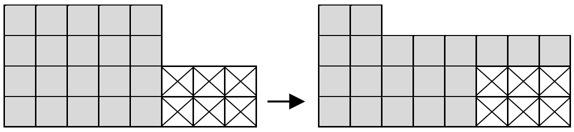
7 kg = (7/4) x 4 kg = (7/4) x 5 $ = 8.75 $	8 $ = (8/5) x 5 $ = (8/5) x 4 kg = 6.4 kg

Adding Totals

Once Counted, totals can be added on-top or next-to. To add on-top, the units must be changed to be the same, typically by recounting one total in the other total's unit. Adding next-to is called integrating areas.



OnTop: 4 5s + 2 3s = 5.1 5s



Next-to: 4 5s + 2 3s = 3.2 8s

Next-to addition is also used when adding piecewise constant per-numbers:

4 kg at 5 $/kg + 2 kg at 3 $/kg = (4x5 + 2x3) $ = Σ (per-number x quantity)

Or when adding locally constant (continuous) per-numbers:

6 kg at 5 $/kg decreasing to 3 $/kg = $\int_0^6 (5 + \frac{3-5}{6} u)\, du$

Global, piecewise and local constancy all express the fact that y is a constant k if the distance between the two can be made arbitrarily small:

- y is globally constant k if V $\varepsilon > 0$: I y – k I < ε.
- y is piecewise constant k_C if Э C so V $\varepsilon > 0$: I y – k_C I < ε inside C.
- y is locally constant yo if V $\varepsilon > 0$ Э C : I y – yo I < ε inside C.

Reversing Addition, or Solving Equations

Reversing addition, we ask e.g. '2+? = 8'. Restacking 8 as (8-2)+2 we get the answer 8-2. Reversing multiplication, we ask e.g. '2x? = 8'. Recounting 8 in 2s as (8/2)x2 we get the answer 8/2. We see that solving equations means moving numbers to the opposite side with the opposite sign.

OnTop		NextTo
2 + ? = 8 = (8-2) + 2	**2 x ? = 8** = (8/2) x 2	**2 3s + ? 5s = 3 8s**
? = 8-2	? = 8/2	? = (3 8s – 2 3s)/5

Reversing adding next-to, we ask e.g. '2 3s + ? 5s = 3 8s'. To find what was added we take away the 2 3s and count the rest in 5s. Combining subtraction and division in this way is called reversed integration or differentiation.

The Algebra Project: the Four Ways to Add

Meaning 'to re-unite' in Arabic, the 'Algebra-square' shows that with variable and constant unit-numbers and per-numbers there are four ways to unite numbers into a total and five ways to split a total: addition/subtraction unites/splits-into variable unit-numbers, multiplication/division unites/splits-into constant unit-numbers, power/root&log unites/splits-into constant per-numbers and integration/differentiation unites/slits into variable per-numbers.

Uniting/*splitting*	Variable	Constant

Unit-numbers	**T = a + n**, $T - a = n$	**T = a x n**, $T/n = a$
Per-numbers	**T = ∫ a dn**, $dT/dn = a$	**T = a^n**, $\log_a(T) = n$, $\sqrt[n]{T} = a$

School only counts in tens writing 2.3 tens as 23 thus leaving out the unit and misplacing the decimal point. So icon-counting must take place in preschool.

Writing 345 as 3x10^2 + 4x10 + 5x1, i.e. as areas placed next-to each other, again shows that there are four ways to unite, and that all numbers have units.

ManyMatics versus MatheMatism and MetaMatics

Built as a natural science about the physical fact Many, mathematics becomes ManyMatics dealing with Many by counting and adding as shown by the Algebra-square and in accordance with the Arabic meaning of algebra.

With counting and adding Many as outside goal, a proper means would teach icon-counting and on-top and next-to addition in grade one. However, only ten-counting occurs. And addition takes place without including units claiming that 2+3 IS 5 in spite of counterexamples as 2 weeks + 3 days = 17 days. So what is taught in primary school is not ManyMatics leading to proper actions to deal with Many, but what could be called 'MatheMatism' true inside but not outside a class thus making itself a goal not caring about outside world falsifications.

A counting result can be predicted by a re-count and a re-stack formula. So formulas as means to real world number-prediction should be a core subject in secondary school. However, here a formula is presented as an example of a function, again being an example of a set-relation where first-component identity implies second-component identity. So what is taught in primary school is not ManyMatics leading to the ability to predict numbers, but what could be called 'MetaMatics' presenting concepts from the inside as examples of abstractions instead of from the outside as abstractions from real world examples; and becoming 'MetaMatism' when mixed with MatheMatism.

So yes, a goal-means confusion exits in mathematics education seeing MetaMatsm as the goal and real world as applications and means; and claiming that 'of course mathematics must be learned before it can be applied'. To lift this confusion the outside world must again be the goal and ManyMatics the means. Testing examples will show if this can turnaround the PISA-results.

Proportionality or Linearity

Linearity is a core concept in mathematics, defined by MetaMatism as a function f obeying the criterion f(x+y) = f(x)*f(y). The function f(x) = a*x is linear since f(x+y) = a*(x+y) = a*x + a*y = f(x) + f(y). This 'proportionality function' is applied to the outside world when solving a '3&4&5-problem': 'If 3 kg cost 4 $ then 5 kg cost ? $'. Asking '5 kg = ? $' shows that the '3&4&5-problem' is an example of a more general 'change-unit problem' as e.g. '5 £ = ? $'.

Historically, the outside goal 'to change-units' has created different means. The Middle Ages taught 'Regula Detri', the rule of three: The middle number is multiplied with the last number and then divided by the first number.

The industrial age introduced a two-step rule: First go to the unit by dividing 4 by 3, then multiply by 5. Having learned how to solve equations in secondary school, a proportion can be set up equalizing two ratios: 3/4 = 5/u. Now cross-multiplication leads to the equation 3xu = 4x5 with the solution u = 4x5/3.

As shown above, the per-number 3$/4kg offers a fifth alternative finding the answer by recounting 5 in 3s: T = 5$ = (5/3)x3 $ = (5/3)x4 kg.

So the action ‘to change unit’ can be attained by five different means, all to be part of teacher education in order to create a turnaround in the PISA results.

Fractions

Defining everything as examples of sets, MetaMatism sees fractions as what is called ‘rational numbers’, defined as equivalence sets in the set-product of ordered pairs of integers created by an equivalence relation making (a,b) equivalent to (c,d) if cross multiplication holds: axd = bxc.

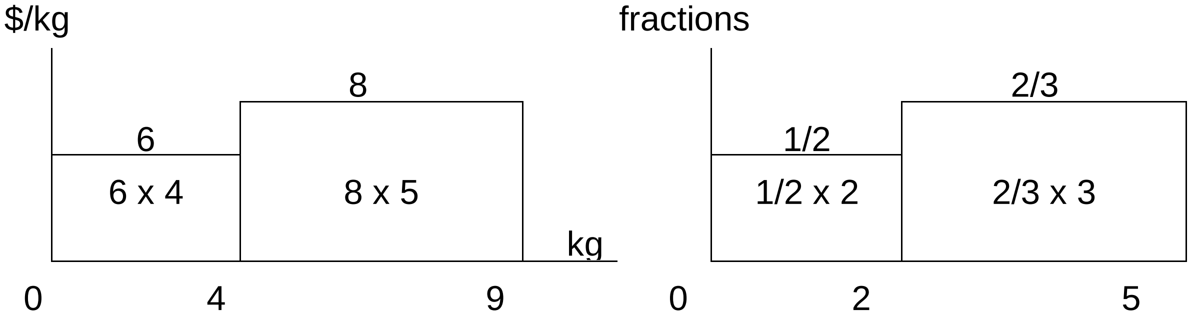
In primary school fractions come after division, the last of the basic operations. Unit fractions come in geometry as parts of pizzas or chocolate bars; and in algebra as parts of a total: 1/4 of the 12 apples is 12/4 apples. To find 4/5 of 20, first 1/5 of 20 is found by dividing with 5 and then the result is multiplied by 4. Then it is time for decimals as tenths, and percentages as hundredths. Then similar fractions occur when adding or removing common factors in the numerator and the denominator.

When including units, fractions respect the outside goal ‘to divide something’. Excluding units, adding fractions becomes MateMatism as shown by the ‘fraction paradox’: 1/2 + 2/3 is 7/6 inside a classroom, but can be 3/5 outside where 1 red of 2 apples plus 2 red of 3 total 3 red of 5 and certainly not 7 of 6.

From outside examples, per-numbers become fractions, 4kg/5$ = 4/5 kg/$. And, as per-numbers, fractions add by integrating the areas under their graph:

4kg at 6$/kg + to 5kg at 8$/kg = 9 kg at (6x4 + 8x5)/9 $/kg.

2 of which 1/2 + 3 of which 2/3 = 5 of which (1/2 x 2 + 2/3 x 3)



Integration

Adding variable per-numbers by integrating blocks, integration is one of the four ways to add as shown by the Algebra-square. So, integration should not be postponed to late secondary school but be part of primary school as adding icon-blocks next-to and as integrating areas under fraction graphs.

Also, integration should be taught before differentiation and before functions, since what we integrate (and differentiate into) is per-numbers, not functions.

Conclusion

To see if mathematics education has a goal/means confusion we asked: How will mathematics look like if built as a means for proper real world actions? Or more precisely: Which actions will enable us to deal with the physical fact Many as it exists in space and in time?

To deal with Many, first we count, then we add. But first rearranging Many create icons. Counted in icon-bundles a total transforms into a stack of unbundled, bundles,

bundles of bundles etc., i.e. into a decimal number with a unit. The basic operations, / and x and –, iconize the three counting operations: to take away bundles, to stack bundles and to take away a stack. Double-counting in different units create per-numbers used to bridge the units.

Once counted, totals can be added on-top or next to; and addition can be reversed by inventing reverse operations as shown in the Algebra-square.

Constructed as abstractions from the physical fact Many, ManyMatics prevents a goal/means confusion in mathematics education seeing the outside world as applications of MetaMatism, a mixture of MetaMatics defining concepts as examples from abstractions instead of as abstractions from examples, and MatheMatism with statements that are true inside but not outside a classroom.

Recommendations

So, to improve PISA results, mathematics education must teach actions enabling students to deal with the physical fact Many. Making mathematics a means and the outside world the goal prevents a goal/means confusion to occur. Consequently, mathematics education must teach ManyMatics abstracted from the outside world as a natural science about Many. And it must reject self-referring MateMatism containing concepts based internally instead of externally, and neglecting outside falsification of inside correctness.

In primary school, recounting in different icons should precede adding on-top and next-to. And double-counting create the per-numbers allowing the two units to be bridged without waiting for proportionality. To avoid nonsense, fractions must be added as per-numbers by integrating areas thus introducing primary school calculus as the fourth way to unite numbers. In this way everybody will be able to deal with Many by applying the full Algebra-square.

The MATHeCADEMY.net is designed to teach teachers to teach mathematics as ManyMatics as illustrated by its many MrAlTarp videos on YouTube.

References

Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory,* New York: Aldine de Gruyter

MrAlTarp. (2013). *Videos*. E.g. www.youtube.com/watch?v=sTJiQEOTpAM

OECD. (2015). *Improving Schools in Sweden: An OECD Perspective.* http://www.oecd.org/edu/school/improving-schools-in-sweden-an-oecd-perspective.htm.

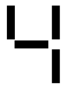
Tarp, A. (2012). *An ICME Trilogy.* http://mathecademy.net/papers/icme-trilogy/.

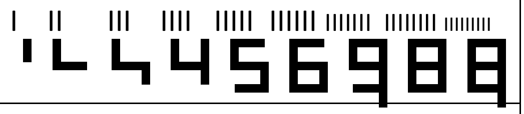
Childrens' own Numbers

● ReCount - Yes
● Add - No

3 times 8 is 3 **8s** or 2.6 **9s** or ● 2.4 **tens** ● but not 24

● *Multiplication before* ● *Addition*

Count in ICONS: I I I I → 



ReCount ● in IconBundles ● not in tens

T = 7 = IIIIIII = III III I = II]I = 2]1 = 2.1 **3s** *CupWriting* & decimal with unit

ReCount in the same unit to create *overload* or *deficit*

T = 2.1 **3s** = 2]1 = 1]4 = 1.4 **3s** & T= 2.1 **3s** = 3]-2 = 3.-2 **3s**

ReCount in another unit to create *proportionality*

Q**: T = 2.1 **3s** = ? **4s

A: T = 2.1 **3s** = III III I = IIII I I I = 1]3 **4s** = 1.3 **4s** = 1.2 **5s**

T = 2.1 **3s** = 3]1 **2s** = 1]1]1 **2s** = 11.1 **2s** = 1BundleBundle+1Bundle+1Single

CalculatorPrediction

***Q**: T = 2 **4s** = ? **5s**.* **A**: T = 1.3 **5s** since

2*4/5	**1.some**
2*4 - 1*5	**3**

RecountFormula **T = (T/B)*B** says

'From T, T/B times, Bs can be taken away'

ReCount in & from **tens**

Q**: T = 3 **7s** = ? **tens — **A**: T = 3*7 = 21 = 2.1 **tens**

Q: T = 47 = ? **6s** — **A**: T = (47/6)*6 = 7 5/6 **6s**

Multiply & Divide: *CupWriting* creates & removes *Overloads*

***Q**: T = 7 * 463 = ?*

A: T = 7 * 4]6]3 = 28]42]21 = 28]44]1 = 32]4]1 = 3241

***Q**: T = 3241 /7 = ?*

A: T = 32]4]1 /7 = 28]44]1 /7 = 28]42]21 /7 = 4]6]3 = 463

DoubleCount in two units creates *PerNumbers*

***Q**: T = 10\$ = ?kg with 4\$ per 5kg*

A: T = 10\$ = (10/4) * 4\$ = (10/4) * 5 kg = 12.5 kg

DysCalculia *may come from not respecting the Child's own Numbers*

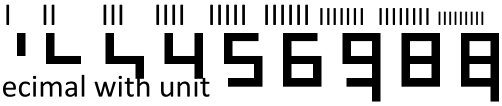
MATHeCADEMY.net teaches teachers to teach MatheMatics as ManyMatics, a Natural Science about MANY

ADD – OnTop or NextTo?

2 **3s** + 4 **5s** is 8.2 **3s** or 5.1 **5s** or 3.2 **8s** or 2.6 **tens** ● but not 26

DysCalculia *may come from forcing Addition before ReCounting & Multiplication*

ReCount ● in IconBundles ● not in tens



T = 7 = IIIIIII = III III I = 2]1 = 2.1 **3s** *CupWriting* & decimal with unit

ReCount in the same unit to create *overload* or *deficit*

T = 7 = 2.1 **3s** = 2]1 = 1]4 = 1.4 **3s** & T= 2.1 **3s** = 3]-2 = 3.-2 **3s**

ReCount in another unit to create *proportionality*

Q*: T = 2.1* ***3s*** *= ?* ***4s***

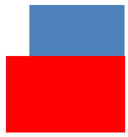
A: T = 2.1 **3s** = III III I = IIII I I I = 1]3 **4s** = 1.3 **4s** = 1.2 **5s**

CalculatorPrediction

Q*: T = 2* ***4s*** *= ?* ***5s.*** **A**: T = 1.3 **5s** since

2*4/5	**1.some**
2*4 - 1*5	**3**

Adding OnTop



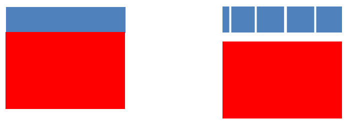
Q*: T =* ***3 5s*** *+* ***2 4s*** *= ?* ***5s*** (Different units: Recount)

A: T = 3 **5s** + 1.3 **5s** = 3] + 1]3 = 4]3] = 4.3 **5s**

Adding NextTo

Q: *T =* ***3 5s*** *+* ***2 4s*** *= ?* ***9s*** **A**: T = 2.5 **9s** (*integration)*

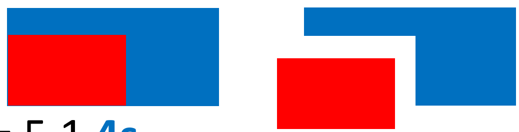
Adding OnTop Reversed



Q: *T =* ***3 5s*** *+ ?* ***4s*** *= 4* ***5s***

A: (T – 3 5s)/4 **4s** = (4*5 – 3*5)/4 **4s** = 1.1 **4s**

Adding NextTo Reversed



Q: *T =* ***3 5s*** *+ ?* ***4s*** *= 4* ***9s***

A: (T – 3 5s)/4 **4s** = (4*9 – 3*5)/4 **4s** = 5.1 **4s**

Q: *? T1 + ?* ***4s*** *= T2,* **A:** (T2–T1)/4 = **ΔT/4** *(differentiation)*

Adding and Subtracting tens: *CupWriting* creates & removes *Overloads*

T = 56 + 69 = 5]6 + 6]9 = 11]15 = 12]5 = 12.5 tens = 125

T = 86 – 29 = 8]6 – 2]9 = { 7]16 – 2]9 = 5]7 = 5.7 tens = 57
or 6]-3 = 5]7 = 5.7 tens = 57

Forcing TenCounting and Addition before Multiplication

Same Units: No Changing Units. No NextTo Addtion. No Reversed Addtion

No Proportionality. No Primary School Calculus

Replacing Golden Learning Opportuinies with DysCalculia

MATHeCADEMY.net teaches teachers to teach MatheMatics as ManyMatics, a Natural Science about MANY

Bodil Holmström B 107 F Gymnasie

I karaktärsämnen på ekonomiprogrammet är eleverna motiverade och högpresterande, men de finner ofta matematiken irrelevant och meningslös. Bodil har utarbetat ett arbetssätt för att förändra deras sätt att tänka kring matematik. Hon har systematiserat den röda tråd som kopplar samman matematik med ekonomiämnet. Tillsammans med ekonomilärarna har de enats kring gemensamma begrepp och samarbetsområden. Nyckeln är att hämta inspiration från ekonomins kontext så ett intresse för matematik väcks.

Bodil Holmström är förstelärare i matematik på Rudbeckgymnasiet i Örebro. Hon har arbetat som lärare inom grundskola och gymnasiet. Under sina år som yrkeslärare och matematiklärare fick hon stor erfarenhet av programinfärgning. Denna erfarenhet har hon haft nytta av när hon nu undervisar på Ekonomiprogrammet och sett behovet för en ökad motivation för matematik. Bodil har även arbetat med diagnostisering av elever i svårigheter och motiverande samtal för att stärka självbilden i matematik.

Matematik Selvererfererende MetaMatisme eller rodfæstet MangeMatik
Allan Tarp B 108 F Högskola

Matematik var længe blot et fællesord for naturvidenskaberne geometri og algebra, som på græsk og arabisk betyder jordmåling og genforening af tal. Men mængden vendte disse på hovedet til 'meta-matisme', der definerer begreber som eksempler på abstraktioner i stedet for modsat, og som skjuler sine rødder ved at kalde dem modeller. Og som er en effektiv eksklusionsteknik i den bildungs-skole, der blev skabt i Berlin år 1800 for at hindre almuen i at blive oplyst, som påvist af faldende PISA-tal.

Allan Tarp efteruddanner lærere i matematik som naturvidenskab ved MATHeCADEMY.net

Godtagbar ansats, med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
Ingela Eriksson B 109 F Gymnasie

Vad är en godtagbar ansats? Ett godtagbart svar? Hur hanterar vi slarvfel och följdfel? Kan man ge full poäng för en lösning där svaret inte är korrekt? Dessa frågor är några av de frågor som lärare ställer sig när de rättar de nationella proven i matematik. I föredraget förklaras och diskuteras de