Spilteori
gennem modelbygning

Allan Tarp

Directors Cut, oplæg til Dilemmaregning, hæfte 14 i Matematiklærerforeningens serie Matematiske Emner

Indledning

Spilteori handler om konflikt og samarbejde. To parter har forskellige mål, og kan vælge mellem flere midler til at nå målet, der dog er afhængig af modpartens valg.

Hvis parternes mål er diametral modsatte er der konflikt. Et sådant spil kaldes et Nulsum spil: det den ene vinder taber den anden.

Hvis parternes mål ikke er diametralt modsatte er der evt. mulighed for samarbejde. Et sådant spil kaldes et ikke Nulsum spil.

I dette hæfte opbygges spilteorien induktivt ud fra erfaring med at afprøve forskellige spiltyper i kapitlerne 1 og 2.

I kapitel 3 formuleres det generelle modelproblem. I kapitel 4 behandles de uægte spil, der er afgjort på forhånd fordi de har et ligevægtspunkt. I kapitel 5-9 behandles de ægte spil, dels nulsums spil og ikke nulsumsspil, dels topersonersspil og flerpersonersspil. I kapitel 10 er en kort introduktion til lineær programmering, som kan bruges til at finde løsning.

Hæftet er et uddrag af bogen Allan Tarp: Spilteori og Afstemningsteori, GMT, 1973 (S&A).

Indholdsfortegnelse:

1. Nogle problemer og deres løsning

Vi vil i dette kapitel betragte nogle problemer fra virkeligheden og søge at finde deres løsning. Dernæst vil vi søge at opstille en matematisk model for problemerne. Endelig vil vi sammenligne modellens løsning med den løsning, vi først var nået frem til.

I. Nogle problemer

1.1 Problem. I Fjordkøbing findes et gammelt veletableret isenkramfirma Andersen og sønner samt et nyt dynamisk isenkramfirma Bruun, der forsøger at erobre markedet fra Andersen. De to firmaer overvejer begge, om de det kommende år skal køre normal reklamekampagne eller ekstra reklamekampagne. De har begge hos et markedsanalysefirma bestilt en vurdering af dette problem.

Vurderingerne er ens og lyder således: "Hvis både Andersen og Bruun kører ekstra reklamekampagne, vil Bruun erobre 1000 kunder fra Andersen. Hvis kun Andersen kører ekstra reklamekampagne, vil Andersen erobre 1000 kunder fra Bruun. Hvis kun Bruun kører ekstra reklamekampagne, vil Bruun erobre 3000 kunder fra Andersen. Hvis hverken Andersen eller Bruun kører ekstra reklamekampagne, vil Andersen erobre 2000 kunder fra Bruun. Der er ved vurderingen forudsat et samlet kundetal på 12.000. Det er endvidere forudsat, at dette kundetal er uafhængigt af reklameformen."

Hvad skal Andersen vælge, og hvad skal Bruun vælge?

På det tidspunkt valget skal træffes, har ingen af parterne kendskab til modpartens beslutning.

1.2 Opgave. Overvej 1.1 og forsøg at finde en løsning.

1.3 Problem. Markedsanalysefirmaet henvender sig igen til Andersen og Bruun for at fortælle, at der er udviklet en ny utraditionel reklameform, som virker lovende for nye firmaer, men som på kort sigt kan have en uheldig virkning for etablerede og velansete firmaer.

Hvis både Andersen og Bruun benytter den nye reklameform, vil ingen af parterne erobre kunder fra den anden part. Hvis kun Andersen benytter den nye reklameform, vil Bruun erobre 3000 kunder fra Andersen, såfremt Bruun kører normal reklamekampagne; hvorimod hvis Bruun kører ekstra reklamekampagne, vil Bruun erobre 2000 kunder fra Andersen. Hvis kun Bruun benytter den nye reklameform, vil Bruun erobre 4000 kunder fra Andersen, såfremt Andersen kører normal reklamekampagne, hvorimod hvis Andersen kører ekstra reklamekampagne, vil Bruun erobre 500 kunder fra Andersen.

Den tidligere vurdering er stadig gældende for traditionel reklameform.

l.4 Opgave. Hvad skal Andersen og Bruun nu gøre?

1.5 Opgave. Lad os nu antage, at de to firmaer i stedet for at skulle vælge reklameform én gang om året skal vælge reklameform 10 gange om året. Begge parter har da kendskab til, hvad modparten valgte de forrige gange, men ikke kendskab til, hvad han vil vælge næste gang.

Gennemspil situationen 10 gange på følgende måde: Inddel klassen i tomandsgrupper. I hver gruppe er der da en Andersen og en Bruun. Lad hver part have f.eks. tre forskellige spillekort symboliserende hver sin handlemåde, spar: ekstra reklame, hjerter: normal reklame, ruder: utraditionel reklame. Hver part vælger et af sine kort og lægger det på bordet med bagsiden opad. Kortene vendes samtidig .

Anfør på et stykke papir for hver gang de valgte reklameformer og det deraf følgende resultat, idet alle kundetal deles med 10.

1.6 Opgave. Det følgende år vurderer markedsanalysefirmaet salgssituationen på følgende måde:

↙		Bruun ekstra	normal	utrad.
Andersen	ekstra	-1000	-800	-1000
	normal	-1500	-100	-4000
	utrad.	-1100	-1200	-300

Tallene i skemaet angiver den årlige kundevandring i pilens retning, dvs. fra Bruun til Andersen.

Gentag 1.5 på grundlag af dette nye vurderingsskema.

1.7 Opgave. Det næstfølgende år vurderer markedsanalysefirmaet salgssituationen på følgende måde:

↙		Bruun ekstra	normal	utrad.
Andersen	ekstra	-1000	-800	-1000
	normal	-1150	-100	-1500
	utrad.	-1100	-800	-850

Gentag 1.5 på grundlag af dette nye skema.

II. Nogle løsningsovervejelser

Vi har i det foregående betragtet en række problemer fra virkeligheden, og vort mål var at nå frem til en løsning af disse problemer. Vi vil nu se lidt nærmere på 1.1, idet vi med en løsning for øje vil udtrække (latin: abstrahere) det væsentlige af problemet. Vi får da nedenstående problem. Problemerne 1.1 og 1.8 er åbenbart ikke enslydende, men 1.8 består som sagt af det i 1.1, vi mener er væsentligt For en løsning. Vi vil om 1.8 benytte betegnelsen "et modelproblem til 1.1" i analogi med andre modeller, f.eks. en modeljernbane, en model af en by, af et skib, af en maskine; thi disse eksempler har alle det til fælles, at man med et bestemt formål for øje har udtrukket det væsentlige af det, man ønsker at lave en model af.

1.8 Problem. Vi har:

To forskellige parter (spillere): A og B.

To forskellige handlemåder (strategier) for A: ekstra reklamekampagne (a1) og normal reklamekampagne (a2).

To forskellige strategier for B: ekstra reklamekampagne (b1) og normal reklamekampagne (b2).

De to spillere skal vælge hver sin strategi uden kendskab til den anden spillers valg.

De to valgte strategier resulterer i en "betaling" af "udbytte" fra den ene spiller til den anden, her fra B til A. Dette kan symboliseres ved en udbyttetavle:

↙		B B1	B2
A	A1	-1000	1000
	A2	-3000	2000

Begge spillere har kendskab til udbyttetavlen.

Begge spillere ønsker hver for sig at opnå størst muligt udbytte.

En model kan således variere efter formålet, f.eks. kan såvel en gine som en dukke vare en model af et menneske. Ligeledes kan et statskort, et højdekort, et sprogkort, et plantekort og et varmekort i et atlas være forskellige modelleraf samme landområde.

Virkelighed		Model
Problem	→	Problem

Vi vil nu betragte modelproblemet 1.8 og søge at finde frem til en løsning af dette. Vi betragter først problemet fra hver spillers synspunkt:

A	B
Hvis B vælger b1, bør jeg vælge a1, da a1 da giver det mindste tab. Hvis B vælger b2, bør jeg vælge a2, da a2 da giver den største gevinst."	Hvis A vælger a1, bør jeg vælge b1 (hvorfor?) Hvis A vælger a2, bør jeg vælge b1 (hvorfor?)

B vil altså uanset A's valg vælge b1. Med dette kendskab bør A naturligvis vælge a1.

1-9 Problem. Lad os nu betragte modelproblemet til 1.3. Udbyttetavlen ser da således ud:

		B		
		b1	b2	b3
A	a1	-1000	1000	-500
	a2	-5000	2000	-4000
	a3	-2000	-3000	0

Hvor a1: ekstra reklame, a2: normal reklame og a3: utraditionel reklame. Tilsvarende for b1, b2 og b3.

Lad os igen betragte problemet set fra hver af spillernes synspunkt:

A's synspunkt:	B's synspunkt:
Hvis B vælger b1 bør jeg vælge a1	Hvis A vælger a1 bør jeg vælge b1
Hvis B vælger b2 bør jeg vælge a2	Hvis A vælger a2 bør jeg vælge b2
Hvis B vælger b3 bør jeg vælge a3	Hvis A vælger a3 bør jeg vælge b3

Nu er situationen åbenbart en anden. Hverken A eller B kan på forhånd vide, hvad modspilleren vil gøre.

Et valg skal imidlertid træffes. Men hvordan? Skal A håbe det bedste: 2000, og vælge a2? Skal A vælge den strategi, for hvilken den samlede udbyttesum er størst? Skal A vælge den strategi, for hvilken afstanden mellem bedste og dårligste udbytte er mindst? Skal A trække lod? Eller hvad?

Der findes en god gammel leveregel, der siger: "Safety First." Med denne filosofi som udgangspunkt er situationen i 1.9 nu denne:

A's synspunkt:

Hvis A vælger a1, vil resultatet i værste tilfælde blive -1000. Vi kan sige, at a1 har et sikkerhedsniveau på -1000.

Tilsvarende ses, at a2's sikkerhedsniveau er -4000, og at a3's sikkerhedsniveau er -3000.

Ud fra "Safety first" princippet bør A da vælge den strategi, der giver det højeste sikkerhedsniveau, i dette tilfælde a1.

Denne strategi, der giver A det maksimale af det minimale, vil vi kalde A's maximin-strategi.

B’s synspunkt:

Hvis B vælger b1, vil resultatet i værste tilfælde blive -1000, idet det jo er B, der betaler.

På tilsvarende måde ses, at b2 's sikkerhedsniveau er 2000, og at b3's sikkerhedsniveau er 0. Ud fra "Safety first" princippet bør B da vælge den strategi, der giver det laveste sikkerhedsniveau (det er stadig B, der betaler), i dette tilfælde b1.

Denne strategi, der giver B det minimale af det maksimale, vil vi kalde B's minimax-strategi.

Maximin-strategien og minimax-strategien vil vi under et kalde spillernes Safety-first strategier.

Er disse Safety-first strategier en realistisk løsning til vort oprindelige problem fra virkeligheden 1.3? Kan f.eks. den ene spiller ikke benytte sin formodning om, at den anden spiller vil benytte sin Safety-first strategi til at forbedre sit eget resultat?

Vi bemærker, at Safety-first strategierne i 1.9, a1 og b1 medfører et resultat, der er det værste tilfælde for begge spillere. Men heraf følger specielt, at ingen af spillerne ved alene at skifte strategi kan bringe modspilleren i en værre situation (og dermed sig selv i en bedre situation),tvært imod risikerer han at bringe modspilleren i en bedre situation (og dermed sig selv i en værre situation).

Safety-first strategierne a1 og b1 er altså en realistisk løsning til 1.3 i den forstand, at ingen af spillerne føler sig fristet til at skifte strategi.

I modellen afspejler denne situation sig ved, at Safety-first strategierne bestemmer et punkt på udbyttetavlen, der er maksimalt i sin søjle (det kan ikke betale sig for A alene at skifte strategi), og minimalt i sin række (det kan ikke betale sig for B alene at skifte strategi). Et sådant punkt vil vi kalde et ligevægtspunkt eller et saddelpunkt. En saddel har jo den egenskab, at det i en retning går nedad til begge sider, og i den derpå vinkelrette retning går det opad til begge sider.

Vi vil nu vedtage, at et par Safety-first strategier, der bestemmer et ligevægtspunkt, skal være en løsning til vort modelproblem, idet en sådan modelløsning, som vi har set, kan "oversættes" til en realistisk løsning til vort problem i virkeligheden.

Såfremt vi accepterer Safety-first; princippet, kan vi da i fremtiden ved problemløsning af samme art gennemløbe følgende skema:

$$\begin{array}{ccc} \text{Virkelighed} & & \text{Model} \\ \boxed{\text{Problem}} & \longrightarrow & \boxed{\text{Problem}} \\ & & \downarrow \\ \boxed{\text{Løsning}} & \longleftarrow & \boxed{\text{Løsning}} \end{array} \tag{1.10}$$

1.11 Eksempel. Slaget i Bismark Havet.

Under kampen om New Guinea under 2. verdenskrig rapporterede det amerikanske efterretningsvæsen, at japanerne ville sende en troppe- og forsyningskonvoj fra Rabaul på den Østlige del af New Britain til Lae, der ligger lige vest for New Britain på New Guinea. Konvojen kunne sejle enten nord om New Britain, hvor man kunne være næsten sikker på dårlig sigtbarhed, eller syd om øen, hvor vejret ville være klart. I begge tilfælde ville rejsen vare tre dage.

Den amerikanske general Kenney havde valget mellem at koncentrere hovedparten af sine rekognosceringsfly på den ene rute eller den anden. Når først konvojen var opdaget, ville den blive bombet, indtil den kom til Lae. Kenneys stab antog følgende resultater af de forskellige valg målt i antal bombningsdage:

		Japan	
	↙	nord	syd
USA	nord	2	2
	syd	1	3

Både japanerne og Kenney valgte den nordlige rute. Konvojen blev opdaget én dag efter afsejlingen, og den led svære tab. Ud fra vor model kan man imidlertid ikke bebrejde den japanske kaptajn hans valg, idet Safety-firet strategierne (nordlig rute, nordlig rute) bestemmer et ligevægtspunkt og derfor i følge vor vedtagelse er løsning til spillet.

1.12 Eksempel. Find løsningen til følgende 3 x 4 modelproblem:

		B					
		b1	b2	b3	b4	Min	Max
A	a1	1	5	0	37	0	
	a2	-2	8	0	-9	-9	
	a3	2	12	1	3	1	*
	max	2	12	1	37		
	min			*			

Da Safety-first strategierne a, og b, bestemmer et saddelpunkt (kontroller dette), er disse strategier løsningen til vort problem.

1.13 Opgave. Konstruer selv et 5x4 modelproblem, hvori der findes et saddelpunkt med værdien 8.

1.14 Opgave. Find mod el løsningerne til 1.1, 1.3, 1.5. 1.6 og 1.7.

1.15 Opgave. Giv bl.a. på grundlag af 1.14, på grundlag af de tidligere fundne løsninger til 1.1 og 1.3 samt på grundlag af spillerapporterne fra 1.5, 1.6 og 1.7 en vurdering af, hvor realistisk vor modelløsning er for problemet i virkeligheden. Ville du selv benytte denne løsning? Gentag spillet 1.6.

1.16 Opgave. To personer Jens og Peter, spiller følgende spil:

Jens har 2 kort: er. rød 5'er og en sort 5'er. Peter har 2 kart: en rød 5'er og en sort 3'er. Spillerne viser samtidigt 1 af deres kort. Antag at kortene viser forskellige tal. Peter må da betale 2 kroner til Jens, hvis kortene viser samme farve, og omvendt hvis kortene viser modsat farve. Hvis kortene viser samme tal, er spillet uafgjort. Spil spillet 10 gange og udfyld en spillerapport.

1.17 Opgave. I Las Whisgas sidder Al og Bert og spiller følgende spil: Hver har 4 kort på hånden, en klør, en ruder, en spar og en hjerter. Spillerne viser samtidigt 1 af deres kort. Resultatet angives i følgende skema. Spil spillet 10 gange og udfyld en spille-rapport. Er spillet fair, eller kan det gøres fair ved en sidebetaling, dvs. en afgift pr. spil for en af spillerne?

		Bert					
		b1	b2	b3	b4	Min	Max
Al	a1	-10	1	-20	10		
	a2	2	1	10	50		
	a3	3	2	3	3		
	a4	-50	1	0	60		
	Max						
	Min						

2. Andre problemer og deres løsning

VI vil igen i dette afsnit betragte nogle problemer fra virkeligheden, søge at finde deres losning samt endelig søge at opstille en matematisk model for problemerne og sammenligne modellens løsning med len løsning, vi først var nået frem til.

I. Nogle problemer

3.1 Problem. Vi er igen i Fjordkøbing. Der er nu gået tre år siden Bruun startede sin isenkramforretning. De to firmaer, Andersen og Bruun overvejer igen, hvilken reklameform de skal vælge for det kommende år. Den tidligere utraditionelle reklameform er efterhånden smeltet sammen med den ekstra reklamekampagne, således at de to firmaer igen har valget mellem normal og ekstra reklamekampagne.

Markedsanalysefirmaets vurdering lyder nu således: "Markedet er præget af, at den kundevandring, der de foregående år har fundet sted fra Andersen til 3ruun, nu er ved at stoppe, og under visse omstændigheder kan man endog forvente en vis tilbage vandring. Kundevandringen fremgår af følgende skema."

		Bruun	
		ekstra	normal
Andersen	ekstra	500	0
	normal	-500	1000

2.2 Opgave. Opdel klassen i 4 grupper, 2 der repræsenterer hhv. Andersen og Bruun. Lad Andersen grupperne gennemspille 2.1 10 gange med hver sin Bruun-gruppe, idet spillet drøftes før og mellem hvert valg. Alle kundetal deles med 10. Nedskriv en spillerapport.

2.3 Opgave. To personer, Arnold og Børge, spiller følgende spil: Hver spiller har 2 forskellige kort, f.eks. en hjerter og en spar. Hver spiller vælger 1 af sine kort og lægger det pi bordet med bagsiden opad. Hår begge kort ligger på bordet, vendes de. Er farverne ens, betaler Arnold 1 kr. til Børge. Er farverne forskellige, betaler Børge 1 kr. til Arnold. Spillet kan gentages så mange gange, man ønsker det. I stedet for 2 forskellige kort kan benyttes plat og krone på en mønt, der lægges på bordet under håndfladen. Gennemspil i 2mands grupper spillet 10 gange og udfyld det uddelte spørgeskema.

		Børge	
		H	S
Arnold	H	-1	1
	S	1	-1

2.4 Opgave. Som 2.3, men med følgende udbyttetavle

		Børge	
		H	S
Arnold	H	-1	2
	S	1	-2

2.5 Opgave. Som 2.3, men med følgende udbyttetavle

		Børge	
		H	S
Arnold	H	-1	100
	S	1	-100

2.6 Opgave. Som 2.3, men med følgende udbyttetavle

		Børge	
		H	S
Arnold	H	2	-6
	S	-3	8

2.7 Opgave. Som 2.3, men med følgende udbyttetavle

		Børge	
		H	S
Arnold	H	40000	-120000
	S	-60000	160000

2.8 Opgave. Som 2.3, men med følgende udbyttetavle

		Børge	
		H	S
Arnold	H	32	28
	S	29.5	35

2.9 Problem. Vi er i det herrens år 972. Den frygtløse feltherre Antonibald ønsker at erobre den pragtfulde by Tombstoneville, der imidlertid forsvares af den ikke mindre frygtløse feltherre Bourbaki. Situationen er den følgende:

For at komme til Tombstoneville skal Antonibald vælge mellem et af to bjergpas, et højtbeliggende D2 og et lavtbeliggende D1. For at stoppe Antonibald skal Bourbaki afvente ham i passet.

Antonibald ræsonnerer som følger: "Hvor skal jeg angribe, D1 eller D2? Bourbaki får sikkert snart forstærkning og mine forsyninger er ved at slippe op, så det er bedst, jeg angriber i morgen.

Jeg har ikke kunnet finde ud af, om Bourbaki har placeret sit hovedforsvar ved D1 eller ved D2.

Lad os sige, jeg angriber ved D1. Hvis Bourbaki er ved D2, vil jeg bryde igennem, og jeg vil kunne være fremme ved Tombstoneville 30 dage før den dato, jeg har regnet med, og som jeg har baseret min forsyningssituation på.

Men hvis Bourbaki er ved D1, vil jeg blive kastet tilbage, og min ankomst til byen vil blive mindst 10 dage forsinket.

Lad os nu sige, jeg angriber ved D2. Hvis Bourbaki er ved D1, vil Jeg bryde igennem, men jeg vil da have en mere besværlig vej til Tombstoneville end fra D1. Jeg vil altså vinde, men ikke så meget som før; lad os sige 5 dage. Hvis Bourbaki derimod er ved D2, vil jeg blive kastet tilbage, og min ankomst vil blive mindst 15 dage forsinket."

Antonibald meddeler disse overvejelser til sine rådgivere, blandt hvilke imidlertid er en af Bourbakis spioner. Denne spion må forlade lejren før nogen beslutning er taget. Han når frem til Bourbaki og aflægger rapport.

Kan denne rapport hjælpe Bourbaki? Hvad bør Bourbaki gøre? Hvad bør Antonibald gøre? Hærene skal holdes samlet for at være effektive.

2.10 Opgave. Inddel klassen i 4 grupper, 3 der repræsenterer Antonibald, og 2 der repræsenterer Bourbaki. Lad Antonibald-grupperne spille 2.9 1 gang med hver sin Bourbaki-gruppe og nedfæld strategivalget på et stykke papir.

II. Nogle løsningsovervejelser

Vi vil nu se lidt nærmere på problemet 2.4. Udbyttetavlen var:

		Børge	
		H	S
Arnold	H	-1	2
	S	1	-2

Lad os betragte spillet fra begge synspunkter:

A: Hvis vi begge benytter vor Safety-first strategi hjerter (H), bliver resultatet -1. Hvis jeg derimod skifter til spar (S), forbedrer jeg mit udbytte til +1.

På den anden side har B sikkert regnet dette ud, hvorfor han vil skifte til spar, da dette giver resultatet -2. Men hvis S skifter til spar, bør jeg skifte til hjerter, da jeg derved forbedrer mit udbytte til +2.

På den anden side har B sikkert regnet dette ud, hvorfor han vil skifte til hjerter, da dette giver resultatet -1. Men hvis B skifter til hjerter, bør jeg skifte til spar, da jeg derved forbedrer mit udbytte til +1.

Få den anden side ... o.s.v.

Tilsvarende fra B's synspunkt (overvej dette}.

Sagen er, at -1 ikke er et ligevægtspunkt, hvorfor mindst én af spillerne vil være tilbøjelig til at skifte strategi.

Som vi tidligere har set, vil i et spil med ligevægtspunkt ingen af spillerne kunne drage fordel af at vide, at modspilleren benytter sin Safety-first strategi. Dette er ikke tilfældet i spil uden ligevægtspunkt, her vil den ene spiller ofte kunne drage fordel af kendskab til modspillerens strategivalg.

Derfor gælder det for hver spiller at hindre, at modspilleren får kendskab til eget strategivalg. F.eks. skal man ikke spille hjerter hele tiden. Man skal i stedet blande sine strategier.

Men ikke alle blandinger er lige gode. Hvis modspilleren kan se et mønster i strategivalget (f.eks. hjerter hver anden gang), kan han benytte denne viden til at forbedre sit udbytte. Kan må al så sørge for, at blandingen over for modspilleren fremtræder som mønsterfri.

En mønsterfri blanding af strategierne opnås vel bedst ved at gøre strategivalget i hvert enkelt tilfælde tilfældigt. Men hvad mener man egentlig med at karakterisere sit strategivalg med ordet "tilfældigt"? Mener man hermed, at man ikke kan sige noget bestemt om sit strategivalg, at dette ikke kan karakteriseres ved noget som helst?

Spiller man plat og krone med en almindelig mønt, vil udfaldet af hvert kast også være tilfældigt. Sammenligner man imidlertid er række spilleforløb (hvert spilleforløb kan f.eks. omfatte 100 spil vil man se, at resultatet af hver af disse spilleforløb ikke ser tilfældigt ud. De forskellige resultater har alle den egenskab, at antal plat og antal krone er næsten lige store. Vi kan således karakterisere denne situation ved hyppigheden af de forskellige udfald (plat og krone), eller sagt på en anden måde ved de forskellige udfalds sandsynlighed.

Vi vil således sige, at et udfald har sandsynligheden a/n, hvis udfaldet forekommer ca. a gange i løbet af n spil, hvor både a og n er meget store tal. Hvis a er 0, vil vi tillægge udfaldet sandsynligheden 0.

Har man benyttet den fremgangsmåde at spille plat og krone om sit strategivalg, hvor f.eks. plat svarer til spar og krone svarer til hjerter, kan man altså karakterisere sin fremgangsmide ved at sige, at man har blandet de "rene" strategier på en sådan måde, at hver af de rene strategier forekommer med sandsynligheden ½, eller bliver vægtet med ½.

Symbolsk kan dette skrives som:

A	B
(½ a1, ½ a2)	(½ b1, ½ b2)

En sådan strategi vil vi kalde en blandet strategi i modsætning til en ren strategi, f.eks. a1. Bemærk i øvrigt, at en ren strategi, f.eks. a. kan opfattes som en blandet strategi: (1a1,0a2)

2.11 Opgave. Angiv de blandede strategier for A og B i det tilfælde, hvor

1) A afgør strategivalget ved et terningekast, således at et øjetal mindre end 3 svarer til spar, og et øjetal større end 2 svarer til hjerter.

2) B afgør strategivalget ved at trække 1 kort fra 1 spil kort med 52 kort, således at et billedkort svarer til en spar, og et af de Øvrige kort svarer til en hjerter.

Hvordan kan man i almindelighed skrive en blanding mellem 2 rene strategier a1 og a2?

2.12 Opgave. Hvordan kan følgende blandede strategier praktiseres:

(3/8 a1, 5/8 a2) og (7/12 bl, 5/12 b2). ?

Vort modelproblem kan formuleres: Hvilken blandet strategi skal de to spillere vælge for hver for sig at sikre sig størst muligt udbytte?

Der melder sig da følgende spørgsmål:

Hvad bliver udbyttet for de blandede strategier (x1a1,x2a2) og (y1b1,y2b2) under forudsætning af, at spillerne vælger strategi uden kendskab til den anden spillers valg?

		B b1	b2	
A	a1	u11	u12	ruder
	a2	u21	u22	ikke-ruder
		6er	ikke-6er	

Hvis A blander sine strategier i forholdet ruder/ikke-ruder (dvs. x1=1/4 og x2 = ¾), og hvis B blander sine strategier i forholdet 6er/ikke-6er (dvs. y1 = 1/6 og y2 = 5/6) vil de forskellige udfald forekomme sådan:

		B b1	b2	
A	a1	u11*1/4*1/6	u12*1/4*5/6	1/4
	a2	u21*3/4*1/6	u22*3/4*5/6	3/4
		1/6	5/6	

I det generelle tilfælde vil udbyttetavlen være:

		B b1	b2	
A	a1	u11*p*q	u12*p*(1-q)	p
	a2	u21*(1-p)*q	u22*(1-p)*(1-q)	1-p
		q	1-q	

u = u11*p*q + u12*p*(1-q) + u21*(1-p)*q + u22*(1-p)*(1-q) kaldes det forventede udbytte, underforstået pr. spil.

Vort modelproblem kan nu formuleres:

A: Hvilken p-værdi sikrer mig størst mulig u?

B: Hvilken q værdi sikrer mig mindst mulig u?

2.15 Opgave. Hvad er det forventede udbytte i opgave 2.3 hvis begge spillere blander strategierne i forholdet 1:1? Kan nogen af spillerne forbedre dette udbytte?

2.16 Opgave. Hvis B i opgave 2.4 blander sine strategier i forholdet 1:1, hvad er da A's bedste svar herpå i modellen og i virkeligheden (i teorien og i praksis)? Hvad er det tilsvarende forventede udbytte? Kan der angives en løsning til 2.4 ?

2.17 Opgave. Hvad bliver det for ventede udbytte i opgave 2.6, hvis både A og B blander strategierne i forholdet 1:1? Hvad er A's bedste svar (i teorien og i praksis), og hvad er det forventede udbytte, hvis B blander sine strategier i forholdet 1:1?, 14:5? Kan der angives en (evt. tilnærmet) løsning til 2.6?

2.18 Opgave. Samme spørgsmål som i opgave 2.17,blot for opgave 2.7 i stedet.

2.19 Opgave. Samme spørgsmål som i opgave 2.17, blot for opgave 2.8 i stedet.

2.20 Opgave. To kandidater, en demokrat (D) og en republikaner (R) konkurrerer om en plads i det amerikanske senat i en periode, hvor præsidenten er republikaner. De har begge valget mellem at lægge hovedvægten af valgkampagnen på udenrigspolitikken eller på indenrigspolitikken. En politisk ekspertgruppe ved et universitet sætter sig for at undersøge situationen og kommer til følgende vurdering:

		R	
		indenrigs	udenrigs
D	indenrigs	300000	-200000
	udenrigs	-100000	200000

Tallene angiver afvigelsen i stemmer fra en stemmefordeling på halvdelen til hver kandidat.

Bør kandidaterne vælge en ren strategi eller en Blandet strategi, og hvordan skal de rene strategier da mon omtrentlig vægtes. Hvordan kan en blandet strategi praktiseres i dette tilfælde?

2.21 Opgave. Fortsættelse af opgave 2.9:

Antonibald er nu brudt igennem og har et stykke tid belejret Tombstoneville. Det er imidlertid lykkedes Bourbaki at samle to kompagnier, med hvilke han ønsker at undsætte Tombstoneville og nå ind i byen.

Situationen er denne:

Undsætningsstyrken skal vælge mellem to mulige veje indtil byen, vej1 og vej2, der begge fører gennem en ellers ufremkommelig skov.

Antonibald kan afse tre kompagnier til at forhindre Bourbaki i at nå byen. Hvordan skal de to feltherrer placere deres kompagnier på de to veje? Kompagnierne skal holdes samlet for at være effektive. Troppetransport gennem skoven og foran byen kan ikke påregnes at finde sted på tilstrækkelig hurtig måde.

Hvordan skulle de to feltherrer placere deres kompagnier på de to veje, hvis Bourbaki i stedet havde haft tre kompagnier?

Modelproblem til 2.21:

Lad (0,2) betyde 0 kompagnier på vej 1 og 2 kompagnier på vej 2. Tilsvarende for (1,1), (0,3), osv.

Antal kompagnier, der kommer igennem til Tombstoneville, vil da være

		Antonibald			
		(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)
Bourbaki	(0,2)	0	0	1	2
	(1,1)	1	0	0	1
	(2,0)	2	1	0	0

Havde Bourbaki i stedet haft tre kompagnier, var situationen

		Antonibald			
		(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)
Bourbaki	(0,2)	0	0	1	2
	(1,1)	1	0	0	1
	(2,0)	2	1	0	0
	(3,0)	3	2	1	0

3. Det generelle modelproblem

Vi har i de foregående kapitler 1 og 2 betragtet en række problemer fra virkeligheden. Vi satte os det mål at nå frem til en 1øsning af disse problemer .

Til det formål lavede vi en model af hvert problem, og vi så eksempler på, at vi kunne fastlægge (definere) en løsning af modelproblemet på en sådan måde, at den kunne "oversættes" til en acceptabel løsning af problemet i virkeligheden.

(1.10)
$$\begin{tikzcd} \text{Virkelighed} & \text{Model} \\ \boxed{\text{Problem}} \arrow[r] & \boxed{\text{Problem}} \arrow[d] \\ \boxed{\text{Løsning}} & \boxed{\text{Løsning}} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Er det altid muligt at fastlægge en løsning af modelproblemet på denne måde? Og er det eventuelt muligt at fastlægge én bestemt modelløsning, der kan bruges i almindelighed til denne slags modelproblemer? Dvs. er det eventuelt muligt at sammenfatte de forskellige modelproblemer til samme modelproblem?

Hvis man kan indlægge et problem P1 som et specialtilfælde af et andet problem P2, siger man, at man kan generalisere P1 til P2, og at P-er en generalisation af P1.

Vi vil således kunne få en sammenfatning af vore modelproblemer, hvis de alle kan generaliseres til et og samme modelproblem.

3.1 Opgave. Find nogle eksempler på generalisationer fra dagligdagen. Hvilke fordele og hvilke ulemper har en generalisation?

3.2 Eksempler. En fynbo kan generaliseres til en dansker, til en skandinav, til en europæer, osv. De ting, der gælder for er. europæer, gælder specielt for en fynbo, hvorimod ikke alle ting, der gælder for en fynbo, gælder for en europæer. Eks. : En europæer er født på den nordlige halvkugle. En fynbo er født i Danmark. Man kan sige, at man ved en generalisation som regel opnår at sige mindre om mere.

3.3 Bemærkning. Ordet generalisation blev her brugt i forbindelse ned problemer.

Ordet bruges også i forbindelse med iagttagelser. Mange naturlove er således generalisationer af iagttagelser.

Eks.: Slipper man en bold, falder den til jorden. Prøver man igen, falder bolden påny til jorden. Hver gang man prøver, falder bolden til jorden. Man generaliserer da og får reglen eller loven: "Hvis man slipper en bold, falder den til jorden."

Vi kan nu generalisere vores foreløbige definition fra 1.8 til følgende definition:

3.4 Definition. Ved et Top Nulsum Spil forstås

* To spillere A og B med hver deres strategisæt (a1, a2, …, am) og (b1, b2, …, bn)

* En udbyttetavle

		B			
		b1	b2		bn
A	a1	u11	u12		u1n
	a2	u21	u22		u2n
	am	um1	um2		umn

* Spillets regler:

1. Begge spillere bar kendskab til udbyttetavlen.

2. Begge spillere vælger en strategi uden kendskab til den anden spillers valg.

3. Begge spillere ønsker hver for sig at sikre sig så stort ud bytte som muligt.

4. Top Nulsum Spil med ligevægtspunkt

Vi vil i dette kapitel søge at opbygge teorien eller modellen for Topersoners Nulsum Spil med ligevægtspunkt. Vi vil arbejde intuitivt, men søge at formulere resultaterne formelt, da vi som sagt nu arbejder inden for modellen.

I 3.4 har vi fastlagt vort modelproblem. Hvordan skal vi nu fastlægge løsningen til dette problem ?

Da modelproblemet et Top Nulsum Spil specielt omfatter spil med ligevægtspunkt, må løsningen til et Top Nulsum Spil specielt om fatte løsningen til et spil med ligevægtspunkt for at være tilfreds stillende. Hvad er da løsningen til et spil med ligevægtspunkt ? Ja, hvad er et ligevægtspunkt ?

Intuitivt er det et udbytte, der er størst i sin søjle og mindst i sin række (et saddelpunkt).

		B			
		b1	b2	...	bn
A	a1			3	
	a2			1	
	:	9	7	5	6
	am			4	

Udtrykt formelt har vi da følgende definition:

4.1 Definition. Ved et ligevægtspunkt forstås et udbytte u{ao,bo) med den egenskab at

1) u(ao,bo) ≥ u(ai,bo) for alle ai, og

2) u(ao,bo) ≤ u(ao,bj) for alle bj.

Vi har tidligere (1.10) fastlagt løsningen af et spil med ligevægtspunkt til at være et strategipar (ao,bo), der bestemmer et ligevægtspunkt. Det har derfor god merling at begynde med følgende arbejdsdefinition af en løsning til et Top Nulsum Spil. Denne definition kan så senere udvides, hvis der bliver behov derfor.

4.2 Definition. Ved en løsning til et Top Nulsum Spil forstås et strategipar (ao,bo) med den egenskab at

1) u(ao,bo) ≥ u(ai,bo) for alle ai, og

2) u(ao,bo) ≤ u(ao,bj) for alle bj.

Hvordan findes nu denne løsning ?

Lad os først generalisere og formalisere vor fremgangsmåde fra 1.II. Denne var karakteriseret ved, at vi først fandt sikkerhedsniveauet for hver strategi, hvorefter hver spiller valgte det sikkerhedsniveau, der var bedst for ham. Formaliseres dette fås:

4.3 Definition. Ved sikkerhedsniveauet for strategien ai, forstås tallet

$$\min_{1\leq j\leq n} \{uij\}$$

Ved sikkerhedsniveauet for strategien bj forstås tallet

$$\max_{1\leq i\leq n} \{uij\}$$

4.4 Definition. Ved A's maximin-strategi forstås en strategi, der giver A det højeste sikkerhedsniveau, altså en strategi, der er bestemt ved maximin-tallet:

$$\max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq n} \{uij\}$$

Ved. B's minimax-strategi forstås en strategi, der giver B det laveste sikkerhedsniveau, altså en strategi, der er bestemt ved minimax-tallet:

$$\min_{1\leq j\leq n} \max_{1\leq i\leq n} \{uij\}$$

Vi vil nu vende os mod spørgsmålet om, hvordan man kan finde en løsning. Dette vil vi gøre ved følgende opgave, der evt. kan benyttes som oplæg til gruppearbejde.

4.5 Opgave. Vi vil i denne opgave søge selv at opbygge teorien for Top Nulsum Spil med ligevægtspunkt ud fra spillene i kapitel 1 og 2. Arbejd intuitivt ved hjælp af geometriske tegninger) og udtryk til sidst resultatet formelt.

1) Undersøg for hvert spil det indbyrdes størrelsesforhold mellem maximin-tallet og minimaxtallet. Kan der uddrages og bevises en lovmæssighed herfor ?

2) Undersøg for hvert spil forbindelsen mellem eksistensen af et ligevægtspunkt og det under 1) nævnte størrelsesforhold.. Kan der uddrages og bevises en lovmæssighed herfor ?

3) Konstruer et spil, hvor B har to minimax-strategier, og hvor B's ene minimax-strategi danner et ligevægtspunkt sammen med A's maximin-strategi. Hvad gælder da om denne sammen med B's anden minimax-strategi ? Kan der uddrages og bevises en lovmæssighed herfor?

4) Undersøg for hvert 2x2 spil forbindelsen mellem eksistensen af et ligevægtspunkt og eksistensen af dominans (def.4.10). Kan der uddrages og bevises en lovmæssighed herfor ?

Vi vil i det følgende angive løsningen til opgave 4.5. I nogle af vore problemer (f.eks. 1.1 og 1.3) er

$$\max_i \min_j \{uij\} = \min_j \max_i \{uij\}$$

I andre af vore problemer (f.eks. 2.1 og 2.3) er

$$\max_i \min_j \{uij\} < \min_j \max_i \{uij\}$$

Dette kan generaliseres til:

4.6 Regel. For et Top Nulsum Spil gælder:

$$\max_i \min_j \{uij\} \leq \min_j \max_i \{uij\}$$

Et formelt bevis kan findes i S&A side 45-46.

I problemerne i kapitel 1 og 2 bestemmer Safety-first strategierne i visse tilfælde et ligevægtspunkt (f.eks. 1.1 og 1.3); i andre tilfælde ikke (f.eks. 2.1 og 2.3). Afgørende er i disse tilfælde om maximintallet er lig med minimaxtallet. Dette kan generaliseres til

4.7 Regel. For et Top Nulsum Spil gælder:
Følgende to udsagn er ensbetydende:
* a og b bestemmer et ligevægtspunkt med udbyttet v (spillets værdi)
* a og b har følgende tre egenskaber:
1) a er maximin-strategi for A
2) b er mininaxs-trategi for B
3) $\max_i \min_j \{uij\} = \min_j \max_i \{uij\} = v$

Et formelt bevis kan findes i S&A side 46-47.

		B b1	b2	B3
A	a1	4	-2	1
	a2	-2	1	3
	a3	-1	-3	1

I ovenstående spil vil a1, uanset hvad B vælger, give A et udbytte, der et større end eller lig med det udbytte, a3 giver. Det kan derfor aldrig være mere fordelagtigt for A at bruge a3 i stedet for a1. Vi vil sige, at a1 dominerer a3. På tilsvarende måde ses, at b2 dominerer b3. Vi formaliserer dette til følgende definition:

4.10 Definition.
A: ai dominerer aj hvis uik ≥ ujk for alle k.
B: bi dominerer bj hvis uki ≤ ukj for alle k

Ved at undersøge 2x2 spillene i kapitel 1 og 2 ses det, at i disse spil er dominans ensbetydende med eksistensen af et ligevægtspunkt. Dette kan generaliseres til følgende regel:

4.11 Regel. For et Top Nulsum Spil gælder:
Følgende to udsagn er ensbetydende:
* Der findes et ligevægtspunkt.
* Der er dominans enten hos A eller hos B.

Et formelt bevis kan findes i S&A side 49.

5. 2x2 TopNulSum uden ligevægtspunkt

Vi går nu over til at betragte Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt. Disse er ifølge 4.6 og 4.7 bestemt ved,at

$$\max_i \min_j \{uij\} < \min_j \max_i \{uij\}$$

Nu er det ved problemløsningen en god gammel regel at begynde med do simpleste tilfælde først. Vi vil derfor i dette kapitel kun behandle 2*2 Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt.

Disse er i følge 4.11 bestemt ved, at der ingen dominans findes.

5.1 Opgave. Vis, at der er to muligheder for et 2x2 Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt.

		B	
		b1	b2
A	a1	u11 <	u12
		^	v
	a2	u21 >	u22

Eller

		B	
		b1	b2
A	a1	u11 >	u12
		v	^
	a2	u21 <	u22

Som eksempel på det første vil vi I det følgende betragte spillet:

		B	
		b1	b2
A	a1	-4	3
	a2	2	-1

Problemet er (se 2.II):

Hvilken blandet strategi skal de to spillere vælge for hver for sig at sikre sig størst muligt udbytte?

Hvad skal vi forstå ved en løsning til et 2 * 2 Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt ?

En mulighed er at køre videre med arbejdsdefinitionen 4.2, hvor vi blot erstatter ordet "strategi" med ordene "blandet strategi". En blandet strategier betegnes x for A og y for B. u(x,y) betegner nu det forventede udbytte for det blandede strategipar (x,y).

Lad os derfor foreløbig gøre det. Hvis konsekvenserne af denne definition bliver uantagelige for vort problem fra virkeligheden, må vi da vende tilbage og ændre denne definition. Med den nye formulering vil 4.2 lyde:

5.2 Definition. Ved en løsning til et Top Nulsum Spil forstås et par af blandede strategier (xo,yo) med den egenskab at

1) u(xo,yo) ≥ u(x,yo) for alle x, og

2) u(xo,xo) ≤ u(xo,y) for alle y.

Vi vil nu se nærmere på vores eksempel:

		B		
		b1	b2	vægt
A	a1	-4*x*y	3*x*(1-y)	x
	a2	2*(1-x)*y	-1*(1-x)*(1-y)	1-x
	vægt	y	1-y	

Det forventede udbytte bliver da

u = -4*x*y + 3*x*(1-y) + 2*(1-x)*y + -1*(1-x)*(1-y)

Vort modelproblem kan nu formuleres:

A: Hvilken x-værdi sikrer mig størst mulig u?

B: Hvilken y-værdi sikrer mig mindst mulig u?

Det forventede udbytte vil afhænge af to variable x og y, og kan derfor illustreres ved en flade i rummet, enten opbygget fysisk mellem fire fysikstativer, eller indtegnet på en grafisk formelregner.

I begge tilfælde ses, at udbyttefladen kan opfattes som frembragt af en ret line som flyttes gennem rummet medens den samtidig skifter hældning.

Ved en flytning i x-aksens retning vil x ændre sig fra en konstant værdi r til en anden konstant værdi s, medens y vil variere i begge tilfælde.

Hvis $x = 0$ vil udbyttelinien have ligningen:

$u = -4*0*y + 3*0*(1-y) + 2*(1-0)*y + -1*(1-0)*(1-y)$, eller

$u = 2y – (1-y) = 3y – 1$

Dette er ligningen for en linie med begyndelsestal –1 og hælding 3.

Hvis $x = 1$ vil udbyttelinien have ligningen:

$u = -4*1*y + 3*1*(1-y) + 2*(1-1)*y + -1*(1-1)*(1-y)$, eller

$u = -4y +3*(1-y) = -7y +3$

Dette er ligningen for en linie med begyndelsestal 3 og hælding -7.

Udbyttelinien har altså skiftet hældning fra +3 til –7 ved at flytte fra $x = 0$ til $x = 1$.

Skæringspunktet mellem de to linier finde ved at sætte de to ligninger lig hinanden:

$3y – 1 = -7y +3$

Dette giver skæringspunktet $y = 0.4$, og $u = 0.2$

5.3 opgave. Vis at ved en flytning i y-aksens retning vil $y = 0$ og $y = 1$ give følgende to ligninger:

$y = 0$: $u = 4x –1$

$y = 1$: $u = -6*x + 2$

og skæringspunktet $x = 0.3$, og $u = 0.2$

I begge tilfælde vil udbytte-liniens hældning altså skifte fortegn. Der må da være et sted unbdervejs, hvor hældnigen er nul:

5.4 opgave. Vis at ved en flytning i x-aksens retning vil $x = r$ give følgende ligning:

$x = r$: $u = (3-10r)*y + (4r-1)$

For hvilket r er hældningen nul?

5.5 opgave. Vis at ved en flytning i y-aksens retning vil $y = s$ give følgende ligning:

$y = s$: $u = (4-10s)*x + (3s-1)$

For hvilket s er hældningen nul?

5.6 opgave. Vis at de fundne tal $x = 0.3$ og $y = 0.4$ er en løsning til spillet, da de opfylder kravet i 5.2. Løsningspunktet (x,y) kaldes et saddelpunkt: i den ene retning går det nedad til begge sider, og i den anden retning går det opad til begge sider.

Ifølge opgave 5.6 er løsningen altså:

A skal blande sine strategier i forholdet 3:7 og spille a1 med sandsynligheden 3/10, og a2 med sandsynligheden 7/10.

B skal blande sine strategier i forholdet 4:6 og spille b1 med sandsynligheden 4/10, og b2 med sandsynligheden 6/10.

Spillets værdi er 0.2.

		B		
		b1	b2	
A	a1	-4	3	2- -1 =3
	a2	2	-1	3- -4 = 7
		3- -1 = 4	2- -4 = 6	

Tilsyneladende kan vægttallene findes af udbyttetavlen ved at finde tallenes 'krydsforskel'

5.7 opgave. Find løsningen til nedenstående spil, og kontroller og krydsforskelsreglen også gælder her.

		B	
		b1	b2
A	a1	-5	7
	a2	2	-1

5.8 opgave. Find løsningen til nedenstående spil, og kontroller og krydsforskelsreglen også gælder her.

		B	
		b1	b2
A	a1	u11	u12
	a2	u21	u22

5.9 opgave. Findes der andre løsninger? Overvej følgende bevis:

Findes der eventuelt andre losninger ?

Lad os inddele punkterne på u-fladen i 3 mængder:

1) Hjørnepunkter u(0,0), u(0,l), u(l,0), u(l,l)

2) Indre kantpunkter u(x,0), u(x,l), u(0,y), u(l,y), hvor 0<x<l og 0<y<l.

3) Indre fladepunkter u(x,y) , hvor 0<x<l og 0<y <1.

Hjørnepunkterne kan ikke være løsning. Vi ville da have et ligevægtspunkt, og vi betragter netop spil uden sådanne.

Et indre kantpunkt kan ikke være løsning. Kanterne hælder til en af siderne, cg der vil således altid være punkter på samme kant, der er højere, og et punkt, der er lavere end et givet punkt.

Eventuelle løsninger må derfsr være indre fladepunkter og kun sådanne, for hvilke linierne i de to akseretninger er vandrette. Og af sådanne punkter findes der, som vi har set, netop ét.

5.10 opgave. Overvej at den ovenstående undersøgelse også kan gennemføres for den anden type spil:

		B	
		b1	b2
A	a1	u11 >	u12
		v	^
	a2	u21 <	u22

Vi har nu afsluttet modelopbygningen (teoridannelsen) af 2x2 Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt, og vil nu anvende denne model på problemerne i kapitel 2.

5.11 Opgave. Anvend modellen på følgende problemer (dvs. find løsningen og værdien af spillene og vurder resultatet: 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 og 2.8.

5.12 Opgave. Anvend modellen på 2.9 og 2.20 og vurder resultatet.

5.13 Opgave. På en lang togrejse sidder Hans over for en fortryllende ung dame. Denne Foreslår Hans at de for at slå tiden ihjel skal spille følgende spil:

Begge rækker en knyttet hånd frem og åbner den samtidigt. Hvis ingen af spillerne har en rnønt i hånden, befaler damen 5 kr. til Hans. Hvis begge spillere har en mønt i hånden, betaler damen 15 kr til Hans. I de to tilfælde hvor kun én af spillerne har mønt i hånden, betaler Hans, for at det skal være et fair spil, 10 kr. til den skønne.

Bør Hans acceptere spillet ?

5.14. Bekymring. Efter 2x2 spil skal vi nu til at finde løsningen til 3x3 spil, 4x5 spil osv. Dvs. vi skal søge at finde en løsning til det generelle mxn Top Nulsum spil.

Man kan bevsie, at ethvert mxn Top Nulsum spil har mindst én løsning. Beviset kan ses i S&A kapitel 6.

Den netop fundne løsning til 2x2 spil bygger desværre på en geometrisk metode, som ikke kan generaliseres, da rummet kun har tre dimensioner. Vi bør derfor lede efter en alternativ løsningsmetode til 2x2 Top Nulsum spil, som kan generaliseres uden vanskeligheder.

Det viser sig at vi her kan anvende en matematisk model, der hedder lineær programmering.

6. Alternativ løsning til Top Nulsum Spil

Et 2x2 Top Nulsum spil uden ligevægtspunkt består af 2 spillere, der skal vægte to strategipar for at opnå udbyttet v fra udbyttetavlen:

		B		
		b1	b2	vægt
A	a1	u11*x1*y1	u12*x1*y2	x1
	a2	u21*x2*y1	u22*x2*y2	x2
	vægt	y1	y2	

B's problem: Vi antager, at spillets værdi v er positiv. Uanset hvad A vælger skal spillets udbytte højst være v:

u(a1,y) = u11*y1 + u12*y2 ≤ v , og
u(a2,x) = u21*y1 + u22*y2 ≤ v
y1 + y2 = 1

Vi dividerer med v og sætter y1/v = y1':

B: u11*y1' + u12*y2' ≤ 1
u21*y1' + u22*y2' ≤ 1
T = y1' + y2' max

Bruges matricer, skal U transponeres til $\underline{U}$:

B: $U = \begin{pmatrix} u11 & u12 \\ u21 & u22 \end{pmatrix}$ og Y = (y1',y2')

$Y*\underline{U} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og T = y1' + y2' max

T=1/v maksimeres da B ønsker at minimere v.

Et tilsvarende problem kan opstilles for A:

A: u11*x1' + u21*x2' ≥ 1
U12*x1' + u22*x2' ≥ 1
T = x1' + x2' min

A: $U = \begin{pmatrix} u11 & u12 \\ u21 & u22 \end{pmatrix}$ og $X = \begin{pmatrix} x1' \\ x2' \end{pmatrix}$

$\underline{U} * X \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og T = x1' + x2' min

T=1/v minimeres da B ønsker at maksimere v.

Med denne omformulering kan spillernes problem løses ved lineær programmering, en metode der nemt kan generaliseres til de tilfælde hvor spillerne har mere end 2 strategier hver.

7.1 Eksempel.

		B	
		b1	b2
A	a1	-4	3
	a2	2	-1

Eller formuleret som lineær programmering:

$U = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ og $X = \begin{pmatrix} x1' \\ x2' \end{pmatrix}$ og Y = (y1',y2')

A: $\underline{U} * X \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og T = y1' + y2' min

B: $Y*\underline{U} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og T = y1' + y2' max

Løsningen kan finde i et Excel regneark ved brug af Problemløser under Funktioner:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Værdi =*	**0,2**	*A-ramme*		1,0	1,0		
2			*B-MAX*	*TB*	*y1'*	*y2'*	*y3'*	*y4'*
3		*A-MIN*		*5,0*	30%	70%		
4	*B-ramme*	*TA*	*5,0*		1,5	3,5		
5	1,0	*x1'*	40%	2,0	-4	2		
6	1,0	*x2'*	60%	3,0	3	-1		
7		*x3'*						
8		*x4'*						
9		*x5'*						

Fra E5 indtastes udbytte-tavlen. Fra D5 og ned indtastes A's vægte. Fra E4 og hen indtastes B' s vægte. Vægtene plusses til TA og TB i hhv. C4 og D3, der begge efter optimering bliver lig med 1/v, hvor v angives i B1. A's og B's begrænsningsrammer beregnes af matrix-formler indtastet hhv. i E1 og hen og i A5 og ned. (Husk ctrl+shift+enter ved indtastning)

E1=MPRODUKT(TRANSPONER(E5:E6);D5:D6)
A5=MPRODUKT(E4:F4;TRANSPONER(E5:F5))

Af regnearket ses:

A skal vælge strategien (40% a1, 60% a2)
B skal vælge strategien (30% b1, 70% b2)
Spillets værdi er 0.2

7. mxn Top Nulsum Spil

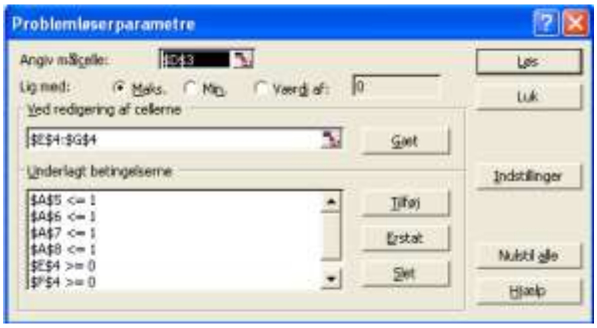
Vi vil nu betragte det almene mxn Top Nulsum Spil uden ligevægtspunkt. Man kan vise, at ethvert spil har én løsning (S&A kapitel 6). Vi vil her se, hvordan denne løsning kan findes.

8.1 Eksempel. Spil spillet og lav en rapport.

		B b1	b2	B3
A	a1	5	8	4
	a2	6	1	9
	a3	2	3	6
	a4	7	8	1

Excel's Problemløser giver:

Værdi =	**5,52**	*A-ramme*		1	1	1
		B-MAX	*TB*	*y1'*	*y2'*	*y3'*
	A-MIN		*0,18*	44%	27%	29%
B-ramme	*TA*	*0,18*		0,08	0,05	0,05
1	*x1'*	56%	0,10	5	8	4
1	*x2'*	35%	0,06	6	1	9
0,62	*x3'*	0%	0,00	2	3	6
1	*x4'*	8%	0,02	7	8	1



Af regnearket ses:

A's strategi (56% a1, 35% a2, 0% a3, 8% a4) B's strategi (44% b1, 27% b2, 29% b3) Spillets værdi er 5.52

Tilsyneladende skal A ikke benytte strategi a3. Er det mon fordi den bliver domineret af en kombination af de øvrige strategier?

8.2 Opgave. Spil og løs nedenstående 2x4 spil med metoderne i kapitel 6 og 7.

		B b1	b2	b3	b4
A	a1	-6	-1	1	4
	a2	7	-2	6	-5

8.3 Opgave. Spil og løs nedenstående 5x2 spil med metoderne i kapitel 6 og 7.

		B b1	b2
A	a1	4	-3
	a2	2	1
	a3	-1	3
	a4	0	-1
	a5	-3	0

8.4 Opgave. Overvej om følgende regel gælder: Ethvert 2xn og mx2 Top Nulsum Spil kan reduceres til et 2x2 Top Nulsum Spil.

8.5 Opgave. Spil og løs nedenstående 3x3 spil.

		B b1	b2	b3
A	a1	0	3	1
	a2	2	1	2
	a3	1	2	0

8.6 Opgave. Brug denne formel til selv at fremstille mxn spil, som derefter spilles og løses

=HELTAL(20*(SLUMP()-0,5))

8.7 Opgave. Spil og løs nedenstående 3x4 spil. Er der noget galt med spillet?

		B b1	b2	b3	b4
A	a1	1	0	0	2
	a2	0	1	0	1
	a3	0	0	1	-1

8. Top Ikke Nulsum Spil

Efter nu at have set nogle anvendelser af teorien for Topersoners Nulsum Spil, vil vi nu vende tilbage til denne model for at undersøge, om vi eventuelt kan videreudbygge den, så den dækker flere situationer i virkeligheden.

Om modellen Topersoners Nulsum Spil kan generelt siges, at den dækker sådanne situationer i virkeligheden, hvor to parter (personer, grupper, nationer, m.m.) i fællesskab skal afgøre en sag samtidig med, at de har modsatte interesser i resultatet af afgørelsen: Hvad den ene vinder, taber den anden og omvendt.

Vi vil i dette kapitel betragte situationer, hvor de to parter kun har delvis modsatte interesser, hvorfor der er mulighed for et eventuelt samarbejde, hvad der jo ikke er mulighed for ved Nulsum Spil. Disse situationer vil vi kalde Topersoners Ikke Nulsum Spil. Vi vil skelne mellem to former for Top Ikke Nulsum Spil: de, der er ned, og de, der er uden mulighed for forhandling om samarbejde m.h.t. strategivalg.

9.1 Eksempel. Fangedilemmaet. To personer A og B bliver anholdt. Politiet er sikker på at de har begået en given forbrydelse; men man mangler beviser. De to fanger holdes adskilt efter anholdelsen. De får begge følgende besked af anklageren:

Hvis de begge tilstår, vil de begge blive dømt; men de vil slippe for den strengeste straf; de vil få 8 års fængsel hver. Hvis kun den ene tilstår, vil han kunne bruges som hovedvidne, og han vil derfor slippe med 3 måneder, hvorimod den anden vil få lovens strengeste straf, 10 år. Hvis ingen af dem tilstår, vil de få 1 år hver son følge af mindre ulovligheder, de har begået (ulovlig våbenbesiddelse, m.m.)

		B	
		ikke tilstå	tilstå
A	ikke tilstå	(-1,-1)	(-10,- ¼)
	tilstå	(- ¼,-10)	(-8,-8)

Talparret (- ¼,-10) angiver, at A's udbytte er -¼ og B's udbytte er -10.

Hvis spillerne ikke har mulighed for at forhandle kan dette spil betragtes som to spil, hvor hver af spillerne spiller mod naturen N.

		N	
A	A1	-1	-10
	A2	- ¼	-8

	B	
	B1	B2
N	-1	- ¼
	-10	-8

9.2 Opgave. Overvej problem 9.1 og spil spillet.

Hvilket resultat vil vor model for Top Nulsum Spil give i dette tilfælde ?

Det ses, at for A gælder, at a2 dominerer a1, og for B gælder det, at b2 dominerer b1. Top Nulsum Spil modellen vil altså give løsningen (a2,b2), dvs. at begge tilstår. (Er dette en realistisk løsning?)

Hvad sker der, hvis spillet 9.1 gentages flere gange, og vi antager, at spillerne får resultatet at vide efter hver runde ?

9.3 Opgave. Spil 9.1 20 gange og udfyld en spillerapport.

Hvis man spiller 9.1 flere gange, kunne man formode, at spillerne finder frem til at koordinere deres strategi, så de hele tiden spiller (a1,b1).

Hvis f.eks. A føler sig fristet til en enkelt gang at skifte til a2 for at få et større udbytte, kan B straffe ham ved at skifte til b2. Resultatet af de to spil vil da for A blive -¼-8 = -8¼ eller -¼-10 = -10¼ i stedet for -1-1 = -2. Dette kan A naturligvis ikke være interesseret i.

Tilsyneladende bliver resultatet da et forventet udbytte på -1 til begge spillere, hvor Top Nulsum Spil modellen forudsagde et resultat på -8.

På den anden side:

Vi har lige set at A ikke vil føle sig fristet til at bryde (a2,b2)-mønstret; med mindre det er sidste spil, thi så vil B ikke have mulighed for at hævne sig . I det hele taget kan sidste spil i et spilleforløb altid opfattes, som om spillet kun skulle spilles én gang.

Dvs. resultatet af sidste spil må blive (a2,b2).

Men så har truslen om hævn ikke længere effekt i 2.sidste spil, dvs. A vil i dette spil føle sig fristet til at skifte til a2, i håbet om at opnå en større gevinst, og han er nødt til at skifte til a2, hvis han vil sikre sig mod en ekstra udgift som følge af B's eventuelle skift til b2 i sidste spil.

Sagt på en anden måde, da sidste spils resultat er givet på forhånd, kan 2. sidste spil betragtes som det sidste spil og dermed som et spil, der kun spilles én gang, dvs. resultatet af 2.sidste spil må også blive (a2,b2). Men dette argument kan nu fortsættes hele vejen op gennem spillet med det til følge, at resultatet bliver (a2,b2) hver gang, hvilket stemmer overens med Top Nulsum Spil modellens løsning.

På den anden side:

Mange vil sikkert være af den opfattelse, at de to spillere vil spille (a1,b1) så længe man er 'midt' i spillet, dvs. der er langt til sidste spil, eller hvis man ikke ved hvornår spillet ender.

Alt i alt synes det således tvivlsomt, om man kan opstille en tilfredsstillende model, der dækker spillet 9.1.

9.4 Eksempel

		E fred	E aggression
T	fred	(4,4)	(-4,6)
	aggression	(6,-4)	(-3,-3)

Dette eksempel indeholder samme problematik som 9.1 (overvej dette.)

Det kan måske illustrere lidt af problematikken i den storpolitiske situation i Europa op til 2. verdenskrig. Spillet kan opfattes sådan:

Tyskland (T) og England med flere (E) afgør f.eks. hver dag eller hver uge, om de vil vælge en fredelig politik eller en aggressiv politik.

E valgte i begyndelsen til stadighed den fredelige politik, og til trods for at T flere gange skiftede til den aggressive politik, ønskede E dog at bibeholde den fredelige politik og sagde f.eks. gennem München-aftalen, at hvis T ville holde sig til den fredelige politik i fremtiden, ville T få sine sidespring tilgivet.

9.5 Eksempel. Som en flerpersoners parallel til fangedilemmaet kan man betragte et spil med mange landmænd, hvor hver landmand hal1 to strategier: indskrænket og fuld kornproduktion.

Hvis alle landmændene vælger indskrænket produktion, bliver prisen høj, og de vil alle være ret godt stillet.

Hvis alle landmændene vælger fuld produktion, bliver prisen lav, og de vil alle være ret dårligt stillet.

Et strategiskift hos er. enkelt landmand vil ikke nævneværdigt påvirke prislejet. (Dette er en antagelse for et marked med konkurrence).

En given landmand vil derfor uanset de øvrige landmænds strategier være bedre stillet med fuld produktion.

Fuld produktion dominerer således indskrænket produktion, mon hvis alle landmænd retter sig efter dette, bliver de alle ret dårligt stillet.

9.6 Konklusion. Som konklusion på vore bestræbelser på at opbygge en model for Topersoners Ikke Samarbejdsspil kan vi kun konstatere, at dette ikke har været muligt at gøre på tilfredsstillende måde.

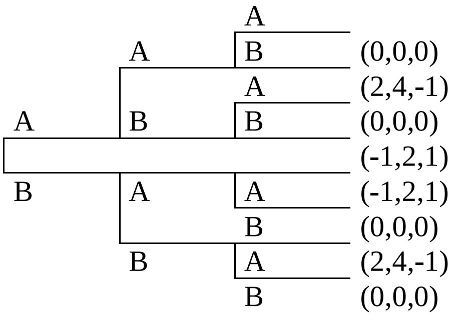
9. N-personers spil

Hidtil har vi betragtet spil med kun to spillere. Vi vil nu se nærmere på spil med flere end to spillere, dvs. N-personers Spil (N>2) .

15.1 Eksempel. I et givet politisk parti findes der tre fløje, venstrefløjen 1, midten 2 og højrefløjen 3. Partiet skal udarbejde et nyt oplæg til ét af to politiske temaer A og B (f.eks. boligpolitik og finanspolitik). Fløjene, der er nogenlunde lige store, afgør ved almindelig stemmeflertal hvilket tema, partiet skal vælge. En arbejdsgruppe vil da blive dannet af de fløje, der har stemt på vindertemaet. Yderfløjene vil ikke kunne samarbejde, og midterfløjen vil have lettere vel at samarbejde med venstrefløjen end med højrefløjen.

Udbyttefordelingen fremgår af nedenstående figur: Vælger fløj 1 tema A, fløj 2 tema A og fløj 3 tema B, får fløj 1 to nytteenheder, fløj 2 fire enheder, og fløj 3 mister en nytteenhed. Udbyttefordelingen bliver da (2,4,-1), osv.

Hvordan skal de tre fløje stemme, og hvilket udbytte kan de forvente ?



8.2 Definition. Ved et Npersoners Spil forstås et spil, hvor N spillere (N>2) hver skal vælge én blandt n række strategier. Til hvert sæt på N strategier er tilegnet et talsæt, der angiver udbyttefordelingen blandt de enkelte spillere, spillerne er interesseret i hver for sig at sikre sig størst muligt udbytte.

Hvis alle spillere i N personers Spillet 15.1 blander strategierne i forholdet 1 til 1, bliver alle 8 resultater lige sandsynlige. Spiller 1 kan da (pr. spil i det lange løb) forvente udbyttet ¼, spiller 2 kan forvente udbyttet 1½ , og spiller 3 kan forvente udbyttet 0. Den forventede udbyttefordeling bliver da (1/4 , 1½, 0)

I et Samarbejdsspil samordner spillerne deres strategivalg (dvs. indgår koalitionen K(1,2)) vil denne koalition optræde som én spiller og Trepersoners spillet vil da reduceres til følgende Topersoners Ikke Nulsum Spil (I), hvor udbyttetallet for K(1,2) er summen af udbyttetallene for 1 og for 2:

(I)	3	
K(1,2)	A	B
AA	(0,0)	(6,-1)
AB	(0,0)	(1,1)
BA	(1,1)	(0,0)
BB	(6,-1)	(0,0)

(II)	3	
K(1,2)	A	B
AA	0	6
AB	0	1
BA	1	0
BB	6	0

Da koalitionen K(1,2) kan risikere, at 3 for at hævne sig spiller med det formål at skade koalitionen mest muligt, må den betragte sit eget Top Nulsum Spil (II) for at se hvor stort et udbytte, den kan sikre sig. Det ses umiddelbart, at løsningen til dette spil er, at koalitionen skal blande strategierne AA og BB i forholdet 1 til 1, hvorved den sikrer sig udbyttet ½*6 = 3.

Spillerne 1 og 2 kan således opnå en forbedring af deres fælles udbytte på 3-(1/4+1½) = 1 ¼ ved at indgå i koalitionen K(1,2).

Spørgsmålet er nu, om spillerne 1 og 2 indbyrdes kan blive enige om at dele deres fælles udbytte. Vi har da at gøre med et Topersoners Samarbejdsspil mellem 1 og 2. Vi skal derfor først finde spillets Status quo punkt, dvs. det udbytte, spilleren under alle omstændigheder kan sikre sig.

For spiller 1 må det værste tilfælde være, hvis alle modspillere går sammen i en koalition med det formål at skade ham mest muligt.

Vi vil da have følgende Top Nulsum Spil:

		K(2,3) AA	AB	BA	BB
1	A	0	2	0	-1
	B	-1	0	2	0

Det ses heraf, at 1 kan sikre sig udbyttet -1.

15.5 Opgave. Vis, at 2 kan sikre sig udbyttet 0, samt at 3 kan sikre sig udbyttet -½. Vis endvidere, at koalitionen K(2,3) kan sikre sig udbyttet 1½ , og at koalitionen K(1,3) kan sikre sig udbyttet ½, samt at den store koalition K(1,2,3) kan sikre sig udbyttet 5.

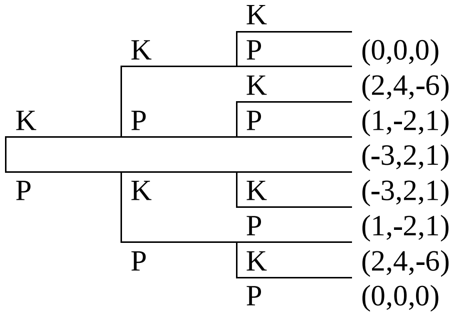
Som vi kan se af ovenstående eksempel 15-1 er det væsentligste spørgsmål i Npersoners Samarbejdsspil ikke i første omgang, hvilke strategier spillerne skal vælge, men snarere hvilke koalitioner der kan dannes, hvilket udbytte de forskellige koalitioner kan sikre sig, samt spørgsmålet om, hvordan det fælles udbytte skal deles mellem koalitionens medlemmer. I det følgende vil vi derfor gå ud fra, at hvis først disse spørgsmål er løst, er det en simpel sag for de forskellige koalitioner ved passende strategivalg at sikre sig det påregnede udbytte.

5-7 Definition. En løsning til et Npersoners Spil er en angivelse af

* hvilke koalitioner der dannes
* det største sikre udbytte for samtlige koalitioner (sikkerhedsniveauerne)
* udbyttefordelingen mellem spillerne.

15.9 Opgave. Vis at sikkerhedsniveauerne i eksemplet 15-1 er
K(1)=-½, K(2)=0, K(3)=-½, K(1,2)=3,
K(1,3)=½, K(2,3)=1½, K(1,2,3)=5

15.10 Opgave. Betragt et spil hvor 3 spillere samtidig skal vise en mønt. Hver spiller har da to strategier plat (P) og krone (K). Udbyttefordelingen fremgår af nedenstående figur:



Ovenstående spil er åbenbart et Nulsum Spil, idet udbyttet ikke hentes uden for spillet, men skal betales af spillerne selv: Hvad nogle vinder må andre betale og omvendt. Af denne grund kunne Topersoners Nulsum Spil aldrig betragtes som Samarbejdsspil. Gælder dette også for Npersoners Nulsum Spil?

Angiv mindst to ligevægtspunkter.

Angiv spillets sikkerhedsniveauer.

15.3 Opgave.Tre spillere 1, 2 og 3 står over for det problem at skulle danne en koalition mellem to af spillerne. Hvis det lykkes at danne en sådan koalition, skal den tredje spiller betale koalitionen 2 kr. En koalition ep dannet, når dens spillere er enige om, hvordan de 2 kr. skal fordeles iblandt dem. Hvis det ikke lykkes at danne nogen koalition inden foret vist tidsrum, får ingen af spillerne noget udbytte.

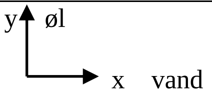
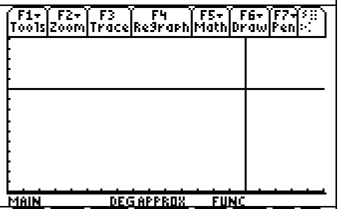
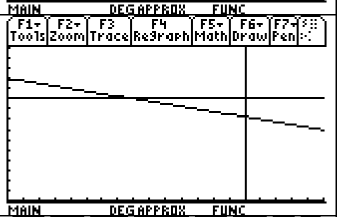
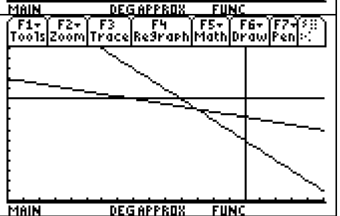
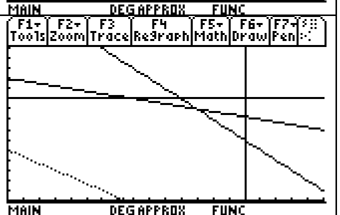
Overvej og spil spillet. Find en mulig løsning.

15-14 Opgave. Samme spil som i 15-13 blot med følgende ændring: Hvis spillerne 1 og 2 danner koalition, skal spilleren 3 betale 3 kr., hvis 1 og 3 danner koalition skal 2 betale U kr., og hvis 7 og 3 danner koalition, skal 1 betale 5 kr. Overvej eller spil spillet og angiv en eventuel løsning.

15.15 Opgave. Samme spil som 15.14 blot med følgende ændring: Hvis spillerne 2 og 3 danner koalition, skal spilleren 1 betale 10 kr. Overvej eller spil spillet og angiv en eventuel løsning.

10. Lineær programmering

Lineær programmering bruges til at optimere et bestemt tal (at maksimere overskuds-tallet, at minimere omkostnings-tallet osv.) inden for en række begrænsninger på andre tal, f.eks. råstoffer, kapital og arbejde. I praksis benyttes Excel til løsning.
Eksempel. Fra en markedsbod sælges øl og vand. Råstoffer er her øl og vand, kapitalen er budgettet og salgsboden, og arbejdskraften er sælgeren. Begrænsninger giver grafisk en polygon (mangekant). Niveaulinierne er parallelle da dæknings-bidraget D kun har betydning for skæringen med y-aksen. At øge eller formindske D svare altså til at parallelforskyde niveaulinien hen over polygonen. Den optimale værdi fås da hvor en niveaulinie forlader (tangerer) polygonen, hvilket altid vil ske i et (eller to) hjørner. Man kan derfor forudsige den optimale situation ved at beregne alle hjørnepunkter (n ligninger med n ubekendte), samt D's værdi i disse (simplex-metoden). Denne metode bruges hvis antallet af variable er større end 2.

Virkelighed	Ligninger	Grafik
Antal kasser vand Antal kasser øl	x y	
Begrænsning på råstoffer: Boden kan højst indeholde Højst 15 kasser vand Højst 10 kasser øl	$0 \le x \le 15$ $0 \le y \le 10$	
Begrænsning på kapital: Indkøbspris: 25 kr. pr. kasse vand 100 kr. pr. kasse øl Højst 1200 kr. kan investeres.	$25*x + 100*y \le 1200$ $(y \le -\frac{1}{4}*x + 12)$	
Begrænsning på arbejde: I åbningstiden kan sælgeren højst nå at sælge 21 kasser.	$x + y \le 21$ $(y \le -x + 21)$	
Overskud til dækning af faste omkostninger (leje) og fortjeneste (dækningsbidrag D): Kr. 80/120 pr. kasse vand/øl.	$D = 80*x + 120*y$ $y = -\frac{2}{3}*x + \frac{D}{120}$ N0: D = 0: $y = -2/3*x$ N600: D = 600: $y = -2/3*x + 5$	
Løsning: Der skal indkøbes 12 kasser vand og 9 kasser øl. Dækningsbidraget bliver da D = 2040 kr.	'Solve ($-\frac{1}{4}*x+12 = -x+21,x$)' giver x= 12 'y =-x + 21|x=12' giver y = 9 'D = 80*x + 120*y | x=12 and y = 9' giver D = 2040