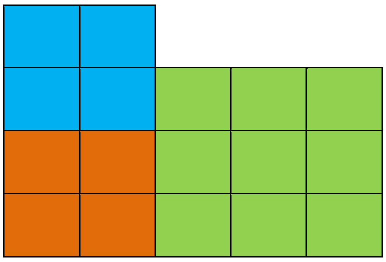
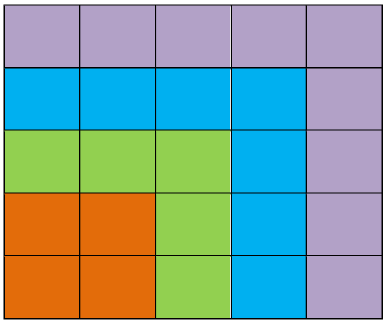
BundtBundt Tal

på et BundtBundt Bræt

Matematik med barnets egne tal
*Et paradigme-skift fra **MateMatisme** til **MangeMatik***

Eksistens før **Essens** betyder **Tælling** før **Regning**

4 **2ere**, 2**BB** **2ere**, 1**BBB** **2ere** 2 **2ere**, 1**BB** **2ere** 1 **2er**, 1**B** **2ere**	3 **3ere**, 1**BB** **3ere** 1 **3er**, 1**B** **3ere**	1**BB** **5ere** = 1**BB**2**B**1 **4ere** 1**BB** **4ere** = 1**BB**2**B**1 **3ere** 1**BB** **3ere** = 1**BB**2**B**1 **2ere**

4 **2ere** og 3 **3ere** plusser som 3**B**2 **5ere,** eller 3 2/5 **5ere,** eller 4**B**-3 **5ere**
som et eksempel på integralregning, der plusser arealer

Et 10x10 **Bundt-Bundt Bræt**,
et **BBB**ræt med

- 6 **7ere**
- 4 **tiere**
- ti **3ere**
- 4 **3ere**

6*7 = (**B**-4)*(**B**-3)
= 10**B** – top4**B** – side3**B** + 4*3
= 3**B**12 = 4**B**2 = 42

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net, Danmark, september 2024, beta 02

Indhold

Sammendrag

Når vi ser på fire fingre sammenholdt to og to, ser vi fire fingre, essensen. Men før skolen ser børn, hvad der eksisterer, bundter af to i rummet, og to af dem, når de tælles i tid. Så vi spørger: Hvordan kan børn lære matematik ved at bruge deres egne todimensionelle bundttal med enheder i stedet for skolens endimensionelle linjetal uden enheder? Med andre ord spørger vi: Hvordan kan børn lære matematik ved at arbejde med eksistens i stedet for at lytte til essens? Her bruger vi de to kernebegreber i den filosofiske eksistentialisme, som hævder, at eksistens går forud for essens. Dette vil betyde, at tælling går forud for regning, da ydre totaler skal tælles før indre beregninger. I denne 'Mange-matematik' er indre begreber genforankret i ydre eksisterende eksempler i stedet for at være defineret som eksempler på indre abstraktioner. Nu bliver tiere, hundreder og tusinder til bundter, bundt-bundter og bundt-bundt-bundter, ligesom 2, 4 og 8, når vi tæller i toere i stedet. Her erstattes endimensionelle linjer på en lineal med todimensionelle rektangler på et ti x ti Bundt-Bundt bræt, et 'BBBræt', der indeholder de ydre eksisterende subjekter, der er knyttet til indre essens-prædikater i en tal-sprogs sætning, 'T = 2*3', ligesom i en tale-sprogs sætning, 'Det er bordet'. Her er enheder altid inkluderet i tælleremser som 0Bundt1, 0B2, ..., 1B0. Her bliver cifre til ikoner med lige så mange pinde, som de repræsenterer. Her bliver regnearter også ikoner skabt i tællingsprocessen. Division er en kost, der 'væk-skubber' bundter, der så 'op-løftes' med en gange-lift til en stak, der så 'væk-trækkes' af et minus-reb for at finde de ubundtede, som inkluderes ovenpå som decimaler, brøker eller negative tal. Her skaber omtælling i en anden enhed en omtællings-formel T = (T/B)xB, der siger, at T indeholder T/B B-bundter. Her vil omtælling af tiere til ikoner skabe ligninger, der løses, når omtælling flytter et tal til 'modsat side med modsat tegn'. Her fører omtælling af ikoner til tiere til tidlig algebra, når 6*7 bliver (B-4)*(B-3) placeret på et BBBræt og fundet ved at væk-trække 4B øverst og 3B ved siden samt plusse de 4*3, der er væk-trukket to gange. Her gør bundt-bundter det muligt at omtælle rektangulære stakke i kvadrater med kvadratroden som side. Her skaber omtælling i en anden fysisk enhed per-tal som 4kr/5kg, som bygger bro mellem enhederne, og som med samme enheder bliver til brøker. Her fører gensidig omtælling af siderne i en stak halveret af sin diagonal til trigonometri før geometri. Og nu, efter at være optalt og omtalt kan stakke endelig plusses lodret ovenpå, efter at omtælling har gjort enhederne ens, eller vandret ved siden af som arealer, dvs. som integralregning, der bliver til differentialregning med modsat spørgsmål. Og som også bruges til at plusse per-tal og brøker, der skal ganges til styk-tal for at plusses. To kvadrater plusses som et kvadrat dannet af deres fælles bund-toplinje. Alt i alt er der fire måder at forene verdens fire taltyper på. Plus og gange forener uens og ens styk-tal, hvor integration og potens forener uens og ens per-tal. Sammen med deres modsatte regnearter, minus, division, differentiering og den faktor-findende rod eller den faktor-tællende logaritme danner de en 'Algebra-tavle', der er opkaldt efter det arabiske ord 'Algebra', som betyder at genforene. Og som nu er det tal-sprog, der giver os mulighed for at fortælle indre tal-fortællinger om ydre totaler i de samme tre genrer, som tale-sproget har, fakta, fiktion og fup.

	Et ti-ti Bundt-Bundt Bræt, et BBBræt med • 6 7ere, • 4 tiere, • ti 3ere • 4 3ere Så, 6*7 = (B-4)*(B-3) = (10 – 4 – 3)*B + 4*3 = 3B12 = 4B2 = 42

Oversigt

Hvor gyldig er matematik egentlig? Inden for i skolen lærer vi, at '2 plus 3 er 5' og at '2 gange 3 er 6'. Men er de begge gyldige udenfor? Her kan 2 bundter af 3ere altid tælles som 6 1ere, men 2uger plus 3dage er 17dage. Så selvom plus og gange begge holder indenfor, holder kun gange udenfor.

Matematik, der plusser tal uden enheder, kan derfor kaldes 'matematisme', sandt indenfor, men sjældent uden for skolen, mens matematik, der plusser bundt-tal med enheder, kan kaldes 'Mange-matematik'. Her kan 2 3ere og 4 5ere plusse både vandret som 8ere eller lodret som 3ere eller 5ere efter enheds-skift. Men 'areal-plusning' og 'enheds-skift' kaldes 'calculus' og 'linearitet', kernen i matematik. Som normalt læres meget sent, men som her optræder allerede i den første lektion.

Når vi ser på fire fingre holdt sammen to og to, ser vi fire fingre, essensen. Men før skolen ser børn, hvad der eksisterer, bundter af to i rummet, og to af dem, når de tælles i tid. Så vi spørger, hvordan kan børn lære matematik, hvis de bruger deres egne todimensionelle bundttal med enheder i stedet for skolens endimensionelle linjetal uden enheder? Med andre ord spørger vi, hvordan kan børn lære matematik ved at arbejde med eksistens i stedet for at lytte til essens?

Her bruger vi de to kernebegreber i filosofisk eksistentialisme, som hævder, at eksistens går forud for essens, altså at hvad der er i verden, skal gå forud for, hvad vi tænker om det. Det vil betyde, at optælling går forud for beregning, da ydre totaler først skal optælles inden indre beregninger. I denne 'Mange-matematik' er matematiske begreber igen forankret i ydre eksisterende eksempler i stedet for at defineres som eksempler på indre opfundne abstraktioner.

Nu bliver ti'ere, hundreder og tusinder til bundter, bundter og bund-bundter, ligesom 2, 4 og 8 bliver det, når vi tæller i 2ere i stedet. Nu erstattes endimensionelle linjer på en lineal med todimensionelle firkanter på et ti-til-ti bundt-bundt-bræt, et BBBræt, der indeholder den ydre eksistens, totalen T, som tal-sætningen 'T = 2*3' tilknytter en indre essens, 2*3, ligesom tale-sætninger gør, 'Det er en stol'.

Nu er enheder altid inkluderet i tælleremser som '0Bundt1, 0B2, ..., 1B0. Nu bliver cifre til ikoner med det antal pinde, de repræsenterer, fem pinde i 5-tallet, osv.

Nu bliver også regnearter til ikoner skabt af optællingsprocessen: Division bliver er en kost til at 'væk-skubbe' bundter, 8/3, som en 'gange-lift' så stakker, 2x3 eller 2*3, som et 'minus-reb' så 'væk-trækker', 8 – 2*3' for at finde de ubundtede, der inkluderes oven på stakken som decimaler, 8 = 2B2 3ere, eller som brøker hvis de også optælles i 3ere, 8 = 2 2/3 3ere, eller som negative tal der fortæller, hvor meget der mangler til et ekstra bundt i rum eller som er væk-trukket fra dette i tid, 8 = 3B-1 3ere. Her kan vi endda se de 3 bundter af 3ere som et bundt bundter, et bundt-bundt, 1BB, så 8 = 1BB 0B-1 3ere, hvor bundt-bundtet er et kvadrat.

Nu skaber omtælling til en anden enhed en omtællings-formel, 'T = (T/B)xB', der siger, at T indeholder T/B B-bundter.

Nu vil omtælling far ti'ere til ikoner skabe ligninger, der løses, når omtælling flytter et tal til 'modsat side med modsat tegn'. u*2 = 8, men da 8 = (8/2)*2, så er u = 8/2.

Nu fører omtælling af ikoner i ti'ere til tidlig algebra, når 6*7 bliver (B-4)*(B-3) placeret på et BBBræt. Og fundet ved at væk-trække 4B-toppen side 3B-siden og tilføje de 4*3, der er væk-trukket to gange, 6*7 = (B-4)*(B-3) = (10-4-3)*B + 4*3 = 3B12 = 4B2 = 42.

Nu gør kvadratiske bundt-bundter det muligt, at omtælle firkanter i kvadrater med kvadratroden som side ved at flytte stakke fra toppen til siden. Firkanten 6 4ere kan således omtælles til (6-1) (4+1)ere eller 5 5ere på nær øverst højre hjørne. Så kvadratroden af 6*4 er lidt under 5, da vi skal væk-trækkes 2*4*u til 1 i hjørnet, hvilket giver u = 1/8. Derfor er 5-1/8 = 4,88 tættere på det sande svar, √24 = 4,90.

Nu skaber omtælling i en anden fysisk enhed per-tal som 4kr/5kg, som bygger bro mellem enhederne ved at omtælle i per-tallet, og som bliver brøker med samme enheder, 2m/5m = 2/5.

Nu fører gensidig omtælling af siderne i en stak halveret af sin diagonal til, at trigonometri kommer før geometri, højde = (højde/bund)*bund = tangens-vinkel * bund. Og nu bliver cirklens halve omkreds en sum af mange små tangens-stykker, *pi* = *n**tan(180/*n*) = 3,1416 for *n* tilpas stor.

Og nu endelig, efter at være blevet talt op og om, kan stakke forenes. Enten lodret ovenpå, efter at omtælling har gjort enhederne ens, 2 3ere + 4 5ere = 1B1 + 4B0 = 5B1 5ere. Eller vandret ved siden af som arealer, dvs. som integralregning, 2 3ere + 4 5ere = 3B2 8ere. Og som modsat bliver til differentialregning, 2 3ere + ? 5ere = 3B0 8ere, eller T1 + *u**5 = T, hvor *u* = (T – T1)/5 = ∆T/5. Og som også bruges til af plusse per-tal og brøker, der netop skal opganges til styktal for at plusses.

Endelig plusses kvadrater som det kvadrat, der dannes af deres fælles bund-toplinje.

Alt i alt findes der fire måder til at forene verdens fire taltyper til totaler. Plus og gange forener uens og ens styktal, hvor integration og potens forener uens og ens per-tal. Sammen med deres modsatte regnearter, minus og division, samt differentiation og faktor-finderen rod eller faktor-tælleren logaritme danner de en 'Algebra-tabel, der er opkaldt efter det arabiske ord 'Algebra', der betyder at genforene. Og det er nu det tal-sprog, som giver os mulighed for at skabe indre tal-fortællinger om ydre totaler fortalt i de samme tre genrer, som tale-sproget har, fakta, fiktion og fup.

At sætte eksistens før essens ved at sætte tælling før regning fører således til at ydre totale bliver til indre firkantede bundt- og bundt-bundt-tal med enheder. Som igen fører til decimaler, brøker og negative tal; og til løsning af ligning ved at omtælle; og til proportionalitet og calculus så totaler kan plusses lodret og vandret. Så med Mange-matiks 'tælling før regning' har vi lært det meste matematik næsten før vi begynder.

Dette vil glæde det fjerde af FN's 17 mål for bæredygtig udvikling, der definerer kvalitetsuddannelse som "at sikre inklusiv og retfærdig kvalitetsuddannelse og fremme muligheder for livslang læring for alle." Og hvor delmål 4.6 ønsker at "Inden 2030 skal det sikres, at alle unge og en betydelig andel af voksne, både mænd og kvinder, opnår læse- og tal-færdigheder".

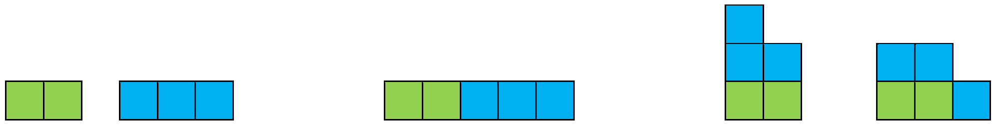
Så vi spørger: "Hvad får børn til at lære matematik, at lytte til essens eller arbejde med eksistens?" Hvor matematisme vælger det første, vælger Mange-matematikken det sidste til at udvikle et tal-sprog ved at arbejde med Mange, som det eksisterer i tid og rum som gentagelse og mangfoldighed, og i tale-sproget som flertal.

Også tal-sproget kan således få sin 'kommunikative drejning' ved at fortælle om ting og handlinger i tid og rum, ligesom tale-sproget fik omkring 1970'erne som beskrevet i H.G. Widdowsons bog 'Teaching Language as Communication'.

Fra Mange til bundt-tal med enheder, for lærere

”Det er ikke fire, det er to toere”. Sagde et 3-årigt barn, der blev spurgt ”Hvor mange år næste gang?” og som så fire fingre holdt sammen to og to. Som uddannet er essensen alt, vi ser. Men som uuddannet ser barnet, hvad der eksisterer, bundter af to i rummet og to af dem, når de tælles i tid. Tallet ‘to’ eksisterer således både i rum og tid.

I rummet eksisterer 2 som 2ere, et rum-tal, et bundt af 2ere, et 2-bundt, som kan forenes med et 3-bundt. Enten vandret til et (2+3)-bundt, et 5-bundt, eller lodret til en stak på 2B1 2ere eller til 2B-1 3ere med B for bundt.



Her giver 1 plus 1 ikke 2, da enhederne er uens. Et 2-bundt plus et 2-bundt kan give to 2-bundter eller et 4-bundt, men ikke 2 4-bundter.

I tid eksisterer 2 sammen med den enhed, der tælles, dvs. som 2 enheder, et tids-tal eller et tælle-tal. Så 2+3 er kun 5 med ens enheder. Uden enheder er et tælle-tal en operator, der skal ganges med en enhed for at blive en total, der kan plusse med en anden total, hvis enhederne er ens, eller efter at enhederne er gjort ens ved at omtælle de to enheder til samme enhed.

Så som rum-tal vil 2+3 kunne være 5, mens som tids-tal bestemmer deres enheder, hvordan de skal plusses.

På en hånd viser et sammenklappet V-tegn, at 1 1er + 1 1er = 1 2ere, hvilket sammen med et V-tegns 2 1ere udgør 1 2er + 2 1ere = 1 4er, og ikke 3 3ere, som man kan forvente, hvis 1+1 = 2 altid. Hvis vi plusser med enheder, får vi 1*2 + 2*1 = 4. Her ganger vi, før vi plusser, og plusser derfor arealer, hvilket også kaldet integralregning.

For at få en mere præcis definition af rum-tal som 2ere og tids-tal som 2 observerer vi følgende, når vi bruger tidstals sekvensen '1, 2, 3, 4, 5' til at tælle fingrene på en hånd:

Efter i tiden at have sagt '1', når vi trækker en finger væk, har vi nu i rummet 1 1ere. Og efter i tiden at have sagt '2', når vi trak en finger mere væk, har vi nu i rummet 1 2er, der oprindeligt var 2 1ere. Og efter i tiden at have sagt '3', når vi trak en finger mere væk, har vi nu i rummet 1 3er, der oprindeligt var 3 1ere. Og efter i tiden at have sagt '4', når vi trak en finger mere væk, har vi nu i rummet 1 4er, der oprindeligt var 4 1ere. Og efter i tiden at have sagt '5', når vi trak en finger mere væk, har vi nu i rummet 1 5er, der oprindeligt var 5 1ere. Nu er der ikke flere fingre at trække væk, så vi kan også kalde 1 5er for 1 bundt med 5 pr. bundt skrevet som 1B0 5ere med B for bundt.

Med de resterende fingre kan vi bruge tidstals sekvensen '6, 7, 8, 9, ti'. I rummet får vi så '1B1, 1B2, 1B3, 1B4, 1B5 eller 2B0', hvis vi tæller med 5ere som enheden. Hvis vi tæller med tiere som enheden, får vi i stedet '6er, 7er, 8er, 9er og 1B0 tiere.

Vi ser, at ved enheden ti skifter vi fra en optælling af 1ere til to optællinger, en optælling af bundter og en optælling af ubundtede 1ere. Senere bruger vi tre optællinger for at kunne optælle en total T i bundt-bundter, bundter og ubundtede 1ere.

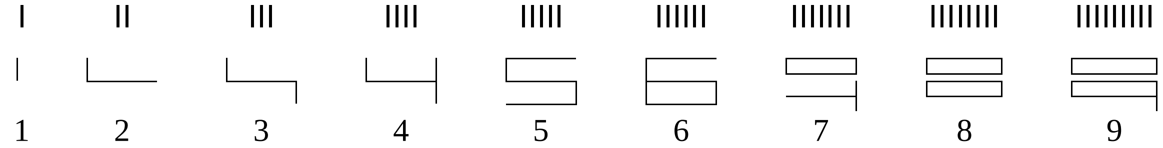
T = 3tiere & 4 = 3B4 tiere = 34 T = 6 hundreder & 7 tiere 8 = 6BB 7B 8 tens = 678

I stedet for at sige ’3ti4’ burde vi sige ’3 bundter med ti pr. bundt, og 4 ubundtede’ for at vise, at bundtstørrelsen er et per-tal, der også plusses som arealer: 2 3ere + 4 5ere = (2*3+4*5)/8 8ere.

På samme måde burde vi i stedet for at sige ’6hundred7ti8’ sige ’6 bundter-bundter og 7 bundter med ti pr. bundt, og 8 ubundtede’.

Bundterne kan arrangeres som ikoner med lige så mange pinde eller streger, som de repræsenterer.

Som enhed har ti ikke brug for en, men for to ikoner for bundterne og 1erne, ti = 1B0 = 10.



Med sine bundt-tal med enheder vil barnet således åbne vores øjne for en anden matematik, der, befriet fra sine nuværende essens-grænser, kan vende tilbage til sin oprindelige identitet som naturvidenskab om mange i rum og tid. Og det giver os mulighed for at udvikle et naturligt tal-sprog, når vi kommunikerer om eksistens i stedet for essens.

Hvis eksistens kommer før essens, kommer tælling før regning, hvilket er nyt, da vi normalt får udleveret tal til at plusse. Som undervisere vil vi nu først undersøge konsekvensen af at tælle, før vi regner. Derefter omdanner vi vores opdagelser til en række mikro-læseplaner.

Når vi ser på fem fingre, ser vi, at den indvendige essens 'fem' udenfor kan eksistere i forskellige former med hver deres etiket.

I rum kan fem eksistere som fem, eller som et bundt af en femmer, der kan arrangeres som et ikon med antallet af pinde, det repræsenterer. Eller, hvis de tælles i to, kan fem eksistere som et bundt og tre, 1B3, som 2B1 eller som 3B-1, som mangler 1 for at blive et ekstra bundt, eller endda som 1BB 0B 1, da to 2ere sammenholdt eksisterer som et bundt af bundter, et bundt-bundt, 1BB eller 1B-kvadrat med centi-cubes.

I tid kan de fem fingre vises én efter én. Her kan bundterne indgå som enheder i tælleremsen: 0B1, 0B2, 0B3, 0B4, 0B5. Eller, hvis vi tæller i 2ere: 0B1, 0B2 eller 1B0, 0B3 eller 1B1, 0B4 eller 1B2 eller 2B0 eller 1BB 0B 0 og endelig 0B5 eller 1B3 eller 2B1 eller 1BB 0B 1.

Så når Mange tælles og beregnes, bruger vi ikke længere en lineals 1dimensionelle linjetal uden enheder som 5 og 42. I stedet vil vi nu bruge 2dimensionelle bundt-tal med enheder som 0B5 og 4B2, der findes som firkantede eller kvadratiske totaler på et ti-til-ti bundt-bundt perlebræt, et 'BBBræt'.

Dette gør det muligt at lære matematik indirekte, når vi formulerer indvendige fortællinger om udvendige totaler som fx 6 7ere, der findes på BBBræt begrænset af to elastikker, og som kan omtælles til ti'ere som i alt fire ti'ere og to, forkortet til 'T = 4B2' ti'ere. Denne talsprogs-sætning eller formel indeholder et eksternt subjekt, der er knyttet til et indvendigt prædikat, ligesom en tale-sprogssætning som 'Det er en bog'.

Fleksible bundtnumre med enheder gør det muligt at omtælle den samme total, toogfyrre, med 'overlæs' eller 'underlæs', så T = 42 = 4B2 = 3B12 = 5B-8, hvilket overflødiggør positionssystemet Samt mente og låne da

17 + 28 = 1B7 + 2B8 = 3B15 = 4B5 = 45 og 57 - 28 = 5B7 - 2B8 = 3B-1 = 2B9 = 29.

Med enheder kan 2-cifrede tal uden udskydes, da med 6ere som enhed er 6+9 = (1B0 + 1B3) 6ere = 2B3 6ere. Og med 9ere som enhed er 6+9 = (1B-3 + 1B0) 9ere = 2B-3 9ere = 1B6 9ere.

Når vi tæller ydre totaler, finder vi, at ikke kun cifre, men også regnearter er ikoner, men i modsat rækkefølge.

Potens nu er den første regneart, vi møder, som en bundt-bundt hat, når *tælling* i 3ere vil ændre 9 til 3 3ere, et bundt bundter, et bundt-bundt, en BB eller et B^2, der på et BBBræt er et kvadrat, hvor 2 3ere er en firkant, der kan omdannes til næsten et kvadrat med firkantens kvadratrod som side ved at flytte halvdelen af overskuddet fra toppen til siden.

Division og gange følger efter som en kost og en lift til at væk-skubbe og stakke bundter. Her vil omtælling i 2ere ændre 8 til (8/2)x2, eller T = (T/B)xB eller T = (T/B)*B, der fortæller, at totaen T indeholder T/B B-bundter. Denne proportionalitets-formel eller ‘omtællingsformel’ bruges overalt til at skifte enheder.

Den løser også gange-ligninger som ‘*u**2 = 8’ som spørger ‘Hvor mange 2ere i 8?’ som selvfølgelig findes ved at omtælle 8 i 2ere som 8 = (8/2)*2, så løsningen er *u* = 8/2 fundet ved at flytte ‘til modsat side med modsat tegn’.

Dette følger den formelle definition: 8/2 er det tal u, der ganges med 2 giver 8, så hvis *u**2 = 8, så er *u* = 8/2. Dette overflødiggør balancerings-metoden, der løser ligninger ved at gøre det samme på begge sider.

Minus følger nu som et reb til at væk-trække stakken for at finde ubundtede singler, og som dermed opdeler totalen i to, T = (T-B) + B, en ‘split-formel’. Endelig er plus et kryds, der viser de to måder til at forene stakke, vandret og lodret, ved siden af og ovenpå.

Split-formlen løser plus-ligninger som ‘*u*+2 = 8’ der spørger ”Hvad er tallet, som med 2 tilføjet bliver 8?”, hvilket naturligvis findes ved at væk-trække de 2, der blev tilføjet, 8 = (8-2)+2, så løsningen er *u* = 8-2, igen fundet ved at flytte ‘til modsat side med modsat tegn’.

Også dette følger den formelle definition: 8-2 er det tal *u*, som med 2 tilføjet 2 giver 8, så hvis *u* + 2 = 8, så *u* = 8-2. Så også her er balancerings-metoden unødvendig.

Når vi omtæller 8 i 3ere, kan en lommeregner give en indre forudsigelse af det ydre resultat. Indtastes’8/3’ fås ‘2.mere’, og indtastes ‘8-2*3’ fås ‘2’ ubundtede. Denne forudsigelse holder, når vi væk-skubber 3ere fra 8 to gange.

Inkluderet oven på bundterne bliver de ubundtede til decimal-tal, hvis det skrives T = 2B2 3ere; eller til brøker, hvis de også tælles i bundter, T = 2 2/3 3ere eller erstattet af et negativt tal, T = 3B-1 3ere, der fortæller, hvad der mangler i rum til et ekstra bundt, eller hvad der blev trukket væk fra det i tid. Så optælling af ubundtede fører til decimaler, brøker og negative tal,

8 = 2B2 = 2 2/3 B = 3B-1 3ere.

Omtælling fra en ikon-enhed til en anden kan forudsiges af en lommeregner. En indre forudsigelse af det ydre spørgsmål ”2 3ere = ? 4ere” fås ved at indtaste ‘2*3/4’ som giver ‘1.mere’. De ubundtede findes ved at væk-trække 1 4er.

Dette forudsiges ved at indtaste ‘2*3 – 1*4’ som giver ‘2’. Lommeregneren forudsiger således, at 2 3ere er 1B2 4ere, som holder udenfor.

Vi omtæller fra ti’ere til ikoner, når vi spørger ‘Hvor mange 6ere i 24?’. Det fører til ligningerne ‘u*6 = 24’ løst af u = 24/6, da 24 kan omtælles i 6ere som ‘24 = (24/6)*6’, så løsningen følger igen reglen ‘modsat side & tegn’.

Vi omtæller fra ikoner til ti’ere, når vi spørger ‘Hvor mange ti’ere i 6 7ere?’.

Det fører til ‘tidlig algebra’, når de placeres på et BBBræt som (B-4)*(B-3), der er tilbage, når vi væk-trækker top 4B toppen og 3B siden og tilføjer de 4 3ere, der blev væk-trukket to gange, så

(B-4)*(B-3) = B*B – 4*B – 3*B - - 4*3 = (10-4-3)*B + 4*3 = 3B12 = 4B2 = 42,

hvilket tydeligt viser, at minus gange minus skal være plus.

Også de fire firkanter på BBBrættet viser FOIL-metoden, First, Outside, Inside, Last; kun her har Outside og Inside skiftet plads.

Når vi omtæller firkanter i kvadrater, kan vi spørge: "Hvordan kan firkanten 6 4ere omdannes til et kvadrat ved at finde dens kvadratrod som dens side?" At flytte halvdelen af overskuddet fra toppen til siden giver det første gæt som 5 5ere. For at udfylde det øverste højre hjørne på 1x1 væk-trækker vi en skive, u, fra toppen og siden. Her er 2*4*u = 1, eller u = 1/8, så 5 – 1/8 = 4,88 er vores andet gæt, hvilket er tæt på lommeregnerens svar 4,90.

To kvadrater kan plusses som det kvadrat, der dannes af deres fæles Bund-Top BT-linje. Så vi har nu en måde til at plusse firkanter som kvadrater.

Et 4-delt kvadrat kan også bruges til at løse kvadratiske ligninger af anden grad:

I et (u+3)-kvadrat vil en lodret og vandret skillelinje opdele et BBBræt i to kvadrater, u^2 og 3^2, samt to 3*u firkanter. Så (u+3)^2 = u^2 + 3^2 + 2*3*u = u^2 + 6 *u + 9. Hvis u^2 + 6*u + 8 = 0, så forsvinder de alle *u*ndtagen 9-8 = 1. Da er (u+3)^2 = 1, der giver -2 og -4 som de to løsninger. Hvis derimod u^2 + 6*u + 10 = 0, så er 9-10 = -1, og da har ligningen (u+3)^2 = -1 ingen løsning.

Et 4-delt x-og-y kvadrat med y = x^2 kan også vise, at med dy og dx som små ændringer af y og x, vil dy være 2*x*dx, hvis vi ser bort fra det lillebitte øverste højre hjørne.

Så med y = x^2 er dy/dx = 2*x.

Når vi omtæller mellem forskellige fysiske enheder, fx fra kr til kg, kr = (kr/kg)*kg, får vi et 'per-tal', kr/kg, til at forbinde enhederne: med 3kr/5kg, 12kr = (12/3)*3kr = (12/3)*5kg = 20kg. Med samme enheder bliver per-tal til brøker eller procenter, 3kr/5kr = 3/5 og 3kr/100kr = 3/100 = 3%.

Ved at omtælle siderne i en firkant opdelt af dens diagonal kaldes per-tallene trigonometri, der forbinder siderne og vinklerne, fx højde = (højde/bund)*bund = tangens-vinkel*bund. Her beskriver tangent-vinklen diagonalens stejlhed eller stigningsevne. I et x-og-y koordinatsystem skabes en kurve af en formel y = f(x). Her er kurven mellem to nære nabopunkter næsten en diagonal i en firkant, hvor bunden og højden er ændringer i x og i y, Δx og Δy. Her beskriver tangentvinklen kurvens stejlhed som per-tallet Δy/Δx, som også kaldes kurvens lokale hældning.

Efter optælling og omtællring kan totaler endelig plusses oven på eller ved siden af hinanden.

Plusses 2 3ere og 4 5ere som 3ere eller 5ere, skal omtælling først gøre enhederne ens.

Plusses 2 3ere og 4 5ere som 8ere plusses der arealer, som kaldes integralregning, som bliver til den modsatte regneart ved modsat at spørge "2 3ere og hvor mange 5ere giver 4 8ere?". Den første total væk-trækkes her fra den endelige total inden der kan optælles i 5ere, (T2-T1)/5 eller ΔT/5.

Plusning af per-tal optræder i blandingsregning. Med 2kg á 3kr/kg plus 4kg á 5kr/kg kan styk-tallene 2kg og 4kg plusses direkte, mens per-tallene 3kr/kg og 5kr/kg først skal opganges til styk-tal, før de kan plusses, hvorved de bliver arealer, der plusses som integralregning. Ligeledes med brøker, hvor 1rød af 2æbler plus 2rød af 3 giver 3røde af 5, og selvfølgelig ikke 7røde af 6æbler som matematisme påstår. Per-tal og brøker og cifre er således ikke tal, men operatorer, der har brug for et tal for at blive til totaler, der kan regnes på.

Her er per-tallene stykkevis konstante, men kan også være lokalt konstante, som i tilfælde af et faldende objekt med et stigende meter/sekund-tal. Calculus optræder således tre gange, som vandret plusning af stakke i børneskolen, som plusning af stykkevis konstante per-tal i mellemskolens blandingsproblemer, og som plusning af lokalt konstante per-tal i gymnasiet, hvor de små areal-strimler skrives som ændringer, p*dx = dA, for at benytte, at ved plusning af mange ændringer forsvinde alle midterste ændringer, så kun den samlede ændring af A er tilbage fra start til slut.

Plusning af ens per-tal kan forudsiges af potens, hvor fx 6% 10 gange giver 106%^10 eller 179%, dvs. de forventede 60% plus yderligere 19%. Og hvor 6% 20 gange giver 321%, dvs. de forventede 120% plus yderligere 201%, der viser det nyttige ved pensioner.

Når jeg ser ind i min højre hånd, ser jeg 3 fingre til venstre, V'erne og 2 fingre til højre, H'erne. Jeg bøjer de to yderste fingre. Så er 1/3 af V'erne bøjet og 1/2 af H'erne. Betyder det, at 1/3 af de bøjede er V'er? Nej, 1/2 er. Så i krydstabeller skal vi også se brøker som operatorer, der har brug for tal for at blive totaler.

De første måneder møder børn altså matematikkens kerne: funktioner, ligninger, proportionalitet, trigonometri og beregning. Samt de fire regnearter, der forener uens og ens styk-tal og per-tal: plus, gange, integration og potens, som det ses i en 'Algebra-tavle', der er opkaldt efter det arabiske ord 'algebra', der betyder 'at genforene'. Og som også viser de modsatte regnearter, der opdeler totaler minus, division, differentiation samt faktor-søgning (rod) og faktor-tælling (logaritme).

Regnearter **forener**/ *opdeler Totaler i*	Uens	Ens
Styk-tal m, s, kg, kr	***T = a + n*** *T – n = a*	***T = a * n*** *T/n = a*
Per-tal m/s, kr/100kr = %	***T =* ∫ *f* dx** *dT/dx = f*	***T = a^b*** *b√T = a loga(T) = b*

Figur 01. Algebra-tavlen viser, hvordan vi forener og opdeler de fire tal-typer, og hvordan vi løser ligninger ved at flytte til modsat side med modsat tegn.

Når vi ved, hvordan vi optæller og omtæller totaler, og hvordan man forener og opdeler de fire taltyper, kan vi nu aktivt bruge dette tal-sprog til at lave fortællinger om tælling og tal og om forening og opdeling af totaler i rum og tid. Det kaldes modellering.

Som i tale-sproget forekommer også tal-sprogs fortællinger i tre genrer: fakta, fiktioner og fup, der også kaldes 'da-så', 'hvis-så' og 'hvad-så' modeller eller 'rum-', 'rate-' og 'risiko-modeller'. Fakta-modeller taler om fortid og nutid og behøver kun at få enhederne kontrolleret. Fiktions-modeller taler om fremtiden og skal suppleres med alternative modeller bygget på alternative antagelser. Og fup-modeller vil typisk plusse uden enheder og fx hævde, at '2+3 = 5' altid på trods af at '2uger+3dage = 17dage', hvorved matematik omformes til matematisme.

Baseret på vores opdagelser kan vi nu designe mikro-læseplaner, ML, til at udvikle et tal-sprog til at arbejde med ting og handlinger i rum og tid på et BBBræt, evt. med centicubes ovenpå.

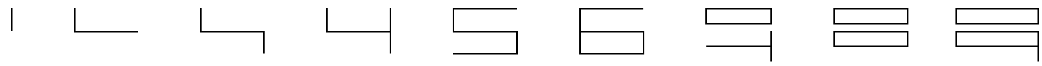
Mikro læseplaner for lærende

Baseret på vores undersøgelse kan vi nu designe en række mikro-læseplaner, ML, til udvikling af et tal-sprog ved at arbejde med totaler, der eksisterer som ydre ting og handlinger på et BBBræt, der kan suppleres med centi-cubes placeret oven på BBBrættet.

ML01. Cifre som ikoner i rummet, IIIII = 5

Totalen eksisterer her som pinde, der skal arrangeres på et bord og rapporteres med en tegning på papir. Spørgsmålet ‘T = ?’ besvares på to måder, som en samling enkelte, I I I I I, eller som et bundt af dem, ~~IIII~~, der kan arrangeres til et ikon, 5, kaldet et ciffer, der indeholder det antal pinde, som det repræsenterer, hvis det er skrevet på en mindre sjusket måde, og som dermed minder lidt som cifrene på en lommeregner. Hver gang foldes en foldelineal, så den ligner ikonet.

I II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII IIIIIIIII



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Figur 02. Cifrene er ikoner med det antal streger, som det repræsenterer

Hvis vi tæller i ti’ere, erstattes ti pinde af en pind i en anden farve eller materiale for at gøre det muligt at arrangere alle totaler som ikoner, så 67 betyder 6-bundt-7, 6B7, kaldet 6-ti-7. Ti behøver således intet ikon, da ti bliver ‘et bundt og ingen ubundtede’, skrevet som T = 1B0 ti’ere, eller T = 1,0 ti’ere eller T = 10, hvis enheden og decimaltegnet udelades.

Eksempel. En pind er en enkelt. En ekstra pind tilføjet til 1 pind giver to singler, der kan forenes til et 2-ikon. Og så videre. En ekstra pind tilføjet til 8 pinde giver ni singler, der kan forenes til et 9-ikon. Og en ekstra pind tilføjet til 9 pinde giver ti singler, der i stedet for at forene sig til et ti-ikon er bundtet sammen som et bundt erstattet af en pind i en anden farve eller et andet materiale og skrevet som 1B0, da der ikke er nogen singler tilbage. En ekstra pind tilføjet til ti pinde giver elleve singler, der kan forenes til et bundt og 1 enkelt tilbage, hvilket fik vikingerne til at kalde elleve ‘en levnet’ og skrevet som 1B1. Ligeledes med tolv, som vikingerne kaldte ‘to levnet’. Der er ingen ‘tre levnet’ på grund af den gamle tællemetode ‘en, to, mange’. Så fra 3 specificerer vi både bundterne og singlerne. Nul er ikoniseret som et glas, der ikke finder noget. På engelsk kommer navnet ‘tyve’ fra Vikingernes ‘tvende ti’.

Opbygning af rutine. Kast nogle terninger to gange (fysisk eller virtuelt) for at få antallet af bundter og ubundtede singler. Fremsig og rapporter nummeret. Så med 3 og 5, sig tre-bundt-fem, tre-ti-fem og femogtredive, og skriv til sidst T = 3B5 = 35.

Afsluttende test. Kast nogle terninger to gange, en ekstra gang.

ML02. Styk-tælling i tid, ****** = ~~IIII~~ I

Totalen eksisterer her som pinde, der skal flyttes én efter én på et bord og rapporteres med streger på papir, samt som nogle terninger. Spørgsmålet ‘T=?’ besvares ved at tælle det samlede antal rapporteret i tid som nogle 5-bundter og nogle ubundtede singler, fx T = 2B1 5ere.

Eksempel. I en sætning skal du tælle e’erne og a’erne.

Opbygning af rutine. Nogle terninger kastes et dusin gange for at vise Lige (1, 2 eller 3 2ere) eller Ulige (1, 3 eller 5). Optællingen i 5ere rapporteres med to totaler, fx L = 1B4 og U = 0B3, hvilket giver en total T = 2B2 eller 1B7 eller 3B-3 5ere. Og giver forskellen D = 1B1 5ere.

Afsluttende test. Kast nogle terninger en ekstra gang.

ML03. Bundt-tælling i tid med enheder: 0B1, ..., 0B5 eller 1B0, 3 3ere = 1BB

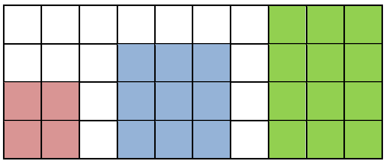
Totalen eksisterer her som linjer eller stakke på et BBBræt. Spørgsmålet ‘T =?’ besvares i tid ved at bevæge fingeren langs toppene med en tælleremse, der ved at inkludere bundtet som en enhed gør positionssystemet unødvendigt.

Først tæller vi i linjer, derefter i stakke markeret med et lodret gummibånd.

Når vi tæller 5 fingre i 3ere, spørger vi: ”Hvad har vi her?” for at understrege, at vi fokuserer på eksistens i stedet for essens. Vi kan ikke tælle en finger som ‘en’, da 1 3ere er 3 1ere, og vi kun har én.

I stedet tæller vi ‘0 bundt 1, 0B2, 0B3 eller 1B0’, da 3 1ere er 1 bundt uden ubundtede tilbage.

Når vi tæller 5 fingre i 2ere, bemærker vi, at fire fingre er 1B2, men også 2B0, og 1BB0B0, da 2 2ere er et bundt bundter, et bundt-bundt, en BB, det vil sige et kvadrat, ligesom 3 3ere, 4 4ere osv.



Figur 03. 2 2ere, og 3 3ere, and 4 4ere som bundt-bundt kvadrater

Når man tæller de fem fingre på en hånd, kan deres essens ‘5’ eksistere på forskellige måder:

T = 1 5er = 1B1 4ere = 1B2 3ere = 1B3 2ere = 2B1 2ere = 1BB 0B 1 2ere = 5 1ere

Når vi tæller ti fingre i 3ere, får vi 0B1, 0B2, 0B3 eller 1B0, 1B1, ... , 2B3 eller 3B0, 3B1. T = 3B1 3ere, men også T = 1BB0B1, da 3 3ere er et bundt bundter, et bundt-bundt, en BB, et kvadrat.

Når vi tæller ti fingre i 2ere, bemærker vi, at 8 som 2BB 0B 0 er 1BBB 0BB 0B 0.

Så vi kan også skrive ti som 1BBB 0BB 1B 0 2ere eller som 1010, hvis vi udelader enhederne.

Endelig, når vi tæller hundrede på BBBræt, slutter vi med 1BB 0B 0:

0B1, 0B2, ... ,0B9, 0Bten eller 1B0, 1B1, ... , 9B8, 9B9, 9Bten eller tenB0 eller 1BB0B0.

For at finde de kvadratiske tal ser vi, at 5 5ere kommer fra 4 4ere ved at tilføje 4 to gange og 1 i øverste højre hjørne. Så med 4 4ere som 16 er 5 5ere 16 + 4 + 4 + 1 = 25.

På denne måde kan vi forudsige, at kvadrattallene er 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 84, 91 og 100. Og vi ser, at et BB-kvadrat vokser med 2B + 1, når B vokser med 1.

1BB0B0	1BB0B1	1BB0B2	1BB0B3	1BB0B4	1BB0B5	1BB0B6	1BB0B7	1BB0B8	1BB0B9	~~1BB0B10~~
~~10B0~~	~~10B1~~	~~10B2~~	~~10B3~~	~~10B4~~	~~10B5~~	~~10B6~~	~~10B7~~	~~10B8~~	~~10B9~~	10B10
9B0	9B1	9B2	9B3	9B4	9B5	9B6	9B7	9B8	9B9	~~9B10~~
8B0	8B1	8B2	8B3	8B4	8B5	8B6	8B7	8B8	8B9	~~8B10~~
7B0	7B1	7B2	7B3	7B4	7B5	7B6	7B7	7B8	7B9	~~7B10~~
6B0	6B1	6B2	6B3	6B4	6B5	6B6	6B7	6B8	6B9	~~6B10~~
5B0	5B1	5B2	5B3	5B4	5B5	5B6	5B7	5B8	5B9	~~5B10~~
4B0	4B1	4B2	4B3	4B4	4B5	4B6	4B7	4B8	4B9	~~4B10~~
3B0	3B1	3B2	3B3	3B4	3B5	3B6	3B7	3B8	3B9	~~3B10~~
2B0	2B1	2B2	2B3	2B4	2B5	2B6	2B7	2B8	2B9	~~2B10~~
1B0	1B1	1B2	1B3	1B4	1B5	1B6	1B7	1B8	1B9	~~1B10~~
0B0	0B1	0B2	0B3	0B4	0B5	0B6	0B7	0B8	0B9	~~0B10~~

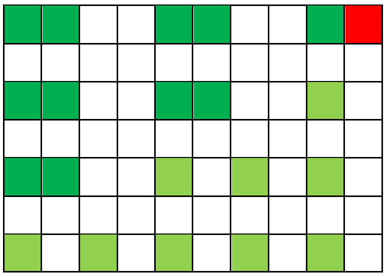
Figur 04. Tælling fra 0 til 109 med enheder.

Opbygning af rutine. Tæl et dusin og en snes i 5ere, 4ere, 3ere og 2ere.

Afsluttende test. Tæl 30 i 3ere.

ML04. Fleksibel bundt-tælling i rum med over- og under-læs, 5 = 1B3 = 2B1 = 3B-1 2ere
Totalen eksisterer her som fingre og pinde. Spørgsmålet ‘T = ?’ besvares i rummet med ‘fleksibel bundttælling’, der gør det muligt for ubundtede at forblive ubundtede som et ’over-læs’, og som gør

det muligt at være et 'under-læs' ved at låne ekstra pinde til at fylde et ekstra bundt. Brug af fleksible bundt-tal med enheder overflødiggør mente og lån.



Figur 05. Fem finger kan omtælles i 2ere som 0B5, eller 1B3, eller 2B1, eller 3B-1

Fem fingre kan tælles i 5ere som 0B5 (et over-læs) eller 1B0 eller 2B-5 (et under-læs).
Fem fingre kan tælles i 4ere som 0B5 eller 1B1 eller 2B-3.
Fem fingre kan tælles i 3ere som 0B5 eller 1B2 eller 2B-1.
Fem fingre kan tælles i 2ere som 0B5 eller 1B3 eller 2B1 eller 3B-1.

Ti fingre kan tælles i ti'ere som ½B fra 1 til ti:

½B-4, ½B-3, ½B-2, ½B-1, ½B0, ½B1, ½B2, ½B3, ½B4, ½B5 eller 1B0 som ti.

Dette letter standardberegninger.

T = 6+3 = ½B1 + ½B-2 = 1B-1 = 0B9 = 9
T = 6+7 = ½B1 + ½B2 = 1B3 = 13
T = 8-3 = ½B3 – ½B-2 = 0B5 = 5, hvilket viser, at -(-2) = +2
T = 4*7 = 4 * ½B2 = 2B8 = 28

Opbygning af rutine. Handlingen gentages ved at omtælle ni fingre i 5ere, 4ere, 3ere og 2ere.

Handlingen gentages med tocifrede tal, fx 67 = 6B7 = 7B-3 = 5B17. Derefter gentages alt med centicubes og med pinde.

Afsluttende test. Handlingen gentages på et BBBræt eller på en abacus, en kugleramme.

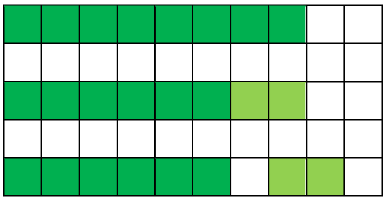
ML05. Opdeling, 8 = (8-2) + 2

Totalen eksisterer her som en række toppe på et BBBræt. Spørgsmålet 'T = ?' besvares ved at væk-trække et bundt, som skjules under centicubes.

En Total på 1 8er opdeles ved at væk-trække 2. At væk-trække bare én gang kan ikoniseres af et reb, -, så '8-2' betyder 'fra 8 væk-træk 2' i tid eller '8 med 2 væk-trukket' i rum.

De oprindelige 8 er nu opdelt i 8-2 og 2, så 8 = (8-2) + 2. Her ikoniseres addition af et kryds, der viser de to retninger, vi kan plusse, ved siden af eller oven-på, vandret eller lodret, så '4+2' betyder '4 plusset med 2'.

Med T for total og B for bundt kan denne 'split-formel' skrives som T = (T–B) + B.



Figur 06. En total på 8 splittet in to dele ved at væk-trække 2, så 8 = (8 – 2) + 2

Den kan bruges til at løse ligninger, der kommer fra at 'regne baglæns'. Spørgsmålet 'Hvad er det tal, der med 2 tilføjet giver 8' kan forkortes til en ligning med et bogstav for det ukendte tal, '*u*+2 = 8'. Tallet findes naturligvis ved at handle baglæns og væk-trække det tal, der oprindeligt blev tilføjet, så

u = 8-2, som også kommer fra at opdele 8, ‘u+2 = 8 = (8-2) + 2’. Så vi ser, at løsningen findes ved at flytte ’til modsat side med modsat tegn". Det følger også af den formelle definition af minus:

8-2 er det tal u, der lagt til 2, giver 8, eller hvis u+2 = 8, så u = 8-2.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med fingre, pinde, terninger eller på en abacus.

Handlingen gentages med andre tal, fx 9 = (9-3)+3.

Afsluttende test. Vælg selv to tal.

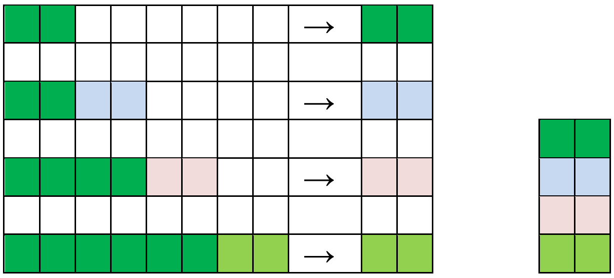
ML06. Omtælling, 8 = (8/2)x2

Totalen eksisterer her som linjer af pinde på et BBBræt. Spørgsmålet ‘T = ?’ besvares af ‘væk-skubbe’ bundter, som skjules under centicubes.

En Total på 1 8ere omtælles i 2ere med 4 gange væk-skubbe 2ere. At væk-trække flere gange kan ikoniseres af en kost, /, så ‘8/2’ betyder ‘fra 8 væk-skub 2ere’ i tid og ‘8 optalt 2ere’ i rum.

De væk-skubbede 2ere stakkes så 8 indeholder 2ere 4 gange eller 8/2 gange, så 8 = 4*2 eller 8 = (8/2)x2. Her ikoniseres gange med en lift, så ‘4x2’ eller ‘4*2’ betyder ‘4 gange stakning af 2ere’.

Med T for total og B for bundt kan ‘omtællings-formlen’ skrives T = (T/B)xB eller T = (T/B)*B



Figur 07. En total på 8 omtælles ved at væk-skubbe 2ere som løftes til en stak, så 8 = (8/2)x2

Den kan bruges til at løse ligninger, der kommer fra at ’regne baglæns’.

Spørgsmålet ’Hvor mange 2ere er der i 8’ kan forkortes til en ligning med et bogstav for det ukendte tal, ’u * 2 = 8’. Tallet findes naturligvis ved at handle baglæns og væk-skubbe de 2ere, der oprindeligt blev forenet, så u = 8/2, som også kommer af at omtælle 8, ‘u * 2 = 8 = (8/2) * 2’.

Så vi ser igen, at løsningen findes ved at flytte til ’modsat side med modsat tegn". Det følger også af den formelle definition af division:

8/2 er det tal u, der ganget med 2 giver 8, eller hvis u*2 = 8, så u = 8/2.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med 12 talt i 2ere og 3ere ved hjælp af en finger til at skjule et bundt.

Afsluttende test. 18 tælles i 2ere og i 3ere.

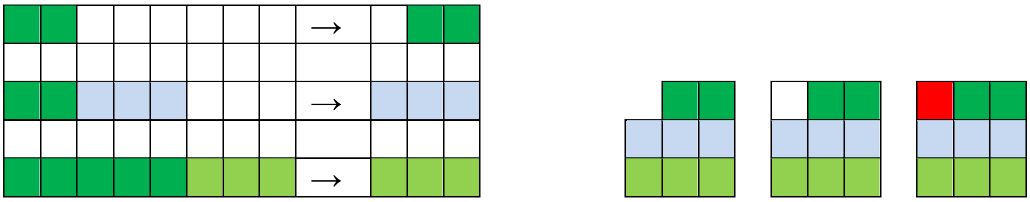
ML07. Omtælling af de ubundtede, 8 = (8/3)*3 = 2B2 = 2 2/3 = 3B-1 3ere

Totalen eksisterer her som en samling centicubes. Spørgsmålet ‘T = ?’ besvares ved at væk-skubbe bundter til en stak, som derefter væk-trækkes for at finde de ubundtede, der derefter medtages oven på stakken.

Når vi omtæller 8 i 3ere, kan vi 2 gange væk-skubbe 3ere. Derefter væk-trækker vi stakken på 2 3ere og finder 2 ubundtede, der er placeres oven på stakken.

Her kan de ses som singler i et bundt beskrevet med et decimaltal, altså 8 = 2B2 3ere, eller som en brøkdel, når de også omtælles i 3ere som 2 = (2/3)*3, altså 8 = 2 2/3 3ere.

Eller vi kan skrive 8 = 3B-1 for at vise, at der i rummet mangler 1 i det næste bundt, eller at 1 er væk-trukket fra det i tid.



Figur 08. Ubundtede bliver decimaler, brøker eller minus-tal, 8 = 2B2 = 2 2/3 = 3B-1 3ere

Med ti som bundt-tal optræder de ubundtede på samme måde:

T = 43 = 4B3 = 4 3/10 = 5B-7 ti'ere.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt ved at omtælle elleve i 3ere og 4ere ved hjælp af terninger eller fingre til at skjule et bundt.

Afsluttende test. Omtælling af 8 i 5ere og i 3ere.

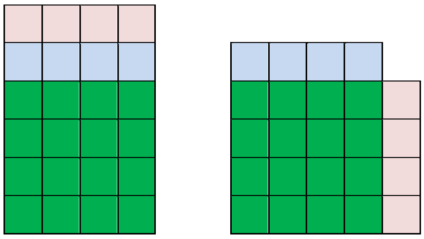
ML08. Omtælling i kvadrater, 6 4ere = 1 BB ?ere

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares 'T = ?' spørgsmålet ved at flytte halvdelen af den overskydende top til siden for at få et første gæt på kvadratets side, der kaldes firkantens kvadratrod. Firkanten vises med elastikker eller med centicubes på et BBBræt.

Så vi omdanner firkanten 6 4ere til et kvadrat ved at flytte halvdelen af de overskydende 2 4er fra toppen til siden for at få en 5 x 5 firkant plus et tomt kvadrat i øverste højre hjørne.

Det forsøger vi at udfylde med to firkantet 4**u* skiver af top og side, så *u* findes af ligningen 2**u**4 = 1, eller 8**u* = 1, hvilket giver *u* = 1/8 = 0,125 og 5-0,125 = 4,875 som vores næste gæt på kvadratroden af 6*4.

Men nu er der for meget i hjørnet, så vi gentager processen og spørger til sidst en lommeregner, der viser, at det rigtige svar er √(6*4) = 4,90, hvilket er meget tæt på vores tredje gæt.



Figur 09. Omtælling af 6 4ere wed at væk-trække det halve overskud til et 5 x 5 kvadrat

For at løse en kvadratisk ligning af anden grad ser vi, at på et BBBræt har et T = (*x*+3)*(*x*+3) kvadrat fire dele, to kvadrater *x*^2 og 3^2 og to firkanter 2*3**x*, så T = *x*^2 + 6**x* + 9. Den kvadratiske ligning *x*^2 + 6**x* + 8 = 0 får derefter hele kvadratet til at forsvinde undtagen 9-8 = 1. Så (*x*+3)^2 = 1, hvilket giver to løsninger, *x*= -2 og *x* = -4. Vi ser også, at den kvadratiske ligning '*x*^2 + 6**x* + 10 = 0' ikke har nogen løsninger, da her er '(*x*+3)^2 = -1'.

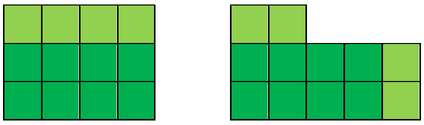
Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre firkantede tal.

Afsluttende test. Omtæl 9 5ere til et kvadrat. Løs ligningen *x*^2 + 8**x* + 12 = 0

ML09. Omtælling til et andet ikon, 3 4ere = ? 5ere

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares 'T = ?' spørgsmålet på et BBBræt og forudsiges på en lommeregner.

Med elastikker på et BBBræt ser vi, at 3 4ere kan omtælles som 2B2 5ere. Dette kan forudsiges af en lommeregner. For at finde ud af, hvor mange 5ere der er i 3 4ere, indtaster vi '3*4/5'. Svaret er '2.mere'. For at finde dem trækker vi stakken på 2 5ere væk ved at indtaste '3*4 – 2*5', der giver svaret ‘2’. Så lommeregneren forudsiger, at 3 4ere kan omtælles som 2B2 5ere, hvilket passer på et BBBræt.



Figur 10. En total på 3 4ere omtalt 5ere manuelt, og forudsagt af en lommeregner

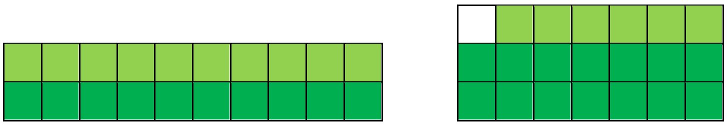
Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre firkantede tal.

Afsluttende test. 4 5ere = ? 6ere.

ML10. Omtælling fra ti’ere til ikoner, 2 ti’ere = ? 7ere

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares ‘T = ?’ spørgsmålet ved at omtælle.

Med elastikker på et BBBræt ser vi, at 2 ti’ere kan omtælles som 2B6 7ere. Dette kan forudsiges af en lommeregner. For at finde ud af, hvor mange 7ere der er i 2 ti’ere, indtaster vi ’20/7’. Svaret er ’2.mere’ fundet ved at væk-trække stakken, forudsagt af ’20-2*7’ som giver ’6’. Så lommeregneren forudsiger, at 2 ti’ere kan omtælles som 2B6 7ere, hvilket passer på BBBræt. Alternativt fører spørgsmålet ’Hvor mange 7ere i 20?’ til ligningen ’u*7 = 20’, der løses ved at flytte 7 til ’modsat side med modsat tegn’, så igen er u = 20/7 eller u = 2 6/7.



Figur 11. En total på 2 ti’ere omtalt 7ere manuelt, og forudsagt af en lommeregner

Vi bemærker, at en reduktion af bundtet vil øge højden. For at studere dette nærmere omtæller vi et dusin i 6ere, 4ere, 3ere, 2ere og 1ere og placerer hver gang en prik i øverste højre hjørne af stakken. Punkterne danner derefter en kurve, der kaldes en hyperbel.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre tal.

Afsluttende test. 4 ti’ere = ? 8ere.

ML11. Omtælling fra ikoner til ti’ere, 6 7ere = ? ti’ere

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares ‘T=?’ spørgsmålet ved at finde ud af, hvad vi skal væk-trække fra den store ti-gange-ti bundt-bundt.

Omtælling fra ikoner til ti’ere er tilsyneladende et andet navn for gange-tabellerne. Med elastikker på et BBBræt ser vi, at der er 6 7ere tilbage, hvis vi fra de ti bundter væk-trækker 4 top- og 3 side-bundter og tilføjer de øverste højre 4 3ere, som vi væk-trak to gange:

T = 6 7ere = 6*7 = (10 – 4 – 3)*B + 4 3ere = 3B + 1B2 = 3B12 = 4B2 = 42.

Dette fører til tidlig algebra, hvis vi i stedet skriver:

T = 6 7ere = 6*7 = (B – 4) * (B – 3) = BB – 4*B – 3*B + 3*4

Her ser vi, at minus gange minus skal være plus.

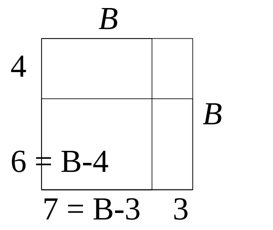
Så en hurtig måde at finde svaret på er at plusse og gange de manglende tal og fra-trække det første og tilføje det sidste. Med 4 og 3 som de manglende tal her, lærer vi hurtigt at sige:

’Pånær (4+3) bundt (4*3)’ eller ’Pånær 7 bundt 12’ eller ’3 bundt 12’, eller ’4 bundt 2’ eller ’42’.

Vi kan også skrive B–4 og B–3 oven på hinanden og derefter gange ned og på tværs. Eller vi kan bruge FOIL-metoden: First, Outside, Inside, Last, eller Første, Udvendige, Indvendige, Sidste.

De tocifrede tal 23*46 ganges som 2B3*4B6, hvor et lodret og et vandret gummibånd mellem bundterne og singlerne på et BBBræt viser de fire firkanter som 2B*4B og 2B*6 under 3*4B og 3*6. Med overlæs kan de nu plusses til 8BB 24B 18 eller til 10BB 5B 8 = 1058 uden enheder.

Denne proces kan vendes, når vi spørger ‘1058 = ? 46ere’. Først skrives 1058 med overlæs som 10BB 5B 8 = 8BB 25B 8. Da 4B*2B = 8BB bidrager 2B*6 = 12 B til de 25 B’ere. De resterende 13B 8 kan omskrives til 12B 18, hvilket omtalt i 3ere giver 4B 6. Så svaret er 1058 = 23 46ere.

	T = 6 * 7 = (B-4) * (B-3) = BB – 4B – 3B + 4*3 = 3B12 = 4B2 = 42	$T = \begin{pmatrix} 1B & -4 \\ 1B & -3 \end{pmatrix}$ = 1BB – 4B – 3B + 4*3 = 10B – 7B + 1B2 = 3B12 = 42	$T = \begin{pmatrix} 2B & +3 \\ 4B & +6 \end{pmatrix}$ = 8BB+12B+12B+18 = 8BB+24B+18 = 10BB 5B 8 = 1058

Figur 12. På et BBBræt ses, at 6*7 er 3B12 eller 42, og at 24*36 er 8BB 24B 18 eller 1058.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre tal.

Afsluttende test. 7 8ere = ? ti’ere.

ML12. Omtælling til en anden fysisk enhed skaber per-tal, 3kr/5kg

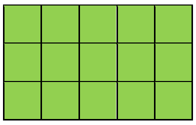
Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares spørgsmålet ‘T = ?’ ved at ændre enheden i per-tals firkanten.

At omtælle en fysisk total T som 3kr og 5kg giver et ‘per-tal’ 3kr/5kg kaldet prisen og markeret som en 3x5 firkant på et BBBræt.

Spørgsmålet ’20kg = ?kr’ besvares ved at omtælle i per-tallet:

20kg = (20/5)*5kg = (20/5)*3kr = 12kr.

På et BBBræt er tælleremsen nu 5, 10, 15, 20 kg og 3, 6, 9, 12 kr, da per-tallet her er ændret fra 3/5 til 12/20.



Figur 13. Per-tallet 3kr/5kg vist som 3 5ere, eller 6 10ere, eller 9 15ere, or 12 20ere, osv.

Eller vi kan indføre en ny enhed for at gøre cifrene ens: 4kr = (4/3)*3kr = m*3kr = 3mkr med multiplikatoren m = 4/3. Så 15kg = 15mkr = 15*4/3kr = 20kr.

På et BBBræt tillader den nye enhed nu at læse 4x3-firkanten som en 20x15-firkant.

Ellers kan enhederne omtælles: kr = (kr/kg)*kg = (4/3)*15 = 20; og kg = (kg/kr)*kr = (3/4)*12 = 9

Eller vi kan bruge at per-tallene er ens: kg/kr = u/15 = 4/3. Når vi flytter til modsat side med modsat tegn, får vi derefter 3*u = 4*15 eller u = 4*15/3 = 20.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med andre tal.

Afsluttende test. Med 5kr/2kg, hvad er da 12kg = ?kr og ?kg = 12kr.

ML13. Med samme enhed bliver per-tal til brøker, 3kr/5kr = 3/5

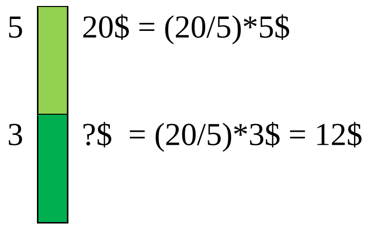
Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt.

Hvis en helhed indeholder en part, har de den samme enhed. I dette tilfælde bliver per-tal en brøkdel uden enheder. Alligevel kan vi bruge enhederne ‘P’ og ‘H’ til part og helheden.

At få brøkdelen 3/5 af 20kr betyder således at få 3P/5H af en total på 20H. Omtælling i per-tallet giver således 20H = (20/5)*5H = (20/5)*3P = 12P, eller 12kr af 20kr.

At få brøkdelen 3/5 af 100 betyder således at få 3P/5H af en total på 100H. Omtælling i per-tallet giver således 100H = (100/5)*5H = (100/5)*3P = 60P, eller 60 af 100, skrevet som 60%.

At spørge ’20kr er hvilken procentdel af 80kr’ betyder at finde brøkdelen 20/80 af 100. Eller vi kan introducere en ny enhed, 80kr = 100%, for at se at 20kr = (20/80)*80kr = (20/80)*100% = 40%.



Figur 14. En brøk-søjle med per-tal til venstre og styk-tal til højre.

For at plusse 10% til 200kr introducerer vi per-tallet 200kr/100%. Efter plusning er totalen

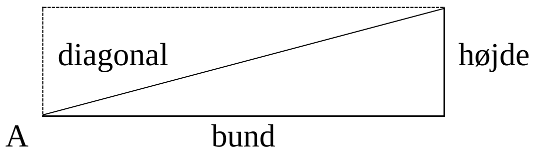
T = 100% + 10% = 110% = (110/100)*100% = (110/100)*200kr = 110%*200kr = 220kr.

Så at plusse med 10% betyder at gange med 110%, og at plusse 10% 5 gange betyder at gange med 110% ^ 5 = 161.1%, hvilket giver 50% plus 11.1% yderligere, også kaldet rentes-rente.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre tal.

Afsluttende test. Med 2P/5H, 10P = ?H og ?P = 20H og 2P/5H = ?%.

ML14. Omtælles en staks sider giver trigonometri, højde = (højde/bund)*bund = tanA*bund
Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt.



Figur 15. En stak med en bund og en højde og en diagonal

På et BBBræt markerer vi en 3x4stak som en firkant med højde 3 og bund 4. Hvis vi omtæller højden og bunden i diagonalen, får vi per-tallene sinus og cosinus:

højde = (højde/diagonal) * diagonal = sinus Vinkel * diagonal, forkortet til

h = (*h*/*d*) * *d* = sin *A* * *d* = sin *A d’*ere,

Dette giver formlen sin *A* = højde/diagonal, eller sin *A* = h/d eller sin *A* = 3/5 i vores tilfælde.

Ligeledes cos *A* = bund/diagonal, eller sin *A* = *b*/*d* eller cos *A* = 4/5 i vores tilfælde.

højde = (højde/bund) * bund = tangens Vinkel * bund, forkortet til

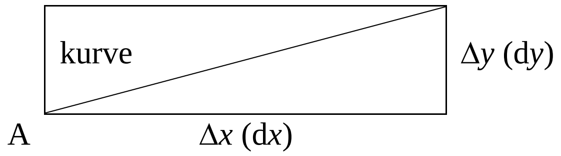
h = (*h*/*b*) * *b* = tan *A* * *b* = tan *A b’*ere,

Dette giver formlen tangent *A* = højde/bund, eller tan *A* = *h*/*b* eller tan *A* = 5/10 i vores tilfælde.

En vinkelmåler viser, at vinklen *A* er lidt over 25 grader. Når vi tester dette, bliver tangens 25 = 0,466. Den omvendte tan-knap ‘tan^-1’ giver det præcise resultat, tan^-1(0,5) = 26,6 grader.

Tangens A angiver også diagonalens hældningstal, stejlhed eller stigningsevne.

I et x-y-koordinatsystem kan en kurve skabes ved hjælp af en formel $y = f(x)$. Her er kurven mellem to nære nabopunkter en diagonal i et rektangel, og da bunden og højden her er ændringer i x, Δx, og i y, Δy, beskriver tangenttallet nu kurvens stejlhed som per-tallet $\Delta y/\Delta x$, også kaldet kurvens lokale hældning.



Figur 16. En svagt buet kurve er lineær lokalt, hvis ændringerne i *x* og *y* er små, d*x* og d*y*

Ordet ‘tangent’ bruges, da højden vil være en tangent i en cirkel med centrum i A og med bunden som radius. Dette giver en formel for omkredsen, da en cirkel indeholder mange retvinklede trekanter ud fra A. I en cirkel med radius r omtælles h i r som h = (h/r) * r = tan A * r.

En halvcirkel er 180 grader, der opdeles i 100 små dele som 180 = (180/100)*100 = 1,8 100ere = 100 1,8ere. Med A som 1,8 grader er cirklen og tangenten, h, næsten identiske. Så halvdelen af omkredsen i en cirkel med radius 1, kaldet π, er

π = 100*h = 100*tan 1,8 = 100*tan (180/100) = 3,1416

Dette giver en formel for tallet π: π = tan (180/n) * n, for n tilpas stor.

Vi ser også, at i en cirkel med radius r er omkredsen 2*π*r, og arealet er π*r^2 eller π/4* d^2, hvor d er cirklens diameter.

Så en d-cirkel optager næsten 80% af pladsen inde i den omgivende d-firkant.

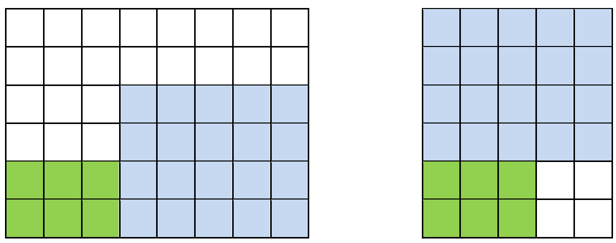
Kvadrater kan plusses som kvadratet på deres fælles bund-toplinje, se figur 3 ovenfor. Pythagoras har givet navn til denne regel.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages på et BBBræt med andre tal.

Afsluttende test. Plus et 4-kvadrat med et 6-kvadrat til et nyt kvadrat.

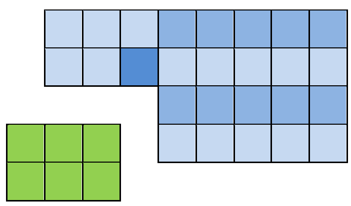
ML15. Plusning vandret eller lodret, T = 2 3ere + 4 5ere = ? 8ere; T = ? 3ere; T = ? 5ere
Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Her besvares ‘T =?’ spørgsmålet ved at omtælle.

Plusser vi 2 3ere og 4 5ere som 8ere, plusser vi arealer, der kaldes integralregning. At vende processen om ved at spørge ’2 3ere og hvor mange 5ere giver 4 8ere?’ kaldes differentialregning, fordi vi finder forskellen mellem de kendte totaler, før vi omtæller den i 5ere, (T2-T1)/5 eller ΔT/5.



Figur 17. To totaler 2 3ere og 4 5ere plusset vandret ved siden af og lodret ovenpå

Plusser vi 2 3ere og 4 5ere som 3ere eller 5ere, skal vi først omtælle for at gøre enhederne ens. For at omtælle 2 3ere i 5ere indtaster vi først ‘2*3/5’, der giver ‘1.mere’, derefter indtaster vi ‘2*3-1*5’ og giver ‘1’, så 2 3ere er 1B1 5ere, hvilket giver det samlede antal 1B1 5ere + 4B0 5ere = (1B1 + 4B0) 5ere = 5B1 5ere.



Figur 18. Vandret plusning vendes, når vi spørger 2 3ere + ? 5ere = 4 8ere

Opbygning af færdigheder. Handlingen gentages på et BBBræt med andre tal.

Afsluttende test. 3 4ere + 6 5ere = ? 9ere. 3 4ere + 6 5ere = ? 4ere. 3 4ere + 6 5ere = ? 5ere. Og 3 2ere + ? 5ere = 4 6ere.

ML16. Minus og plus med etcifrede tal, 8 + 6 = 1B2 + 1B0 = 2B2 6ere

Totalen eksisterer her på et BBBræt. Spørgsmålet ‘T=?’ besvares ved at bruge elastikker til at markere bundterne.

Med væk-trækningen ‘8-6=?’ markerer en elastik 8 på et BBBræt, og fingrene skjuler 6eren, der trækkes væk, så 8-6 = 2.

Med plusning ‘8+6=?’ markerer to elastikker på et BBBræt 8 og 6 på to parallelle linjer for at vise, at summen kan eksistere på to måder, som 2B2 6ere eller som 2B-2 8ere.

Figur 19. Plusning af 6 og 8 som 2B2 6ere eller som 2B-2 8ere eller som 2*1/2B + 1 + 3

Her vil brug af halvbundter, 5ere, lette plusning som ti’ere, da 6+8 = ½B1 + ½B3 = 1B4 = 14.

Flercifrede tal kan plusses og væk-trækkes med et over- eller et under-læs, hvilket overflødiggør mente og lån

T = 36 + 47 = 3B6 + 4B7 = 7B13 = 8B3 = 83, og T = 86 - 37 = 8B6 - 3B7 = 5B-1 = 4B9 = 49

Opbygning af færdigheder. Handlingen gentages med andre etcifrede og tocifrede tal.

Afsluttende test. 9 – 7 = ?, 9+7 = ?, T = 38+46 = ?; T = 82 – 54 = ?

ML17. Plusning af per-tal og brøker er integralregning

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Spørgsmålet ‘T = ?’ besvares ved at bruge elastikker til at markere bundterne.

I blandingsregning spørges fx ’2kg á 3kr/kg og 4kg á 5kr/kg i alt hvad?’. Her kan styk-tallene 2kg og 4kg plusses direkte, mens per-tallene 3kr/kg og 5kr/kg først skal ganges til styktal, og de plusses da som arealer, dvs. som integralregning. Her er per-tallene stykkevis konstante, men de kan også være lokalt konstante, som i tilfældet med et faldende objekt med et stigende meter/sekund-tal.

Før brøker plusses, skal de også ganges til styktal. Så med æbler giver 1 rødt af 2 plus 2 røde af 3 en total på 3 røde af 5, og selvfølgelig ikke 7 røde af 6 som matematismen hævder.

Figur 20. Per-tal plæusses som arealer og brøker plusses med enheder, begge som integralregning

Sammenlægning som per-tal forudsiges af potens, hvor fx 6% 10 gange giver 106%^10 eller 179%, dvs. de forventede 60% plus yderligere 19%, og hvor 6% 20 gange giver 321%, dvs. de forventede 120% plus yderligere 201%, der viser nytten af pensioner.

	B	~~B~~	
Venstre	1	2	3
Højre	1	1	2
Total	2	3	5

	B	~~B~~	
Venstre	1/3	2/3	1
Højre	1/2	1/2	1
Total	-	-	-

	B	~~B~~	
Venstre	1/2	2/3	-
Højre	1/2	1/3	-
Total	1	1	-

Figur 21. I krydstabeller skal styk-tallene findes før per-tallene beregnes

Når jeg ser ind i min højre hånd, ser jeg 3 fingre til venstre, L'erne og 2 fingrene til højre, R'erne. Jeg bøjede de to yderste fingre. Så er 1/3 af L'erne bøjet og 1/2 af R'erne. Betyder det, at 1/3 af de bøjede er L'er?

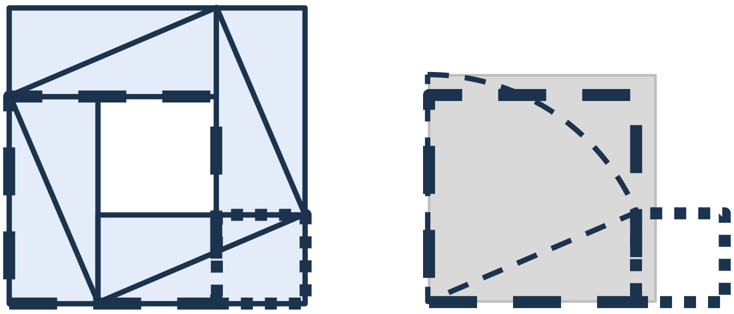
Nej, 1/2 er. Så i en krydstabel kan vi ikke gå fra procenterne i den ene retning til dem i den anden retning uden først at udregne styk-tals tabellen. Dette kaldes Bayes-princippet.

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med andre tal.

Afsluttende test. 3kg á 4kr/kg og 5kg á 6kr/kg giver hvad i alt?

ML18. Plusning af Bundt-Bundt kvadrater

Totalen her findes som bundt-bundt nummerkvadrater på et BBBræt. Spørgsmålet 'T =?' besvares ved at bruge elastikker eller terninger til at markere bundterne.

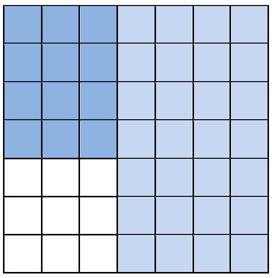


Figur 22. De to kvadrater plusses tilføjes som kvadratet dannet af den fælles Bund-Top BT-linje

På en BBBoard placerer vi fire 7 3'ere, så de danner en ti gange ti firkant, der indeni indeholder to firkanter, 7 7'ere og 3 3'ere samt to stakke. Men den indeholder også et kvadrat dannet af diagonalerne i stakkene samt fire halve stakke.

Så de to kvadrater plusses som et kvadratet dannet af den fælles Bund-Top BT-linje og har således længden som kvadratroden af summen, dvs. √(7^2 + 3^2) = 7,62.

Så i denne stak plusses højden og bunden som kvadratet på diagonalen. Denne regel er navngivet af den antikke græske tænker, Pythagoras.



Figur 23. På et BBBræt ses at 7^2 - 3^2 = 7*(7-3) plus (7-3)*3 = (7+3)*(7 – 3)

På et BBBræt væk-trække vi en 3x3 kvadrat fra et 7x7 kvadrat. Dette efterlader 7 (7-3)'ere og (7-3) 3ere, der kan vendes til 3 (7-3) 'ere, i alt (7 + 3) (7-3)'ere.

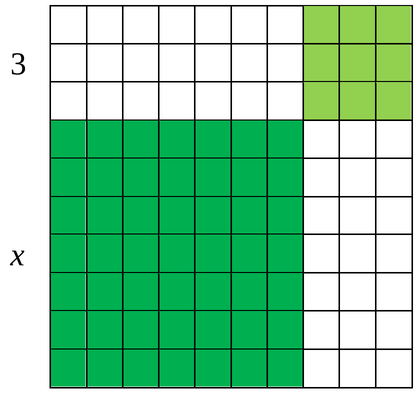
Så 7^2 – 3^2 = (7+3)*(7 – 3).

Tilføjelse af firkanter kan også være involveret, når man løser en kvadratisk ligning. På en BBBoard ser vi, at T = (*x* + *3)* * *(x* + *3)* er en firkant med fire dele, to firkanter *x* ^ 2 og 3 ^ 2 og to stakke 2 * 3 * *x*, så T = *x*^2 + 6 * *x* + 9. Den kvadratiske ligning *x* ^ 2 + 6 * *x* + 8 = 0 får derefter whoe-kvadratet til at forsvinde bortset fra 9-8 = 1.

Så (*x* + 3)^2 = *1*, hvilket giver to løsninger, *x* = -2 og *x* = -4, der holder, når de testes:

(-2)^2 plus 6*(-2)+ 8 = 4-12+8 = 0, slut (-4)^2 plus 6*(-4) plus 8 = 16-24+8 = 0

Den kvadratiske ligning 'x^2 + 6*x + 10 = 0' har ingen løsninger, da her '(*x* + 3)^2 = -1'.



Figur 24. En (x+3)-kvadrat indeholder et x-kvadrat og et 3-kvadrat og to 3*x-stakke

Alternativt kan vi omskrive ligningen x^2 + 6*x + 8 = 0, først som

x^2 + 2*3*x + 3^3 – 3^2 + 8 = 0, så som

(x+3)^2 – 9 + 8 = 0, derefter som

(x+3)^2 = 9 – 8 = 1 igen med løsningerne x= -2 og x = -4,

Opbygning af færdigheder. Handlingen gentages med andre tal.

Afslut test. Tilføj 3 3s og 4 4s som en bubndle-bundle firkant. Løs ligningen x^2+8*x+12 = 0

ML19. Plusning af ukendte bogstavtal

Totalen eksisterer her som et firkantet bundt-tal på et BBBræt. Spørgsmålet 'T = ?' besvares ved at bruge elastikker til at markere bundterne.

I bogstav-tallet T = 3ab er gangetegnet usynligt, og bogstaverne står for ukendte tal. Da enhver faktor kan være en enhed, kan T ses som 3 ab'ere, eller som (3a) b'ere eller som (3b) a'ere. For at undgå at blive forvirret af 'ere' udelader vi det, så T = 3ab = 3 * ab = 3a * b eller 3b * a. Da totaler har brug for en fælles enhed for at plusses, skal denne først findes:

T = 3ab + 4ac = 3b * a + 4c * a = (3b + 4c) * a

T = 2ab^2 + 4bc = ab * 2b + 2c * 2b = (ab +2c) * 2b

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med andre tal og bogstaver.

Afsluttende test. T = 4$ab^{2}d$ + 8bcd

ML20. Ændring i tid

Totalen eksisterer her som toppe på et BBBræt. Spørgsmålet 'T = ?' besvares ved at overføre resultaterne til et firkantet papir og forbinde toppene med en kurve.

Med tiden vokser en total ved at blive plusset eller ganget med et tal, kaldet pus-vækst og gange-vækst eller lineær og eksponentiel vækst.

Plus-vækst: Slut-tal = Start-tal + vækst-tal * vækst-gange, eller kort, T = B + a*n. Tallet a kaldes også hældningen.

Gange-vækst: Slut-tal = Start-tal * vækst-faktor ^ vækst-gange, eller kort, T = B * a^n, da 200kr + 5% = (200*105%)kr, så her er tallet a = 1 + rente = 100% + 5% = 105%.

Kombineret vækst (opsparing i en bank): Her har vi, at A/a = R/r, hvor A er slut-kroner, a er periode-kroner, R er slut-rente, r er periode-rente og 1+R = (1+r)^n, hvor n er antallet af perioder.

100% opdelt i n dele vil give Euler tallet e = (1+1/n)^n = 2,718 for n tilpas stor.

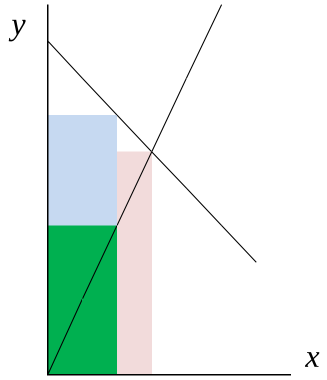
En konstant ændring af væksttallet vil give en kvadratisk vækst med en parabel, der krummer opad eller nedad, hvis tallet stiger eller falder. En konstant ændring af krumningen vil give kubisk vækst med en dobbelt-parabel med krumning og modkrumning.

En konstant faldende vækstfaktor vil give logistisk mætningsvækst med en bakkekurve som ved infektioner. Sammenblanding af eksponentiel og mætningsvækst kan forårsage unødvendig skade.

ML21. Bundt-tal i et koordinatsystem

Totalen eksisterer her som toppe på et BBBræt. Spørgsmålet 'T=?' besvares med elastikker som streger på BBBræt. Bundt-tallet *y x*'ere med højden *y* og bredden *x* kan kaldes et 'variabelt bundt-tal'. Her giver $y = 2*x$ et stigende og $y = 9 – x$ et faldende bundt-tal.

Markering af øverste højre hjørne giver to linjer. For at forudsige det udvendige skæringspunkt kan forudsiges ved at gøre de to højder ens, $2*x = 9 – x$. Når vi flytter til modsat side med modsat tegn, får vi $3*x = 9$ og $x = 9/3 = 3$, hvilket gør $y = 2*3 = 6$. Så forudsigelsen er, at de to bundt-tal bliver som 3 6ere, hvilket holder på BBBræt, hvor den første top nu er 0 i stedet for 1.



Figur 25. I et *x-y* koordinatsystem kan stakke stige og falde

I det voksende bundt-tal vil dets samlede Total stige, da højden her vokser med voksende bredde. I det faldende bundt-tal er dette ikke tilfældet, da højden falder med voksende bredde. Her er totalen $T = y*x = (9 – x)*x = 9*x – x$^2.

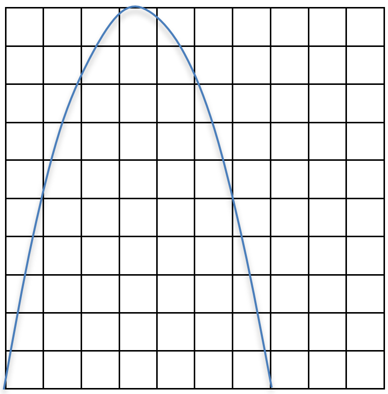
Opsættes af en tabel med $x = 1, 2, ..., 9$ ser vi, at T først vokser og derefter falder; og at T topper som 20 for $x = 4$ og $x = 5$; og at $T = 20{,}25$ for $x = 4{,}5$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0

Selvom et bundt-tal vokser, kan dets vækst-tal falde, så dets markerede hjørner vil ligge på en bøjningslinje kaldet en parabel, hvor $y = b*x + a*x$ ^ 2. Når vi passerer gennem punkterne $(x,y) =$ (1,6) og (2,10), finder vi, at $10 = b*2 + a*4$ og $6 = b*1 + a*1$ eller $12 = b*2 + a*2$.

Det giver nu to ligninger for $b*2$: $10 – a*4 = 12 – a*2$. Når vi flytter til modsat side med modsat tegn, får vi $10 – 12 = a * 4 – a * 2$ eller $-2 = a * 2$ eller $-1 = a$. Med $6 = b + a$ giver dette $b = 7$.

Så på parablen er punkterne (*x*,*y*) forbundet med formlen $y = 7*x – x$^2. Den passerer således gennem punkterne (0,0), (1,6), (2,10), (3,12), (4,12), (5,10), (6,6) og (7,0).



Figur 26. Ved at passere gennem (0,0) og (1,6) og (2,10) får parablen formlen $y = 7*x - x^2$

Kan skæringspunkterne forudsiges mellem parablen og de to linjer ovenfor?

Kan det forudsiges, at et faldende bund-tal T = $b – a*x$ vil have sit maksimum ved bredden $b/(2*a)$?

Opbygning af rutine. Handlingen gentages med andre voksende og faldende bundt-tal for at finde ud af, hvornår de er ens, og hvornår de faldende bundt-tal topper.

Afsluttende test. $y = 9-2*x$ og $y = x$.

ML22. Spil-teori og skade-kontrol

Totalen eksisterer her som tårne af centicubes og toppe på et BBBræt. Spørgsmålet 'T=?' besvares med elastikker som streger på BBBræt.

I et spilteori 2x2 nulsumsspil har to spillere A og B hver 2 strategier, som resulterer i fire forskellige betalinger fra B til A. Det kaldes et nulsumsspil, da en spillers gevinst er den anden spillers tab.

I et spil hvor B vælger strategi B1, er betalingen til A 8kr eller 2kr, hvis A vælger strategi A1 eller A2. Og hvis B vælger strategi B2, er betalingen til A 4kr eller 6kr, og A vælger strategi A1 eller A2. Vi kan vise dette spil ved at bygge fire tårne med centicubes.

Først antager vi, at B vælger strategi B1. Hvis A nu p gange vælger A2 og n-p gange A1, vil A's resultat efter n runder være i alt

$T = 2*p + 8*(n-p) = 8*n – 6*p = (8*n – 6*p)/n * n = (8 – 6*p/n) * n$.

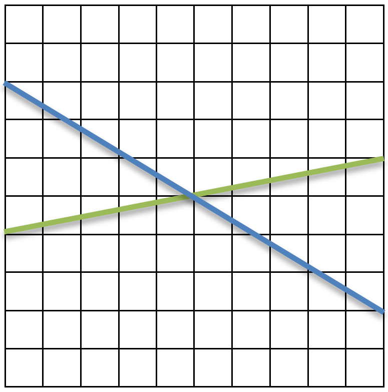
Hvilket er $T1 = 8 – 6 * p/n$ pr. runde, vist på et BBBræt som en linje, der forbinder 8 til venstre, hvor p er 0, til 2 til højre, hvor p er n.

Dernæst antager vi, at B vælger strategi B2. Hvis A nu p gange vælger A2 og n-p gange A1, vil A's resultat efter n runder være i alt

$T = 6*p + 4*(n-p) = 4*n + 2*p = (4*n + 2*p)/n*n = (4 + 2*p/n)*n$.

Hvilket er $T2 = 4 + 2*p/n$ pr. runde, vist på et BBBræt som en linje, der forbinder 4 til venstre, hvor p er 0, til 6 til højre, hvor p er n.

Med p/n som u finder vi skæringspunktet, hvor de to totaler er ens: T1 = T2 eller $8 - 6 * u = 4 + 2 * u$ eller $8 * u = 4 = (4/8) * 8$ eller $u = 4/8 = 1/2$, hvilket giver T1 = T2 = 5kr.



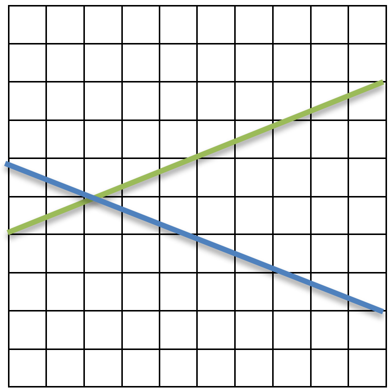
Figur 27. Hvis B vælger strategi B1, vil A modtage mellem 8 og 2kr, ellers mellem 4 og 6kr

Så hvis A blander strategierne 1-til-1ved at spille plat og krone, vil det gennemsnitlige resultat være 5kr pr. runde.

Set fra B's side får vi også de to linjer

$S1 = 4 + 4*u$ og $S2 = 6 – 4*u$,

der skærer hinanden, hvor $4 + 4*u = 6 – 4*u$, eller $8*u = 2$, eller $u = 2/8$, eller $u = 1/4$, der giver S1 = S2 = 5kr.



Figur 28. Hvis A vælger strategi A1, vil A modtage mellem 4 og 8kr, ellers mellem 6 and 2kr

Så hvis B blander strategierne 1-til-3 ved at kaste to mønter, vil det gennemsnitlige resultat igen være 5kr pr. Runde. 5kr kaldes derfor værdien af spillet, dvs. det beløb, B skal modtage pr. runde for at gøre spillet retfærdigt, hvor ingen vinder eller taber i det lange løb.

Fra A's side kaldes 5kr 'maxi-min' værdien, da afvigelse fra den vil reducere værdien. Fra B's side kaldes 5kr 'mini-max' værdien, da afvigelse fra den vil øge værdien.

I et lignende spil ændres 4kr til 8kr. Her dominerer A1-strategien A2-strategien, der altid vil være lavere for A. Ligeledes dominerer B1-strategien B2-strategien, der altid vil være højere for B. Så her er værdien af spillet 6.

Dette punkt kaldes et 'saddelpunkt', da betalingen går op den ene vej og ned ad den anden.

Opbygning af rutine. Spillet gentages med fire andre betalinger fundet, fx ved at kaste nogle terninger.

Afsluttende test. Erstat de fire betalinger 8,2,4,6 med 9,3,5,8.

ML23. Enkle brætspil

Forskellige spil kan finde sted på et BBBræt.

• En racerbane. En 4x4 græsplæne placeres midt på et BBBræt. Start- og slutlinjen går fra (5,0) til (5,3). En tur må ændre nul eller én enhed i vandret og lodret retning. Du må røre, men ikke krydse de indre eller ydre grænser. Hvis du gør det, genstarter du med 0 hastighed så tæt på krydsningspunktet som muligt. Du kan krydse din modstanders spor, men ikke ende i samme punkt. Så er du ude. Løbet kan gentages med forskellige plæneformer.

•Overlevelse. Du begynder i (5,5). Du kaster en terning og flytter tallet til højre, hvis tallet er lige, ellers til venstre. Du kaster igen og flytter nu tallet op, hvis tallet er lige, ellers ned. Du må røre, men ikke overskride grænsen. Hvor mange trin kan du overleve?

• Lodret løb. En elastik deler et BBBræt lodret i midten. To spillere har hver tre centicubes placeret på niveau et. De kaster en terning og vælger en cube for at flytte tallet opad og ned igen, hvis der er overskud. Vinderen er den første til at have alle tre cuber på niveau ti.

Algebra-tavlen

Der er to slags tal i verden, styk-tal og per-tal, som kan være i uens til eller ens, og som kan genforenes.

Målet med matematik er derfor ikke at 'matematikke', for det kan man ikke, men at handle, at 'genforene uens og ens styk-tal og per-tal'. På arabisk betyder 'algebra' at genforene.

De fire regnearter, der forener uens og ens styk-tal og per-tal, er: plus, gange, integration og potens som vist i Algebra-tavlen nedenfor, der også viser de modsatte regnearter, der opdeler totaler: minus, division, differentiation samt faktor-søgning (rod) og faktor-tælling (logaritme).

Regnearter **forener**/ *opdeler Totaler i*	Uens	Ens
Styk-tal m, s, kg, kr	***T = a + n*** *T – n = a*	***T = a * n*** *T/n = a*
Per-tal m/s, kr/100kr = %	***T = ∫ f dx*** *dT/dx = f*	***T = a^b*** *b√T = a loga(T) = b*

Figur 29. Algebra-tavlen viser, hvordan vi forener og opdeler de fire tal-typer, og hvordan vi løser ligninger ved at flytte til modsat side med modsat tegn.

Fakta og fiktion og fup, de tre genrer i tal-modeller

Når vi først ved, hvordan vi tæller og omtæller totaler, og hvordan vi forener og opdeler de fire taltyper, uens og ens styk-tal og per-tal, kan vi aktivt bruge dette tal-sprog til at producere indre fortællinger om ydre totaler, der eksisterer i rum og tid. Dette kaldes modellering.

Som i tale-sproget findes også tal-sprogets fortællinger i tre genrer: fakta, fiktion og fup, også kaldet siden-da, hvis-da og hvad-så-modeller eller rum-, rente- og risikomodeller.

Fakta-historier er 'siden da' historier, der kvantificerer og forudsiger forudsigelige kvantiteter ved hjælp af faktuelle tal og formler. Typisk modellerer de fortiden og nutiden. De skal kontrolleres for korrekthed og enheder.

Fiktions-historier er 'hvis-så' historier, der kvantificerer og forudsiger uforudsigelige kvantiteter ved hjælp af antagne tal og formler. Typisk modellerer de fremtiden. De skal suppleres med scenarier, der bygger på alternative antagelser.

Fup-historier er 'hvad-så' historier, der kvantificerer og forudsiger uforudsigelige kvaliteter ved hjælp af falske tal og formler. Typisk plusser de uden enheder eller skjuler alternativer. Her skal tal-historier erstattes af ord-historier.

Modellering og de-modellering

Målet er at opleve, hvordan formler, der beregner *y* fra *x*, danner kurver, der udtrykker ændring i tid, og hvordan totaler i rummet kan opdeles i dele, der hver derefter bliver en procentdel af totalen.

• Modellering er at finde en indre løsning til et ydre problem indeni med fire trin. Først oversættes et ydre problem til et indre problem, som så fører til en indre løsning, der derefter oversættes til en ydre løsning, der endelig evalueres for at se, om der er behov for en ny cyklus.

Et typisk eksempel er blandingsopgaver. De ydre problemer kan her spørge 'Hvad giver 2kg á 3kr pr. kg og 4kg á 5kr pr. kg i alt?' Det indre problem opstiller de to oplysninger under hinanden. Hvis alle tal blot plusses, fås den ydre løsning '2kg á 3kr pr. kg og 4kg á 5kr pr. kg i alt 6kg ved 8kr pr. kg'. Denne model accepteres ikke, så der er behov for en ny cyklus. Denne gang ganges per-tallene til styk-tal, før de plusses, hvilket nu giver den ydre løsning '2kg á 3kr pr. kg og 4kg á 5kr pr. kg i alt 6kg á 26kr pr. 6kg'. Denne model accepteres.

• De-modellering er den modsatte proces: Det betyder at løse et indre problem udenfor med fire trin. Først oversættes et indre problem til et ydre problem, som derefter fører til en ydre løsning, der så oversættes til en indre løsning, der til sidst evalueres for at se, om der er behov for en ny cyklus.

Et typisk eksempel er plusning af brøker.

At plusse brøkerne 1/2 + 2/3 har kun mening, når de tages af den samme enhed, $u = (u/6)*6 = k*6$, hvor $k = u/6$ og $6 = 2*3$

$T = (1/2 + 2/3)*u = (1/2 + 2/3)*6*k = (3+4)*k = 7*k = 7*u/6 = 7/6*u$,

Så i dette tilfælde 1/2 + 2/3 = 7/6.

• Vi modellerer nu banen for en kugle, der sendes væk med en vinkel. Et konstant optal giver en linje, der går op eller ned eller vandret. Men her får tyngdekraften op-tallet til at falde, så linjen kurver ned som en bøjet linje kaldet en parabel.

Vi vælger startvinklen A bestemt af tan $A = 6$.

Fra (0,0) antager vi, at bolden tager et '1 ud, 5 op' trin efterfulgt af et '1 ud, 3 op' og et '1 ud, 1 op' osv. for at nå punkterne (1,5), (2,8), (3, 9), (4,8), (5, 5), (6,0).

Da $y = 0$ for $x = 0$ og for $x = 6$, kan formlen indeholde de to faktorer (x-0) og (6-x), så et gæt kunne være $y = a * x * (6-x)$.

I punkt (1,5) bliver denne formel til en ligning:

$5 = a*1*(6-1)$, eller $5 = a*5$, løst af $a = 1$.

Så parabolformlen kan være $y = 1 * x * (6-x)$ eller

$y = -x\text{^}2 + 6*x$.

Denne formel gælder, når den testes på de andre punkter:

8 = -2^2 plus 6*2, eller 8 = -4 plus 12, eller 8 = 8, osv.

Vi finder ud af, at med 4 som det første op-tal, vil baneformlen være $y = -x \text{ ^ } 2 + 5 * x$ osv.

Højden efter 5 trin findes ved ligningen

$y = -5\text{^}2+6*5 = -25+30 = 5$.

Højden 8 nås efter x trin fundet ved ligningen

$8 = -x\text{^}2+6*x$ eller $x\text{^}2-6*x+8 = 0$, løst af $x = 2$ og $x = 4$.

Højden 10 nås aldrig, da der ikke er nogen løsninger på ligningen:

$10 = -x\text{^}2+6*x$ eller $x\text{^}2-6*x+10 = 0$.

I stedet findes dette toppunkt i midten ved $x = 6/2 = 3$, hvilket giver

$y = -3\text{^}2+6*3$ eller $y = 9$.

For at se, om det bryder gennem et tag med formlen $y = 12-x$, sidestiller vi de to y'er og får ligningen

$12 - x = -x \text{ ^ } 2 + 6 * x$ eller $x \text{ ^ } 2 - 7x + 12 = 0$, der løses for $x = 3$ og $x = 4$.

• Vi modellerer nu den begyndende månedlige indkomst for en virksomhed, der forsøger at etablere sig på et marked. Vi bruger formlen $y = x\text{^}2 – 6x + 9$, hvor trinene danner en parabel, der buer op, når punkterne (0,9), (1,4), (2, 1), (3,0), (4,1), (5,4) og (6,9) passeres.

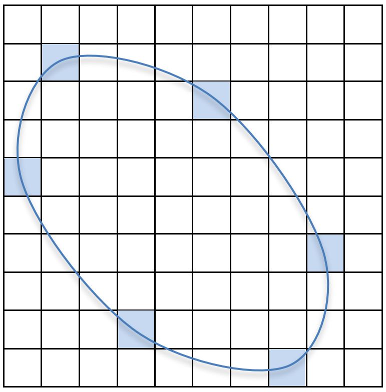
Senere vil den månedlige indkomst ændre sin krumning fra op til ned, indtil den når et maksimalt niveau. Så fra $x = 3$ bruger vi en anden model, der indeholder up-tallene 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 0. Dette giver en 'logistisk' s-formet kurve, der beskriver vækst med mætning. Når AI bliver bedt om det, kan AI give en formel for denne kurve som $y = 9/(1 + 25*2\text{^}(-1{,}9*x))$

Vi ser, at op-tallene danner en bakke. Når AI bliver bedt om det, kan AI give en formel for denne kurve som $y = 3/(2\text{^}(0{,}44*(x-3)\text{^}2))$

• Et samliv mellem katte- og mus på en ø er et eksempel på en rovdyr-byttemodel, hvor katte spiser mus. Vi forventer en cyklus i tid, da mange katte og mange mus fører til mange katte og få mus, hvilket fører til få katte og få mus, hvilket fører til få katte og mange mus, hvilket fører til mange katte og mange mus igen.

I en model antager vi, at en musebestand på 7 og 2 vil ændre kattebestanden med henholdsvis 7-5 og 2-5. På samme måde vil en kattebestand på 7 og 2 få musebestanden til at ændre sig med henholdsvis 5-7 og 5-2. Vi ser, at indledende bestande på niveau 5 vil give en stabil model. Her antager vi, at de oprindelige bestande for kattene og musene er henholdsvis 8 og 1. Den følgende periode vil de to bestande så være henholdsvis 8 + (1-5) = 4 og 1 + (5-4) = 2.

Fortsat ser vi, at kattebestanden vil ændre sig som 8, 4, 1, 2, 6, 9, 8; og at musebestanden vil ændre sig som 1, 2, 6, 9, 8, 4, 1. Dette gør det muligt at markere punkterne (8,1), (4,2) osv. på et BBBræt, der viser en cyklus, der fortsætter igen og igen. Forskellige starttal giver forskellige cyklusser.



Figur 30. Katte spiser mus, så falder muse-tallet, så falder katte-tallet, så stiger muse-tallet, så stiger katte-tallet, så falder muse-tallet osv.

• Vi modellerer nu cykliske bevægelser op og ned som observeret i naturen med dag og nat, med sommer og vinter og med tidevand i et hav. En cyklisk bevægelse kan skabes af up-tallene +2, +1, +0, -1, -2, -2, -1, +0, +1 +2. Fra og med punktet (0,5) kan AI blive bedt om at give en formel for denne kurve som

y = 5+3*sin (0,63**x*).

• At spare penge kan ske hjemme eller i en bank. Herhjemme vil slutkapitalen *c* efter *n* måneder være *c* = *b* + *a***n*, hvor *b* er startkapitalen, og *a* er tilvækst-tallet pr. måned. I en bank vil slut-kapitalen efter *n* måneder være *c* = *b**(1+*r*)^*n*, hvor *r* er vækst-procenten pr. måned.

Ved at kombinere de to i en bank kan slutkapitalen *C* findes ved formlen *C*/*a* = *R*/*r*, hvor *R* er den samlede rente inklusive den sammensatte rente, 1 + *R* = (1 + *r*)^*n*. Denne kapital kan bruges som en afdragsplan til at betale en gæld *D*, der er vokset til *E* = *D**(1 + *R*) i samme periode.

• Hvis en rente på 100% deles i 12 portioner, findes den samlede rente ud fra ligningen 1+*R* = (1+1/12)^12 = 2,613, således at *R* = 1,613 = 161,3% = 100% plus 61,3% som yderligere sammensat rente. Dette fører til Euler-tallet *e* = (1+1/*n*)^n = 2,7183 for n stor, hvilket viser, at den ekstra rente ikke kan overstige 71,8%, når 100% splittes op.

• Biologiske bestande vokser typisk eksponentielt med en konstant periodisk hastighed, hvilket giver en konstant fordoblingstid. Dette kan vises på et BBBræt, hvor de lodrette tal er i tiere. Fra og med 1/4 vil en fordoblingssekvens være

1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Alternativt kan en kapital falde ved altid at fjerne halvdelen af det, der er tilbage. Begyndende med 8 giver dette en halveringssekvens 8, 4, 2, 1, 1/2, ¼.

Dette eksponentielle henfald kan genkendes som et spejl af den eksponentielle vækst.

• Et BBBræt viser 6 7'ere. Der dannes en trekant af de tre linjer, der forbinder punkterne (0,0) og (7,10) og (10,7). Typisk vil vi finde de 7 vigtige trekanttal, dets areal, dets tre vinkler og dets sider.

Vi ser, at disse 7 tal kan findes indirekte ved at se på de tre halve rektangler, der er trukket væk fra trekantens indpakningsrektangel.

I det nederste udtrækshalvrektangel ser vi, at vinklen forudsiges af formlen tan A = 6/10, som på en lommeregner giver A = 31,0 grader. Og at arealet er 1/2*6*10 = 30. Og at længden af diagonalen d findes ved at kvadrere: d^2 = 10^2 + 6^2 = 136, hvilket giver $d = \sqrt{136} = 11{,}7$.

• På et BBBræt kan to kast med to terninger foreslå, at vi går til de to punkter (3,6) og (4,3), der derefter udgør den ene side i en firkant. Vi kan nu finde arealet af firkanten og skæringspunktet for de to diagonaler. Vi bemærker, at i stigningerne af siderne skifter ud- og op-tal plads, og man ændrer også fortegnet.

• Optimering af indkomst under begrænsninger (også kaldet 'lineær programmering'). På en messe sælger en klasse kasketter og skjorter. De kan højst købe 6 kasser med kasketter og 4 kasser med skjorter, der hver koster 1 enhed. Deres budget er 8 enheder, og deres indkomst er 1 enhed pr. skjorteæske og 2 enheder pr. kasketæske. Hvordan kan de optimere indkomsten?

På et BBBræt viser en vandret og en lodret elastik grænsen på skjorterne og på kasketterne. En linje, der forbinder (0,8) og (8,0), viser den budget-linje, der ikke skal overføres. En linje, der forbinder (0,10) og (5,0), viser indkomstlinjen på 10 enheder, der flyttes til højre indtil (6,2), hvor den første begrænsning vil blive overtrådt. Så klassen skal købe 6 kasser med kasketter og 2 kasser med skjorter, hvilket vil give dem en indkomst på 2*6 + 1*2 eller 14 enheder.

Tre fodnoter

Totalen eksisterer her som firkantet bundt-tal på et BBBræt. Målet er at se indholdet af tre regne-love.

Den kommutative lov: Rækkefølgen betyder ikke noget, $a*b = b*a$

Fordelingsloven: Ved plusning af bundt-tal, kan enheden sættes uden for en parentes, $a * c + b * c = (a + b) * c$

Den associative lov: Parenteser kan flyttes efter ønske, $a * (b * c) = (a * b) * c$

På et BBBræt markerer to elastikker 6 3ere. Hvis vi drejer brættet en kvart runde, har vi 3 6ere, hvilket illustrerer, at 6*3 = 3*6.

En tredje elastik deler de 6 3erne i 4 3ere og 2 3ere for at illustrere, at 4*3 + 2*3 = (4+2)*3.

Med centicubes 2 3s 4 gange fås i alt (2*3)*4. Hvis vi vender dem om, har vi 2 gange 3 4ere, hvilket illustrerer, at (2*3)*4 = 2*(3*4).

Læreruddannelse

MATHeCADEMY.net er designet til at levere materiale til før- og efteruddannelse af lærere ved hjælp af PYRAMIDeDUCATION, der gør det muligt for, at faglig udvikling kan finde sted på internettet i selvstyrende grupper med otte deltagere, der tjekker indre prædikater ved at spørge de ydre subjekt i stedet for en instruktør. Dette gør det muligt at teste og udvikle mestring af Mange med Mange-matik over hele verden i små designstudier, der er klar til at blive skaleret op.

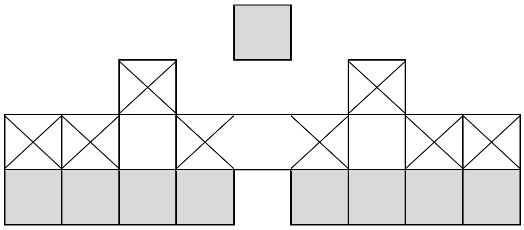
MATHeCADEMY.net tilbyder et gratis etårigt fjernundervisningskursus i CATS-metoden til matematik, Count & Add in Time & Space. C1, A1, T1 og S1 er til grundskolen, og C2, A2, T2 og S2 er til gymnasiet. Desuden er der en studieenhed i kvantitativ litteratur. Kurset er organiseret som PYRAMIDeDUCATION, hvor 8 lærere danner 2 hold af 4, der vælger 3 par og 2 instruktører efter tur. En ekstern coach hjælper instruktørerne med at instruere resten af deres hold. Hvert par arbejder sammen med at løse tæl&regn problemer og rutinemæssige problemer; og at udføre en pædagogisk opgave, der skal rapporteres i et essay rigt på observationer af eksempler på kognition, både genkendelse og erkendelse, dvs. både assimilering og akommodering. Coachen hjælper instruktørerne med at rette tæl&regn opgaverne. I et par retter hver lærer den andens rutineopgave. Hvert par er opponenter på essayet fra et andet par. Hver lærer betaler for uddannelsen ved at coache en ny gruppe på 8 lærere.

1 coach

2 instruktorer

3 par

2 teams



Figur 31. PYRAMID**e**DUCATION med 2 teams som 3 par og 2 instruktorer, plus en coach

Materialet til grundskolen og gymnasiet har et kort spørgsmål-og-svar-format. Spørgsmålet kunne være: Hvordan tæller vi mange? Hvordan omtæller vi 8 i 3ere? Hvordan tæller vi i standardbundter? De tilsvarende svar ville være: Ved at bundte og stakke totalen T forudsagt af T = (T/B) * B. Så t = 8 = (8/3)*3 = 2*3 + 2 = 2*3 + 2/3*3 = 2 2/3*3 = 2B2 3ere. Bundtning af bundter giver et polynomium: T = 456 = 4BundtBundt + 5Bundt + 6 = 4ti-ti + 5ti + 6 = 4*B^2 + 5*B + 6*1. Ekstra materiale finds som MrAlTarp YouTube videoer.

Hvor forskellig er forskellen?

Cifre er nu ikke længere symboler som bogstaver, men ikoner med så mange pinde, som de repræsenterer. 3 kaldes nu '1B0 3s' eller '0B3 ti'ere'. Ti, elleve ende tolv kaldes nu også 'et-bundt-nul', 'et-bundt-et' og 'et-bundt to'. Og hundrede og tusind kaldes også 'bundt-bundt' og 'bundt-bundt-bundt'.

Flercifrede tal forekommer ikke længere uden enheder, da 23 med enheder nu er 2B3, hvilket positionssystemet.

Beregninger med overlæs og underlæs giver en fleksibilitet, der overflødiggør mente of lån, fx 46+37 = 4B6+3B7 = 7B13 = 8B3 = 83. Og 86 – 37 = 8B6 – 3B7 = 5B-1 = 4B9 = 49.

Plusning afhænger nu af enhederne, så 2 + 3 er ikke 5 af nødvendighed. 2uger + 3uger = 5uger, men 2uger + 3dage = 17 dage. Så uden en enhed eksisterer 3 ikke, kun med en bundt-enhed som fx 0B3 ti'ere eller 1B0 3ere eller 1B1 2ere eller 1B-1 4ere eller 1B-2 5ere osv.

Så for at plusses skal 2 og 3 have den samme enhed, fx '2+3' = (1B0 + 1B1) 2ere = 2B1 2ere eller '2+3' = (1B-1 + 1B0) 3ere = 2B-1 3ere = 1B2 3ere. Ligeledes med subtraktion '9–6' = (1B3–1B0) 6ere = 0B3 6ere = '3' eller '9–6' = (1B0 –1B-3) 9ere = 0B - -3 9ere = 0B3 9ere, hvilket viser, at minus gange minus skal være plus.

Desuden er plusning nu ikke veldefineret, da 2 3ere og 4 5ere kan plusses både lodret ovenpå efter en omtælling har gjort enhederne ens, eller vandret ved siden af som arealer som integralregning.

Gangestykker bærer nu enheder automatisk, og 6*8 er ikke 48 af nødvendighed. I stedet eksisterer 6*8 som 6 8ere, der måske eller måske ikke omtælles til en anden enhed, fx til 9ere eller til ti'ere: 6 8ere er 5B3 9ere og 4B8 ti'ere.

Division er nu anderledes, da 8/2 har forskellig betydning i tid og rum, og nu betyder '8 delt i 2 i tid', men '8 delt i 2ere i rum', når vi omtæller 8 i 2ere.

Løsning af ligninger nu er anderledes. Ligningen 'u*2 = 8' spørger 'Hvor mange 2ere i 8?', hvilket naturligvis findes ved at omtælle 8 i 2ere som 8 = (8/2)*2, så løsningen er u = 8/2, der findes ved at flytte 'til modsat side med modsat tegn', der følger den formelle definition: 8/2 er det tal$u$, der ganget med 2 giver 8: Hvis u * 2 = 8, så er u = 8/2. Det overflødiggør balanceringsmetoden.

Ligninger ses ikke længere som to ækvivalente tal-navne, der forbliver ækvivalente med den samme operation udføres på begge. Og de transformeres ikke længere ved hjælp af den kommunikative, associative og distributive lov; eller de to abstrakte begreber, -2 og 1/2 som inverse elementer til 2, og 0 og 1 som neutrale elementer ved plus og gange. Og vi bruger ikke længere den neutraliserende 'gør det samme på begge sider' vægt-metode til at løse ligningen 2*x = 8 ved at sige:

$2*x = 8; \quad (2*x)*1/2 = 8*1/2; \quad (x*2)*1/2 = 4; \quad x*(2*1/2) = 4; \quad x * 1 = 4; \quad x = 4$

Dobbeltberegningen 2+3*4 er pr. definition ikke længere 14 eller efter hierarkireglen ’PEMDAS’. Med enheder er 2+3*4 nu 2 1ere + 3 4ere, hvilket er (0B2+3B0) 4ere eller 3B2 4ere eller 1B4 ti’ere.

Bogstavberegningen ‘2**a* + 3**a* = (2+3)**a*’ er ikke længere et eksempel på en distributiv lov, men et eksempel på at have samme enhed.

Proportionalitetsreglen ‘gå over enerne’ erstattes af omtælling i det fælles per-tal: med 4kr pr. 5kg eller 4kr/5kg er 16kr = (16/4)*4kr = (16/4)*5kg = 20kg.

Brøker er ikke længere tal i sig selv, i stedet er de per-tal med samme enhed, 3meter/4meter = 3/4, 3 meter/100meter = 3/100 = 3%. Så endelig accepteres per-tal sammen med brøker.

Uden enheder er cifre, pr. tal og brøker ikke tal, men operatorer, der har brug for et tal for at blive en total tal. Så brøker har også brug for enheder for at plusse: 1 rød af to æbler plus 2 røde af 3 æbler i alt (1+2) røde af (3+4) æbler, dvs. 1/2 + 2/3 = (1+2)/(2+3) = 3/5 i dette tilfælde, og ikke 7 røde af 6 æbler som matematismen hævder.

Trigonometri behøver ikke længere vente på plangeometri og koordinatgeometri. Det følger nu som et eksempel på per-tal der opstår, når vi omtæller siderne i en stak delt af dens diagonal.

Differentialregning følger nu efter integralregning, som netop besvarer kernespørgsmålene: hvordan kan vi plusse stakke i første klasse, og hvordan kan vi plusse stykkevis og lokalt konstante per-tal i blandingsproblemerne i mellemskolen og i gymnasiet.

Løsning af en kvadratisk ligning behøver ikke længere vente til gymnasiet, da bundt-bundter jo er kvadrater, der fører direkte til spørgsmålet ‘hvordan kan vi kvadrere en firkant?’ Og hvor et dobbelt delt kvadrat indeholder de tre dele, der indgår i en kvadratisk ligning.

Algebra-pladsens fantastiske enkelhed vil ikke længere være skjult.

Og modeller vil ikke længere alle blive set som unøjagtige forenklinger, men som fortællinger med tre genrer, fakta og fiktion og fup.

Oversigt over forskellen mellem Essens- and Eksistens-matematik

	Essens-matematik, mate-matisme	**Eksistens-matematik, Mange-matik**
Cifre	Symboler	Ikoner
345	Positions-system	T = 3BB 4B 5, BB = B^2, BBB = B^3
Regnearter	Funktioner, orden: + - x / ^	Ikoner, modsat orden: ^ / x - +
3 + 4	3 + 4 = 7	Meningsløst uden enheder
3 * 4	3 * 4 = 12	3*4 = 3 4ere, som evt. kan omtælles til 1,2 ti'ere
9 = ? 2ere	Meningsløst, kun ti-tælling	9 = 3B3 = 5B-2 = 4B1 = 4½ 2ere
8 = ? 2ere	Meningsløst, kun ti-tælling	8 = (8/2)*2, T = (T/B)*B, proportionalitet
2*u = 8	(2*u)*½ = 8*½, så (u*2)*½ = 4, så u*(2*½) = 4, så u*1 = 4, so u = 4	2*u = 8 = (8/2)*2, så u = 8/2
6*7 = ?	øh 44? øh 52, øh 42? OK	6*7 = (B-4)*(B-3) = (10-4-3)*B + 4*3 = 3B12 = 4B2 = 42
4kg=5kr, 6kg=?	1kg = 5/4kr, 6kg = 5/4*6kr	6kg = (6/4)*4kg = (6/4)*5kr
1/2 + 2/3 = ?	1/2 + 2/3 = 3/6 + 4/6 = 7/6	1/2*2 + 2/3*3 = 3/5*5
2 3ere + 4 5ere	2*3 + 4*5 = 6 + 4*5 = 10*5 ?	2*3 + 4*5 = 3B2 8ere, integration
6 + 9 = ?	6 + 9 = 15	=(1B0 + 1B3) 6ere = 2B3 6ere = 1B5 =(1B-3+1B0) 9ere = 2B-3 9s = 1B6 9ere
Tangens = ?	tan = sinus/cosinus	højde = (højde/bund)*bund, tan = højde/bund

Konklusion

Vi begyndte med at observere forskellen mellem 'matematisme', som plusser uden enheder og derfor altid sand indenfor, men sjældent udenfor, og 'mange-matematik' som i stedet bruger bundt-tal med enheder inspireret af, hvordan det uuddannede barn ser det ydre eksisterende faktum Mange. Vi undersøgte derefter konsekvenserne af at lade eksistens komme før essens ved at lade tælling og omtælling komme før plus. Endelig formulerede vi en række mikro-læseplaner for, hvordan Mange-matik kan læres i skolen ved at arbejde med ydre ting og handlinger i rum og tid som totaler på et 2dimensionelt Bundt-Bundt-Bræt. Men vil dette give eleven mulighed for at lære matematik eller at blive talkyndig som ønsket af FN's mål for bæredygtig udvikling?

Tilsyneladende findes der forskellige definitioner af 'talkyndighed', hvor eksistens og essens har forskellig rækkefølge. Den engelske Oxford Dictionary definerer det som værende 'kompetent i matematikkens grundlæggende principper, især aritmetik'. Derimod definerer den amerikanske Merriam-Webster ordbog det som 'at have evnen til at forstå og arbejde med tal'. I deres fælles historie koloniserede England engang Amerika. Så forskellen i definitionerne er interessant. Førstnævnte anvender det passive udtryk 'væren', hvor sidstnævnte anvender det aktive udtryk 'have'. Førstnævnte forbinder definitionen med matematikkens indre essens, mens sidstnævnte forbinder den direkte med tallenes ydre eksistens. Valget er således: skal eksistens gå forud for essens, som filosofisk eksistentialisme mener, eller skal essensen have lov til at kolonisere eksistensen med et 'nul-enheder regime' for at bruge et udtryk af M. Foucault?

Måske er det på tide at se, om børn forbliver talkyndige, hvis deres egne 2D bundt-tal med enheder ikke koloniseres af 1D linje-tal uden enheder. Måske er det endelig tid til et Kuhn inspireret paradigmeskift også i tal-sprogs undervisningen. Så tænk ting.

Referencer

Foucault, M. (1995). *Discipline & punish.* New York. NY: Vintage Books.

Kuhn T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions.* Chicago: University of Chicago Press.

Sartre, J.P. (2007). *Existentialism is a humanism.* New Haven, CT: Yale University Press.

Tarp, A. (2001). Fact, fiction, fiddle - three types of models, in J. F. Matos & W. Blum & K. Houston & S. P. Carreira (Eds.), Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9: Applications in Science and Technology. *Proceedings of the 9th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (62-71). Chichester UK: Horwood Publishing.

Tarp, A. YouTube video (2012). *Deconstructing pre-calculus mathematics.* https://youtu.be/3C39Pzos9DQ.

Tarp, A. YouTube video (2013). *Deconstructing calculus.* https://youtu.be/yNrLk2nYfaY.

Tarp, A. YouTube video (2013). *Deconstructing pre-school mathematics.* https://youtu.be/qgCwVZnALXA.

Tarp, A. (2018). Mastering Many by counting, re-counting and double-counting before adding on-top and next-to. *Journal of Math. Education, 11*(1), 103-117.

Tarp, A. (2019). *A decolonized curriculum*. Mathecademy.net/a-decolonized-curriculum/

Tarp, A. (2020). De-modeling numbers & operations: From inside-inside to outside-inside understanding. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science 17*(3), 453-466.

Tarp, A. YouTube video (2021). *Flexible bundle numbers develop the child's innate mastery of Many*. https://youtu.be/z_FM3Mm5RmE

Tarp, A. YouTube video (2023). *AI and difference research in mathematics education*. https://youtu.be/4EPqjz8evd4

Widdowson, H. G. (1978). *Teaching language as communication.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Matematik-skandalen: Skolens matematisme berøver barnet dets tal-sprog og talsans

Matematik er nok skolens vigtigste fag, men nok også det sværeste. Men hvorfor er det så vigtigt, og behøver det være så svært?

Vi spørger de tre moder-videnskaber, filosofi og sociologi og psykologi: Hvad er det, der foregår, når skolen under-kaster børn og unge under-visning i matematik?

Filosofien vil diskutere, hvad matematikken kan være. Sociologien vil betragte den som en institution med et magt-monopol. Og psykologien vil diskutere forskellige læringsformer.

Det græske ord matematik betyder 'det vi har viden om', som på Platons tid var aritmetik, geometri, musik og astronomi, dvs. Mange for sig selv, og som det optræder i rum, i tid, samt i tid og rum. Tilsammen kaldes de kvadrivium, der i følge Platon skulle være undervisningens indhold sammen med trivium: logik, grammatik og retorik.

I filosofien diskuterer debatten om eksistens og essens, hvad der kommer først, altså om eksistens nedefra skaber en overliggende essens, eller modsat. Dette giver tre måder, hvorpå begreber kan defineres: nedefra gennem eksempler, oppefra som et eksempel, samt ovrefra som en metafor.

Matematikkens kernebegreb er regnestykket, der dog omdøbes til en 'funktion'. Som historisk blev defineret nedefra gennem eksempler og modeksempler: '2+x' er en funktion,'2+3' er ikke, så en funktion er et regnestykke med uspecificerede tal, en formel. En uspecificeret funktion skrives y = f(x), hvor y er de tal, der beregnes af formlen f(x), hvor x er et uspecificeret tal. Da 2 ikke er et uspecificeret tal, er 'y = f(2)' derfor vrøvl, der desværre findes i alle lærebøger.

Som i stedet bruger selv-reference oppefra ved at definere en funktion som et eksempel på 'en delmængde af et mængdeprodukt, hvor førstekomponent-identitet medfører andekomponent-identitet'. Der lyder som 'bublibub er et eksempel på bablibab', altså noget meningsløst, man skal lære udenad for at bestå eksamen.

Som metafor kan funktioner defineres som tal-sprogets sætninger, der ligesom tale-sprogets indeholder et subjekt, et verbum og et prædikat, hvor 'Totalen er tre femmere', forkortes til 'T = 3x5'. Forskellen er, at hvor tale-sprogets sætninger typiske er fortolkninger, er tal-sprogets formler forudsigelser.

Filosofien viser altså, at der findes to slags matematik, eksistens-matematik og essens-matematik.

I sociologien handler struktur-aktør debatten om, hvorvidt mennesker bør være frie aktører som i Nordamerika eller lade sig begrænse af sociale strukturer som i Europa. Sociologien ser derfor på de fælles mål, som vi ikke selv magter at arbejde for, hvorfor vi installerer institutioner og ansætter funktionærer. Der dog hurtigt indser, at deres ansættelse bedst bevares ved at målet netop ikke nås, og derfor fristes til at foretage en 'målforskydning', hvor mål og middel ombyttes.

Sociologien spørger derfor, om der er sket en målforskydning: mestring af matematik skulle gerne være et middel til slutmålet, at mestre Mange. Men er det i stedet blevet slutmålet?

Spørgsmålet om institutioner skal tjene individet eller omvendt skaber to forskellige typer samfund og skoler. Nordamerika har valgt et institutionslet samfund, hvor skolen gør de unge selvhjulpne ved at afdække og udvikle deres personlige talent gennem selvvalgte boglige og praktiske halvårshold. Modsat har Europa valgt institutionstunge samfund, hvor skolen tilpasser de unge til institutionerne som funktionærer (eller klienter) gennem stavnsbånd til årgangens stamklasser.

Som eksistentialist advarer Heidegger mod at institutionalisere prædikater: I en dømmende er-sætning er prædikatet socialt konstrueret essens, der burde oplyse sit eksisterende subjekt og som ellers bør dekonstrueres.

Vi kan tælle og regne, men ikke 'matematikke', som derfor er et dømmende prædikat. En dekonstruktion vil således bruge handle-ord til at spørge, hvad er det for en mestring af Mange, som eleven ikke behersker? Og bruge etnografien til at observere, hvilken mange-mestring børn allerede behersker før skolen.

En 3årig vil fx besvare spørgsmålet "Hvor gammel bliver du næste gang?" ved at sige "fire" og vise fire fingre. Men vil protestere over for fire fingere holdt sammen to og to ved at sige: "Det er ikke fire, det er to toere".

Barnet ser altså, hvad det eksisterer, bundter af 2ere i rummet, og 2 af dem når man tæller dem i tiden. Barnet har således allerede et tal-sprog byggende på bundt-tal med enheder.

Sociologien bør derfor bruge fantasien til at afdække den matematik, der vokser ud af barnets bundttal. Den græske aritmetik er i dag afløst af algebra, der på arabisk betyder at genforene tal. Her fører bundt-tal med enheder fører direkte til fagets kerne, genforening af variable og konstante styk-tal og per-tal, der fx forekommer på en kvittering: 2kg á 3kr/kg + 4kg á 5kr/kg. Her kan styk-tallene plusses direkte, medens per-tallene først skal opganges til arealer før de plusses. Dette viser, at tal kan forenes på fire måder: Plus forener variable styk-tal, gange forener konstante styktal, integration forener variable per-tal, og potens forener konstante per-tal, da man plusser med 5% ved at gange med 105%. Det modsatte af forening er opdeling, som også kan forudsiges af regnearter: minus opdeler i variable styk-tal, division opdeler i konstante styk-tal, differentiation opdeler i variable per-tal, og rod og logaritme opdeler i konstante per-tal.

Psykologien vil tage udgangspunkt i, at menneske-hjernen blev skabt for at holde balancen efter at have rejst os på to ben og frigjort forbenene som gribere til at gribe og dele føden med. Da vi samtidig udstødte lyde for det grebne, udviklede vi et sprog, så vi også kan dele viden, og opnå 'begribelse gennem gribelse'.

Læring sker så, når denne viden tilpasses gennem modstand mod det forventede. Læring ud fra eksistens kaldes radikal konstruktivisme og er beskrevet af Piaget. Læring ud fra essens kaldes social konstruktivisme og er beskrevet af Vygotsky.

Må børnene udvikle deres medfødte eksistens-matematik med tælling før regning, er regneartenes rækkefølge division, gange og minus med plus til sidst, der i øvrigt både kan foregå lodret og vandret, og som fører direkte frem til fagets kerne, proportionalitet og integralregning.

Essens-matematik begynder modsat med plus, hvor det hævdes at 2+3 er 5, til trods for at 2uger + 3dage er 17 dage. Ligeledes hævdes ved brøker, at 1/2 + 2/3 = 7/6, til trods for at 1/2 af 2 æbler og 2/3 af 3 æbler tilsammen giver 3/5 af æblerne, og ikke 7/6, som bogen påstår.

Denne falsificering gør essens-matematik til en utroværdig 'matematisme', der er sand indenfor, men sjældent uden for klasseværelset. Men velegnet til at skabe fiasko, ulyst, angst samt eksklusion til specialundervisning. Og dermed behov for flere timer og ekstra klasser. Altså et typisk eksempel på en målforskydning fra det oprindelige mål, mestring af Mange, til et nyt mål, mestring af matematisme.

Så matematik er vigtig, da den kan lede videre til mestring af Mange, og fordi formler forudsiger. Matematisme gør essens-matematik svær, fordi den tit falsificeres, når den anvendes på eksistens. Modsat bygger eksistens-matematik på barnets medfødte mange-mestring, og er dermed tilgængelig for alle.

Det er derfor en skandale, at skolen har ladet den utroværdige essens-matematik fortrænge barnets egen eksistens-matematik, og derved berøver barnet sit tal-sprog og medfødte talsans.

Fra katolsk til protestantisk matematik, fra bevis til beregning

Underrubrik: PISA-tallene stiger, hvis matematik skifter fra 8 universitets-kompetencer til 2 hverdags-kompetencer

Budskab: Det er universitetets 8-kompetence-matematik, der nu har kørt faget i sænk, som de seneste PISA-tal viser. Så nu må tiden da være kommet til at skifte til hverdagens 2-kompetence-matematik, som alle bruger for at besvare spørgsmålet "Hvor mange?"

Tekst: "Matematikundervisningen skal fornyes" sagde ministeriet i 2002 og nedsatte en universitetsledet arbejdsgruppe i stedet for at udskrive en idekonkurrence. "Åh nej, ikke igen" tænkte jeg som gymnasielærer og ph.d.-studerende. "Det ville man også for 40 år siden, hvor den nye abstrakte mængde-matematik skulle indføres. Og det gik jo helt galt, så hvad sker der mon nu?"

Det samme desværre, for i sin rapport "Kompetencer og matematiklæring" anbefalede gruppen, at matematikken igen skulle gøres mere abstrakt, men denne gang bygge på otte kompetencer. Hvilket jo ikke ville løse fagets grundproblem: Efter at regning var blevet erstattet af matematik, måtte bestå-grænsen ved folkeskolens afgangsprøve sænkes igen og igen, og var nu under 20% korrekt bevarelse, mens den var 70% i USA, hvor man var gået tilbage til regning.

Jeg udarbejdede derfor en modrapport, KOMMOD-rapporten. Den siger, at for at besvare matematikfagets grundspørgsmål "Hvor mange?" behøver vi kun to kompetencer, at tælle og at regne. Og her nytter det ikke at 'matematikke', for matematik er jo ikke er et handleord, men blot et navneord. Samtidig tillod jeg mig at påpege ligheden mellem kompetencer og sakramenter, hvor katolikker har syv og protestanter to.

Jeg havde håbet på en frugtbar dialog mellem de to rapporter, men ingen ville trykke KOMMOD-rapporten. Jeg måtte derfor arbejde videre med den i udlandet, hvor 2-kompetence-matematik blev positivt modtaget i en kinesisk-amerikansk arbejdsgruppe og publiceret i et internationalt tidsskrift.

Det er altså universitetets 8-kompetence-matematik, der nu har kørt faget i sænk, som de seneste PISA-tal viser. Så nu må tiden da være kommet til at skifte til hverdagens 2-kompetence-matematik, der foreligger fuldt gennemarbejdet med materiale til alle tolv skoleklasser og til læreruddannelsen.

"Matematik er bare svær og abstrakt, og så er det jo naturligt, at mange har problemer med at lære den. Derfor skal vi have tilført endnu flere midler til forskning og udvikling, og til at uddanne flere vejledere". Sådan lyder det igen og igen fra forskerne, som sidder i celler på lange gange og skriver kommentarer til andre forskeres kommentarer. Og som dermed er et selvrefererende system, som den tyske sociolog Luhmann så fint har beskrevet.

Og det er da muligt, at universitets bevis-matematik er svær. Men hvor kun få skal læse matematik, skal alle kunne besvare spørgsmålet "Hvor mange?" ved at tælle og regne i rum og tid. Kort sagt, alle bør lære hverdagens 2-kompertence beregnings-matematik, som til gengæld er ufattelig let.

For der findes kun fire slags tal i verden: styk-tal og per-tal, der kan være ens eller uens, og som skal samles i totaler, eller som totaler skal opdeles i.

2 kroner og 3 kroner er uens styk-tal, og her forudsiger beregningen '2 plus 3 er 5' resultatet af at samle dem.

2 kroner 3 gange er ens styk-tal, og her forudsiger beregningen '2 gange 3 er 6' resultatet af at samle dem.

2% 3 gange er ens per-tal, og her forudsiger beregningen '102% opløftet i 3 er 106,12%', at resultatet af at samle dem bliver 6% plus 0,12% ekstra i 'rentes-rente'.

2kg á 3kr/kg plus 4 kg á 5kr/kg er uens per-tal, der først kan samles, når de er blevet ganget op til styk-tal, hvorved de bliver til arealer. Så per-tal plusses som arealer også kaldet integralregning, hvor gange kommer før plus: 2kg til 2*3kr plus 4kg til 4*5kr giver samlet 6kg til (2*3 + 4*5)kr, altså 6kg á 26/6 kr/kg.

Skal totaler modsat opdeles, forudsiges resultatet af de modsatte regnearter til plus, gange, integralregning og potens. Disse kaldes minus, division, differentialregning samt den faktor-tællende rod og den faktor-søgende logaritme.

Vi behøver altså ikke at tælle os frem for at besvare spørgsmålet "Hvor mange". Resultatet kan forudsiges af en beregning, eller af en tilbageregning, der også kaldes at løse en ligning.

Svaret kunne fx være, at totalen er 2 3ere, der kan forkortes til "T = 2*3", altså til en almindelig sætning i tal-sproget med et udsagn om et grundled. Næh, siger universitet, dette er en funktion, som naturligvis skal defineres præcist, før den bruges: En funktion er et eksempel på en delmængde i et mængeprodukt, hvor førstekomponent-identitet medfører andenkomponent-identitet. Eller mere jordnært, en funktion er et eksempel på en forskrift, der til hvert element i én mængde knytter ét og kun ét element i en anden mængde."

Det er sikkert vigtigt, at man på universitetet skal definere noget abstrakt som et eksempel på noget endnu mere abstrakt, men i skolen hører de unge det som "bublibub er et eksempel på bablibab", og forundres over, at læreren blot gentager lærebogen, når de beder om en forklaring, så de kan forstå det. De fleste vender derfor ryggen til dette volapyk, på nær de der sikrer sig en god karakter ved at lære det udenad uden at forstå det. Så kun få følger med, når læreren derefter underviser i lineære og eksponentielle funktioner. For til sidst at vise, at disse kan anvendes til at beskrive, hvordan en formue kan vokse ved hver måned at få tilført 5 kroner derhjemme eller 5 procent i en bank.

Begynder undervisningen i stedet med disse to konkrete eksempler og kalder dem for plus-vækst og gange-vækst, så er alle pludselig med, og har intet imod også at bruge betegnelserne lineær og eksponentiel vækst.

8-kompetence-matematik underviser altså oppefra og ned ved at fremstille begreber som eksempler på abstraktioner. Og ved at hævde at "matematikken skal først læres, før den kan anvendes, det siger da sig selv." Faget bruger endimensionelle linjetal, og bygger på den antagelse, at 2 plus 1 altid er 3, til trods for at fx 2 dage og 1 uge er 9 dage. Dette forandrer matema-tik til 'matema-tisme', en ideologi som altid er sand inden for, men sjældent uden for skolen.

2-kompetence-matematik bruger derfor i stedet de tal, som børn udvikler ved omgang med Mange før skolen, og som kan ses ved at spørge en 3-årig "Hvor mange år næste gang?" Svaret er 4, med 4 fingre vist. Men holdt sammen 2 og 2, indvender barnet "Det er ikke 4, det er to 2ere." Barnet ser således, hvad der findes i rum og tid, bundter af 2ere i rummet, og 2 af dem i tid, når de tælles. Barnet bruger altså todimensionelle bundttal med enheder, fx T = 2 2ere. Så før totaler kan samles, skal division og gange først optælle dem i bundter og stakke, således at 8 optalt i 2ere kan skrives som 8 = (8/2)*2, eller med uspecificerede tal, T = (T/B)*B, som kaldes proportionalitetsformlen til omtælling mellem enheder. Og som måske er fagets vigtigste formel, der bruges overalt i teknik og naturvidenskab. Men som her optræder allerede i første klasse.

Først når totaler er optalt og måske omtalt til anden enhed, kan de samles, men skal 2 3ere og 4 5ere samles vandret eller lodret? Under alle omstændigheder er det arealer, der samles, hvilket kaldes integralregning, som normalt forbeholdes få i tolvte klasse. Men som her optræder allerede i første klasse.

Så 2-kompetence-matematik underviser nedefra og op ved at fremstille begreber som abstraktioner fra eksempler. Og ved at hævde at matematik læres automatisk ved at besvare spørgsmålet ”Hvor mange?”. Matematik bliver herved et tal-sprog om det naturlige faktum Mange, som også viser sig som ental og flertal i tale-sproget. Helt i overensstemmelse med fagets to hovedområder, geometri og algebra, som på græsk og arabisk betyder henholdsvis jordmåling og genforening.

Så mon ikke matematik bør sænke antal kompetencer fra 8 til 2? Og begynde at tale om Mange i stedet for om sig selv?

Foredrag for skolebørn om min matematikbog på BogForum 2023

Velkommen alle sammen. Vi skal nu tale om det fag, der hedder matematik. Vi skal i fællesskab på en lille rejse, hvor vi kan se matematikken blive genfortryllet.

Nogen kan godt lide matematik, nogen kan ikke lide det, og nogen er lige glade. Hvem kan lide matematik, en lille smule, og en stor smule. Hvem er lige glade? Hvem kan ikke lide matematik en lille smule? og en stor smule? Matematik, det er jo noget med tal og regnearter, som vi kan se på denne lommeregner. Og hvad bruger vi dem til? På hænderne har vi mange fingre. Og for at holde styr på, hvor mange der er, kan vi tælle og regne, når vi møder mange, enten i tid som mange timer eller mange dage, eller i rum som mange fingre, eller mange vinduer. Så matematik fortæller om Mange på en særlig måde, som ikke alle bryder sig om. Hvorfor gør den så det? Det har den berømte tyske sociolog Weber en forklaring på. Hans siger, at matematikken har spærret Mange inde i et jernbur, så Mange ikke kan komme ud. Han siger også, at matematikken har af-fortryllet Mange.

Senere har andre tænkere tænkt videre og forsøgt at få, ikke kun Mange, men hele verden ud af sit jernbur, der består af fastlåste ord og tal. I de sidste 50 år har den såkaldte postmoderne tænkning forsøgt, og i dag er woke tænkning så kommet til. Så vi skal nu møde postmoderne woke matematik, som kan lukke Mange ud af sit jernebur, så Mange kan blive genfortryllet. Men hvor finder vi nøglen?

Et sted, som ingen tænker på at lede. Det er såmænd en 3årig, der giver os den. Altså en person, som endnu ikke oplevet Mange af-fortryllet spærret inde i et jernbur. Vi spørger den 3årige ”Hvor gammel bliver du næste gang?” Svaret kommer straks: ”Fire, med fire fingre i vejret” Efterfulgt af en protest, hvis jeg viser fire fingre holdt sammen to og to. ”Det der, det er ikke fire, det er to toere”.

Og så er det tid til at møde den filosofi, der hedder eksistentialisme. Den blev født her oppe i Nørregade af den daske filosof Kierkegaard. Og derfra bredte den sig til Tyskland og til Frankrig. Den siger, at det, det eksisterer, er vigtigere end det, vi siger om det, som kan være sladder, altså et slags jernbur, vi sætter det eksisterende ind i. Eksistens går altså forud for essens. At sige ”Peter er høj” er en doms-sætning med et dømmende er. Peter er Grundleddet, og høj er dommen, domsordet, også kaldet omsagnsled til grundled, eller prædikat. Så det, eksistentialisterne siger, er altså: I en domssætning, stol på grundleddet, men ikke på domsordet. Så det vil vi nu gøre.

Den 3årige ser verden som den er, før den bliver af-fortryllet af for mange ord og tal. Den 3årige kan se eksistensen, før den bliver indsat i et essens-bur af jern. Den 3årige ser det, der eksisterer i rum, nemlig bundter af 2ere, som optalt i tiden bliver til to. Og når den 3årige siger ”det er 2 2ere”, så er det en sætning med både grundled, det, og udsagnsled, er, og domsord 2 2ere. Så i tale-sproget og tal-sproget er sætningerne altså ens. ”Totalen er 2 toere, som forkortes til T = 2 gange 2. Noget som matematikken senere kalder en funktion. Barnet bruger altså bundt-tal med enheder, hvor fx 3 par og 1 er 7, og 3 3re og 1 er 10. Så 3 og 1 kan altså omtrylles til meget forskelligt.

Men skolen bruger kun linjetal uden enheder, hvor 1 + 3 er 4 altid og det er denne af-fortyllede matematik, som jeg kalder matematisme. Matematisme er altid sand inden for skolen, men sjældent uden for, hvor fx 1 uge + 3 dage ikke er 4, men ti dage. Så nu forlader vi skolens af-fortryllede matematisme, og bruger barnets bundttal med enheder som nøgle til at lukke Mange ud af sit jernebur, ud af sit essens-bur, så vi kan møde Mange på de forskellige måder, som Mange kan være, og ikke kun som Mange er tvunget til at være.

Lad os bruge vore fingre. Her har vi da et eksempel på Mange. Øv, det er for let, der er jo fem på hver hånd og ti i alt! Ja, inde i jernburet, med udenfor vil vi nu se, at fingrene også kan være meget andet. Så lad os sammen tage på en gen-fortryllende rejse, hvor vi møder Mange, totalen, på flere forskellige måder.

TÆLLE I RUM

Lad os begynde med standard-fortællingen om vore fingre ”Vi har ti fingre.” Lad os nu spørge ”Ja, men hvor mange 5ere, 4ere, 3ere og 2ere har vi?”

Vi tæller og bundter først i 5ere. Totalen er her 0 bundt ti, her 1 bundt 5 altså 1-5 eller 15 femmere, her 2 bundt nul, altså 2-0 5ere, altså 20 5ere.

Vi tæller og bundter nu i 4ere. Totalen er 0 bundt ti, her 1 bundt 6 altså 1-6 eller 16 4ere, som dog er et overlæs, her 2 bundt 2, altså 2-2 4ere eller 22 4ere. Her er der næsten 3B på nær 2, altså 3B-2 4ere, som dog er et underlæs med et nagativt mangel-tal. Vi siger altså her goddag til både overlæs og underlæs og negative tal

Vi tæller og bundter nu i 3ere. Totalen er 0 bundt ti, her 1 bundt 7 altså 1-7 eller 17 3ere, her 2 bundt 4, altså 2-4 3ere eller 24 3ere. Her er 3B og 1, altså 3B1 3ere. Her er næsten 4 bundter på nær 2, altså T = 4B-2 3ere. Men stop. Vi har jo 3 bundeter, altså et bundt bundter og en, så vi har 1BB 0 B 1 3ere, eller 101 3ere.

Vi tæller og bundter nu i 2ere. Første tæller vi en hånd i 2ere. Vi har 0B5, 1B3, 2B1, 3B-1. Men stop, 2 B er jo 1 bundt-bundter, så vi har fem som 1 BB 0B og 1, altså som 101 2ere. Med to hænder har vi to gange så mange, latså en ekstra bundtning: ti er her 1BBB 0BB 1B 0, eller 1010 2ere. Sådan tæller en elektronhjerne, en computer, for her er 0 sluk og 1 er tænd.

Vi mennesker tæller og bundter i tiere, undtagen os danskere, vi tæller i snese, tyvere, tvende tiere sagde vikingerne, og englænderne siger stadig twen-ti. Når vi tæller i tiere, har vi så også bundt-bundter, altså bundt i anden? Og har vi også bundt-bundt-bundter altså bundt i 3? Det har vi da, her en 100 det samme som 1 Bundt-Bundt og 0 Bundter og 0 1ere. Og 1000 er 1 Bundt i tredje, og ikke mere. Så Bundt i anden er 100, og Bundt i første er 10, og Bundt i 0te er 1. Så når vi skriver T = 567 mener vi 5 hundredede 6 ti og 7, der kan genfortrylles som 5BB+ 6B +7, eller 5Bundt i anden + 6B +7, noget man i 10. klasse af-fortryller og kalder et polynomium af anden grad.

TÆLLE I TID

Lad os nu prøve at tælle fingrene i tid, en efter en. Normalt sige vi 0, 1, 2, …, ti. Men nu vi skal huske enhederne, bundterne. Lad os tælle fingeren i 5ere: 0Bundt1, 0B2, 0B3, 0B4, 0B5 eller 1 Bundt 0, Vi fortsætter, 1B1, 1B2, 1B3, 1B4, 1B5 eller 2B0, altså 2-0 5ere, tyve femmere. Så i 4ere, så i 3ere, og til sidst i 2ere

CIFRE SOM IKONER

Lad os nu se på cifrene. Og se, om de kan genfortrylles som billeder, ikoner. Her har vi 1, så 2, så 3, så 4, …, så 9. Det ser ud som om, cifre er ikoner med de antal streger, som de beskriver, hvis vi skriver dem mindre sjusket.

REGNINGARTER SOM IKONER

Vi optæller 8 i 2ere ved at skubbe 2ere væk med en hånd, som vi viser som en skråstreg, kaldet division. Så 8 / 2 betyder altså fra ”8 skub væk 2ere”, eller 8 optalt i 2ere”. Og en lommeregner forudsiger, at det kan vi gøre 4 gange, da 8 divideret med 2 er 4. Vi kan også gøre det modsatte, vi kan 4 gange samle 2ere og stakke dem oven på hinanden med en lift. Så 4 x 2 betyder altså ”4 gange løft 2ere”. Og en lommeregner forudsiger, at det giver en total på 8, da 4 gange 2 er 8. Vi må hellere se, om der er nogen tilbage, der ikke blev bundtet, så vi trækker lige stakken væk med et reb, som vi kalder minus. Så hvor division er væk-skubning, er minus væk-trækning.

Skal vi optælle 9 i 2ere, siger vi ”Fra 9 skub væk 4 2ere”, og så er der 1 tilbage. Og igen forudsiger lommeregneren resultatet, 9 – 4 x 2 = 1. Ubundtede lægger vi oven på stakken. Så nu har vi 9 som 4B1 2ere, eller 4,1 2ere, så her er 1 blevet til et decimaltal. Men vi kunne jo også optælle 1 i 2ere, altså som ½, og så bliver 1 til en brøk. Men vi har jo næsten 5 bundter, så vi kan også se 9 som 5B på nær 1, eller 5B minus 1 toere. Så ubundtede møder vi på tre forskellige måder, som decimaltal, som brøker eller som negative tal.

OMTÆLLING MELLEM CIFFER-BUNDTER

Når vi bruger enheder, skal vi også kunne skifte enhed ved omtælling. Jeg har 3 4ere, hvor mange 5ere er det? Hvad forudsiger lommeregneren? Ja, den siger 3 gange har jeg 4, og det tæller jeg så op i 5ere, og får 2 gange og noget mere. For at se, hvad det er, spørger jeg lommeregneren ”Fra 3x4 træk væk 2x5” og den forudsiger 2. Så 3 4ere er det samme som 2Bundt 2 5ere. Det kan jeg også se på en kugleramme.

OMTÆLLING FRA CIFFER-BUNDTER TIL TI-BUNDTER

Jeg har 3 4ere, hvor mange tiere har jeg? Jeg kan se på kuglerammen, at 3 4ere er 1Bundt 2 tiere.

Jeg kan også spørge lommeregneren, ”Fra 3x4 skub tiere væk”. Men hov, den har ingen ti-knap. Nå det behøver jeg heller ikke, for den siger med det samme 12 altså 1B2 tiere. Underligt, den undlader eneheden og flytter kommaet en plads. Så vi skal lige vende sig til, at lommeregnere er dovne. Men fint nok, for så er det nemt at omtælle fra ciffer-bundter til ti-bundter

Det er klart, at når jeg har 3 4ere, der skal omtælles til tiere, så skal jeg strække bundtet fra 4 til ti, og så har jeg ikke så mange, så højden på stakken aftager.

Omvendt, hvis jeg har 3 20erer, det skal presses sammen til tiere, så vil stakkens højde vokse. Hvor mange tiere kan 3 20ere sammenpresses til? 3x20/10, altså 6 tiere, altså dobbelt højde. Og hvad nu hvis jeg havde 13 24ere, hvor mange tiere kan de presse sammen til? 13 x 24/10 = 31,2 tiere, altså 31B2 tiere.

TABEL-BRÆT

Nu vil vi gerne omregne 6 7ere i tiere. Kan vi 7-tabellen, ved vi, at svaret er 42, altså 4B2 tiere. Kan vi ikke 7-tabellen, kan finde svaret på et 10x10 tabel-bræt, hvor vi omtæller 6 og 7 med underlæs, så 6 er 1B på nær 4, og 7 er 1B pånær3. Vi ser så, at for at få de 6 7ere, skal vi begynde med 10 bundter og så trække væk de 3 lodrette bundter og bagefter de 4 vandrette bundter, så vi er nede på 3 bundter. Men så skal vi lægge hjørnet til, da det er trukket fra to gange, så 6 7ere er 3B + 1B2 altså 4B2 eller 42. Her så vi, at minus gange minus naturligvis giver plus.

OMTÆLLING FRA TI-BUNDTER TIL CIFFER-BUNDTER

Jeg har 28, men hvor mange 7ere er det? Svaret fås ved at optælle 28 i 7ere som 28/7 = 4, så 28 eller 2B8 tiere er det samme som 4B0 7ere. Men jeg kan også bruge bogstavet u som pladsholder for det ukendte tal, altså u for ukendt.

Så i stedet for at sige ”Hvor mange 7ere er der i 28?”, kan jeg sige ”u gange 7 er 28”, og det kaldes så en ligning, fordi u gang 7 og 28 skal være lig med hinanden. Svaret finder jeg så ved at flytte det kendte tal 7 over på den anden side af lighedstegnet med det modsatte regnetegn, altså så 7 skifter regnetegn fra gange til det modsatte, division.

Og sådan løses alle ligninger, vi flytter de kendte tal over på modsat side med modsat regnetegn.

OMTÆLLINGSLIGNINGEN

Lad os lige igen optælle 8 i 2ere ved fra 8 at skubbe 2ere væk. Det kan vi gøre 4 gange, da 8/2 = 4. Så vi kan skrive 8 = 4 x 2, men de 4 er 8/2, kan vi også skrive 8 = 8/2 *2, eller med bogstaver i stedet for tal som pladsholdere for ukendte tal, T = (T/B) x B, som siger, at en total T indeholder Bere i alt T/B gange. Denne omtællings-fortælling vil vi kalde en omtællings-formel, og det er nok den vigtigste formel eller fortælling i matematikken. Som dog giver omtællings-formlen andre navne, først proportionalitet, så linearitet, så homomorfi.

Vi bruger den hver gang vi skifter enheder. Når vi køber æbler, kan de både tælles op i kilo og i kroner, og prisen angives som et per-tal, fx 5kr per 4kg. Jamen hvad koster så 12 kg? Vi ved noget om 4 kg, så vi om tæller bare 12 i per-tallet som 12/4 4ere, der så er det samme som 12/4 gange 5kr, altså 15 kr

Og hvor meget kan jeg købe for 20 kr? ja jeg ved noget 5 kr, så igen omtæller jeg bare i per-tallet. 20 er 20/5 5ere, altså 20/5 gange 4kg, altså 16 kg. Vi kan også tælle om mellem forskellige møntenhed fx fra kroner til euro, hvor per-tallet er tæt på 15 kroner per 2 euro.

På en flise vil diagonalen danne en vinkel med bunden. For at finde vinklen, kan vi måske måle den med en vinkelmåler, men det er nemmere at omtælle højden i bunden, højde = højde divideret med bund gange bund, og dette per-tal, højde divideret med bund, kaldes tangens-tallet, som en lommeregner kan forudsige.

OPSAMLING AF STYKTAL

Når vi møder Mange, stiller vi to spørgsmål: ”Hvor mange her?” Og ”Hvor mange i alt?” Vi svarer på spørgsmålet ”Hvor mange her?” ved at optælle i en enhed og eventuelt at omtælle til en anden enhed, og ved at bruge en lommeregner til at forudsige svaret. Og for at tælle op og tælle om bruger vi først division, så gange og så minus. Vi bruger altså ikke plus før vi har optalt eller omtalt totalerne. Først da kan vi svare på spørgsmålet ”Hvor mange i alt?” Så vi skal nu se, hvordan vi forener totaler.

Her har vi 3 2ere og 1 4er, hvor mange er det i alt? Men hvordan skal totalerne forenes, lodret oven på hinanden, eller vandret ved siden af hinanden? Lodret kan de kun samles, hvis enhederne er ens, så enten skal 2erne omtælles til 4ere, eller modsat, eller begge skal omtælle til en fæles enhed fx tiere, og derefter omtælles til den ønskede enhed. Men vi kan også samle dem vandret ved siden af hinanden som 6ere, og så er det jo to arealer, vi samler eller integrerer, så det kaldes integral-regning, hvor vi ganger før vi plusser.

Det modsatte kaldes så differential-regning, hvor vi minusser før vi dividerer. Vi kan fx spørge ”3 2ere plus hvor mange 4ere giver i alt 4 6ere?” Vi ser, at vi først trækker de 3 2ere væk, før vi optæller resten i 4ere ved division.

OPSAMLING AF PER-TAL

Vi skal nu prøve at opsamle per-tal, som vi fx gør, hvis vi blander to slags the.

Vi spørger ”2kg á 3 kr/kg + 4 kg á 5 kr/kg giver hvad?”

Ja, styktallene 2kg og 4kg kan vi plusse direkte til 6kg. Men det kan vi ikke med per-tallene, for 3 kr/kg plus 5 kr/kg er ikke 8 kr/kg, men noget imellem de to. Hvad gør vi? Åh, vi kan jo opgange per-tallene til styktal, 3kr/kg gange 2 kg er 6 kr, og 5kr/kg gange 4 giver 20kr, i alt 26 kr. Så 3 kr/kg plus 5 kr/kg giver 26 kr per 6kg. Men i samme øjeblik vi ganger, laver vi jo arealer, så per-tal plusses åbenbart som arealer, altså som integralregning.

Men hvad nu hvis per-tallene var ens? Hvad er fx 10% + 10% 5 gange i banken? Ja, når vi vokser med 10% bliver vi 110% gange så stor, og det bliver vi så fem gange. Og når vi ganger 110% med sig selv fem gange, kan lommeregneren forudsiger svaret med sin potensknap, som vi jo mødte første gange ved BUNDT-BUNDT-BUNDT, som er BUNDT i tredje. Svaret giver 161%. Så 10% 5 gange giver altså 50% i rente plus 11% i ekstra rentes rente.

KONKLUSION

Så vi har nu genfortryllet matematikken, og set, hvor let matematik er, hvis den genfortrylles. Så her slutter så vores tur gennem en genfortryllet postmoderne woke-matematik.

I kan læse om det i min bog, som vises på standen MidSummer.dk. Og dette foredrag bliver lagt ind som en video med figurer på YouTube sidst i denne måned.

Til sidst et kort sammendrag:

MANGE-MATIK BRUGER BUNDT-TAL MED ENHEDER

Der findes to slags tal i verden, styk-tal og per-tal, som kan være uens eller ens, og som skal opsamles eller opdeles.

● 3 kroner og 2 kroner er uens styktal, og her forudsiger regnestykket 3+2 = 5 resultatet af at samle dem.

● 3 gange 2 kroner er ens styktal, og her forudsiger regnestykket 3x2 = 6 resultatet af at samle dem.

● 3 gange 2% er ens per-tal og her gir regnestykket

102%^3 = 106,12% resultatet af at samle dem til 6% og 0,12% ekstra i ’rentes-rente’.

● Uens per-tal findes fx i blandinger som 2kg a 3kr/kg og 4 kg a 5kr/kg. Her kan styktallene 2 og 4 samles direkte, medens per-tallene 3 og 5 først skal opganges til styktal, før de kan samles som arealer, også kaldet at integrere, hvor gange er før plus: 2 kg til 2x3 kr + 4 kg til 4x5 kr = 6 kg til 26 kr, altså 6 kg a 26/6 kr/kg.

Regnearter **forener**/ *opdeler Totaler i*	Uens	Ens
Styk-tal m, s, kg, kr	***T = a + n*** *T – n = a*	***T = a * n*** *T/n = a*
Per-tal m/s, kr/100kr = %	***T = ∫ f dx*** *dT/dx = f*	***T = a^b*** *b√T = a loga(T) = b*

Coronatiden, krise eller skandale, hvad med en høring?

Hvordan undgår vi at den næste corona-krise? Eller var det en skandale, der kunne være undgået hvis ikke nærmest systematisk at have misbrugt tal og beregninger? Hvilke partier indkalder til en høring?

Den 19. februar 2020 rejste 40.000 passive tilskuere fra Bergamo til Milano for at se fodbold. Det skulle de ikke have gjort. For her mødte de lige så mange aktive skiløbere, der var smittet, men upåvirket af afterski-stedernes langvarige tæthed. Som på stadion skabte et smittetryk så stort, at Bergamos hospitaler og kirkegårde blev overfyldt med syge og døde.

Europas smitteagenturer kunne da have formuleret en Bergamo-hypotese: De aktive kan upåvirket brænde smitten af, mens de medicinerede undgår langvarig tæthed. Og brugt hypotesen til at fraråde tilskuere ved fodboldkampe, indtil smitten er brændt af, som den bliver hvert år. Og samtidig repetere de to enkle gange-formler for smittens tryk og dens gradvise logistiske forsvinden.

Men svigt på svigt udviklede i stedet coronaen til en skandale, som hurtigt blev omdøbt til en krise for at begrunde den voldsomme nedlukning af Europa. Der blev så kostbar, at vi ikke har råd til flere, og derfor nu skal forhindre, at det sker igen. Vi kan ikke undgå en ny virus, men vi kan undgå en ny skandale.

Vi må derfor spørge: Hvad skete der i Milano? Hvem fejledede, så skandalen begyndte at rulle?

Vi begynder med de to gange-formler, der beskriver smittens opståen og forsvinden. Og som er så enkle, at de burde være pensum i folkeskolen og på gymnasierne.

Jones' gange-formel siger, at smittetrykket vokser med samværets varighed og tæthed. Den anslår, at der smittes efter et kvarter i en meters afstand. Står man tættere, vil en fjerdedel afstand 4-doble smittetrykket fra 2,5 til 10. Og 8 timers samvær vil 32-doble det til 80, der sammen med 25 cm afstand så vil 128-doble smittetrykket til 320 ny-smittede per smittet.

Men hvor afstanden kun kan halveres få gange, kan varigheden fordobles mange gange. Derfor smitter tiden meget mere end tætheden, som det blev observeret ved en tandlægefest i august, hvor 1 person smittede 45, selv om alle påbud om afstand og afspritning var overholdt. Og ved julesmitten i december 2020, fx i Havdrup Kirke.

Fra januar 2020 var der derfor på afterski-stederne et massivt dagligt smittetryk, som dog ikke påvirkede de aktive skiløbere. Der så var smittebærere ved fodboldkamp i Milano, hvor de multi-medicinerede tilskuere derfor bukkede under for det ekstreme smittepres.

Heldigvis spreder smitte sig mindre og mindre, når flere og flere bliver smittet og dermed immune. Dette beskriver smittens anden gangeformel, den logistiske vækst, eller vækst med aftagende vækstprocent. Den eksponentielle vækst har konstant vækstprocent, og ganger derfor op med samme tal, fx 1, 2, 4, 8, 16. I logistisk vækst aftager gangetallet fx med 0,5 hver gang: 1, 2, 3, 3, 1½, 0.

Den logistiske spredningsformel kan let vises i klasser, da smitte spredes som et rygte. I begyndelsen lytter alle, men når 60% først har hørt det, gider ingen lytte mere. Så er der opstået flokimmunitet. Tilsvarende med smitte, i begyndelsen er der mange at smitte, men efterhånden bliver der færre og færre.

Den 11. marts var det derfor let at berolige befolkningen. Det daglige indlæggelsestal voksede med 20%. Men denne procent vil falde jævnt, indtil der blev opnået floimmunitet. Og et regneark viste, at det ville tage to måneder, hvor de multi-medicinerede så kunne nedsætte deres eget smittetryk ved at undgå langvarig tæthed, sådan som Bergamo-hypotesen angav.

Så overlades smitten til sig selv, vil den brænde ud, som influenzaen jo gør hvert år. Men regeringen så bort fra de troværdige indlæggelsestal og valgte i stedet en nedlukning baseret på tre smittetal, der især kom fra smittede skiløbere fra Østrig. Smitten fik derfor lov til at overleve og udvikle mutationer i slummens langvarige tæthed, først hos mink, så i England, i Sydafrika og i Brasilien. Det er belønningen for ikke at udvise rettidig omhu med tal og beregninger.

Ny matematik og ny skole nu, ellers uddør vi

At skolens matematikfag er i dyb krise, er vist ingen hemmelighed. Men hvorfor? To regnestykker giver svaret, '1+2=3' og '3x4=12'. De viser, at matematikken er en uheldig sammenblanding af universitetets upålidelige 'plus-matematik' og hverdagens pålidelige 'gange-matematik'.

Plus-stykker uden enheder som '1+2=3' er kun rigtige inden for et lukket system, for de holder sjældent udenfor, hvor fx 1uge + 2dage = 9dage. Gange-stykker er derimod altid rigtige, da de blot angiver et skift af enheder, fx at 3 4ere også kan optælles som 1 bundt og 2 ti'ere.

Med sine endimensionelle plus-tal på en lineal er plus-matematik en selv-refererende videnskab, som burde kaldes 'matematisme', en ideologi, som er svær at lære og ofte uanvendelig, men velegnet til at diagnosticere børn og unge som uvidende. Modsat er gange-matematikken en naturvidenskab, som bruger todimensionelle gange-tal afgrænset af lodrette og vandrette elastikker på et perlebræt. Og som ovenikøbet er let og morsom at lære og at bruge.

Vi kunne derfor forvente, at skolen snart går over til at undervise i hverdagens gange-matematik, da skolen jo skal gøre eleverne selvhjulpne til at mestre den ydre verden. Og dermed stopper med at undervise i universitetets plus-matematik, som har bragt faget i knæ, og som har sænket bestå-grænsen ved afgangsprøven til blot 15% korrekt besvarelse, hvor den i USA er 70%.

Men i dag underviser skolen desværre stadigvæk i universitetets plus-matematik, hvor eleverne regner på tal uden enheder, begyndende med upålidelige plus-opgaver efterfulgt af minus, gange og division. Senere efter syvende klasse kommer så potensregning samt rod og logaritme. Og i gymnasiet kommer så de sidste to regnearter, differential- og integralregning.

Men mon der ikke snart skiftes til hverdagens gange-matematik, som muliggør, at børn kan beholde og udvikle deres medfødte tal-sprog, som plus-matematikken ellers hurtigt får kvalt.

Spørges en 3årig ”Hvor mange år bliver du næste gang?” er svaret fire med fire finger vist. Men holdt sammen to og to protesterer barnet og siger ”Det er ikke fire, der er to 2ere”. Barnet ser altså, hvad der findes i rum og tid, 2ere i rum, og to når de optælles i tid. Vi andre kan kun se fire, uanset hvordan fingrene holdes sammen. Hvorved vi påtvinger de forskellige muligheder samme identitet eller essens. Barnet kan modsat skelne mellem eksistens og essens, hvad der netop er kernepunktet for den filosofiske retning, der heder eksistentialisme. Så her skilles de to matematik-veje.

Hvor barnet beskriver eksisterende totaler med tal og enheder, formidler skolen den institutionaliserede essens med tal uden enheder. Og begynder straks at undervise i, at 2+1 er 3, hvad barnet straks afviser ved at pege på sin hånd, hvor de 2 2ere og 1 tommeltot giver 5. Og samles de 2 2ere til 1 4er, så giver 1+1 også 5 og ikke 2, som skolen hævder.

Plus-matematikkens talremse skal læres udenad. Den udelader enheder og forklarer sjældent, at tallet ti ikke har sit eget ciffer, men skrives med to cifre, da vi nu er nået til ét bundt og nul ubundtede: ti = 1B0, eller blot 10 med skjult enhed. Uden enheder kan børn have svært ved at skelne mellem 47 og 74. Ligeledes skal gangetabellerne læres udenad, hvad ikke alle magter.

Gange-matematikken medtager altid enheden ’bundt’ i sine talremser, da vi jo optæller totaler ved at bundte dem, både enkeltvis, men også deres bundter. Normalt bruger vi ti som bundt, og så bliver et hundrede til et bundt-bundter, et BB eller B i anden potens, så potenser er den første regneart, der mødes, i stedet for den sidste. Enheder erstatter altså det abstrakte positions-system med konkrete bundter og bundter af bundter på et perlebræt, og hvor bundt-bundter bliver kvadrater.

Optæller vi fingrene i 3ere, bliver talremsen derfor: 0 Bundt 1, 0B2, 0B3 eller 1B0, 1B1, osv. Her bliver 9 til 2B3, eller 3B0, eller 1BB0B0, da 3 bundter jo er et bundt af bundter,

Og tælles fingrene op 2ere, bliver ti til 1BBB0BB1B0, eller 1010 uden enheder.

Børn morer sig også med at bundt-tælle med under-læs og over-læs. Her kan fem optælles både som 1B3, og 2B1, og 3B-1 2ere, hvorved minus bliver den anden regneart, de møder. Under- og over-læs kan også bruges når vi bundt-tæller i tiere: 47 = 4B7 = 3B17 = 5B-3. Herved undgår vi at bruge mente-regning: 4 gange 16 = 4 gange 1B6 = 4B24 = 6B4 = 64.

Børn smiler, når de ser, at cifrene ligner ikoner med det antal streger, som de står for: fem streger i 5-tallet osv.

Og børn morer sig over, at en lommeregner kan forudsige et optællingsresultat. 8 optælles i 2ere ved at feje 2ere væk, hvilket kan vises med en kost, så 8/2 betyder ”fra 8 skub-væk 2ere”. Som indtastet på en lommeregner giver de 4 gange, det kan gøres. Bagefter kan bundterne stakkes hvilket kan vises som et lift, så 4x2 betyder ”4 gange løft 2ere”, eller blot ’4 2ere’.

I stedet for at skrive ’8 = 4x2’ kan børn så skrive 8 = (8/2)x2 eller T = (T/B)xB med T og B for Total og Bundt. Denne ’proportionalitets-formel’ bruges til at skifte enheder og kan derfor også kaldes for en ’omtællings-formel’. Den er nok den vigtigste formel i matematikken og bruges overalt i teknik og naturvidenskab. Og samtidig viser den, at tal-sprogets sætninger har samme form som tale-sprogets: Et ydre subjekt der eksisterer, et verbum og et indre prædikat eller domsord, der kunne være anderledes. Og denne centrale formel optræder altså med det samme, når børn får lov til at gøre det, de selv gerne vil, at optælle i forskellige enheder.

Hvis 9 optælles i 2ere, bliver der 1 til overs, hvilket ses ved at trække stakken væk med et reb, der kaldes minus, så ’9 – 8’ betyder ”fra 9 træk-væk 8”. Anbragt på toppen af stakken kan ubundtede beskrives som decimaltal, 9 = 4B1 2ere. Eller som brøktal hvis også de optælles i bundter, 1 = (1/2)x2, så 9 = 9 ½ B 2ere. Eller ved at vise, hvor meget der er trukket væk, 9 = 5B-1 2ere. Igen peger matematikken direkte på konkrete ydre ting og handlinger, der eksisterer.

Normalt bruges tallet ti som enhed, så derfor er det sjovt at omtælle fra tiere til ikoner og modsat. Spørger vi fx ”2B4 tiere er hvor mange 6ere”, kan dette skrives som en ligning, 24 = ux6 ved at bruge bogstaver for ukendte tal. Men 24 kan jo omtælles i 6ere som 24 = (24/6)x6, derfor er u = 24/6. Ligninger løses altså ved at flytte til modsat side med modsat regnetegn. Denne metode afvises desværre af plus-matematikken, der i stedet insisterer på at bruge en helt anden metode ”gør det samme på begge sider”, for at kunne indføre ekstra abstrakt matematik i læreruddannelsen. Hvilket ellers er unødvendigt, da den formelle definition siger: 24/6 er det tal u, der ganget med 6 giver 24, eller 24/6 = u hvis ux6 = 24. Hvilket netop viser, at vi blot skal flytte til modsat side med modsat tegn.

Skal vi modsat omtælle fra ikoner til 10ere, kunne et spørgsmål lyde: ”7 8ere er hvor mange 10ere?”. Her morer børn sig med at afgrænse de 7 8ere på er perlebræt med to elastikker, og se at 7x8 også kan skrives som (B-3) x (B-2). Derfor kan de 7 8ere findes som det, der bliver tilbage, når de fjerner stakken ovenover og ved siden af, og husker at lægge hjørnet til, da det jo er fjernet to gange: 7x8 = (B-3) x (B-2) = 10B – 3B – 2B + 3x2 = 5B6 = 56. Samtidig ser de, at minus gange minus naturligvis er plus.

Børn nyder at se, at bundt-bundter er kvadrater, og at det er så let at tælle sig til det næste kvadrat ved at tilføje et ekstra bundt lodret og vandret samt det øverste højre hjørne. Resultater kan igen forudsiges på en lommeregner, her med formler som fx ’K6 = 5^2+5x2+1’.

Det er derfor også sjovt at omtælle til BundtBundt-tal, dvs. at lave firkanter om til kvadrater, hvis side så kaldes kvadratroden af firkant-tallet. I en 6x4 firkant skal man bare dele overskuddet 6-4 i to og anbringe dem ved siden af og oven på 4x4 kvadratet til et 5x5 kvadrat, så har man svaret, næsten. For der skal lige afgives lidt til det øverste højre hjørne. I første omgang kan man jo optælle hjørnet i 5ere og dele det i to, hvor 1/5 delt i 2 giver 0,1. Det fjernes så fra oven og fra siden, så vi har et 4,9x4,9 kvadrat. Vi ser altså, at kvadratroden af 6x4 er cirka 4,9. En lommeregner forudsiger resultatet til 4,899.

Nu bliver det sjovt at løse andengradsligninger på et perlebræt. For her ses, at et (u+3) kvadrat indeholde to kvadrater u^2 og 3^2 samt to firkanter 3xu, i alt altså u^2 + 6u + 9. Så hvis u^2 + 6u + 8 er nul, så er (u+3) kvadratet det samme som et 1 kvadrat, og så vil u = -1 være en løsning. Børn kan så lave ligninger til hinanden. Fås fx ligningen u^2 + 8u + 12 = 0 tegnes straks et (u+4) kvadrat for at finde en løsning.

Nu er tiden så kommet til at lege købmand ved at omtælle mellem kroner og kilogram, hvor prisen er et såkaldt ’per-tal’, fx 3kr pr. 4 kg, eller 3kr/4kg. Så her skal vi bare omtælle den aktuelle tal i den ene del af per-tallet og derefter indsætte den anden del: 12kr = (12/3)x3kr = (12/3)x4kg = 16kg.

Hvis enhederne er ens, fås brøker: Hvis min andel af en gevinst er 3kr pr. 5gevinst-kr, så får jeg pertallet 3kr/5gkr eller brøkdelen 3/5. Ved en gevinst på 80gkr fås min andel ved omtælling i per-tallet: 80gkr = (80/5)x5gkr = (80/5)x3kr = 48kr.

Så er det tid til at se nærmere på geometrien i de firkantede stakke, hvor højden er H og bredden er B. Her kan diagonalens stejlhed s angives som per-tallet ’højde pr. bredde’, s = H/B. Diagonalens vinkel kan så findes med lommeregnerens tangens-knap, der derfor kan bruges som vinkelmåler: tangens (vinkel) = H/B. Hvis bredden er 1 og højden et lille tal, 180/n, så er den næsten sammenfaldende med cirkelbuen. En halvcirkels omkreds er da ’n x tan(180/n)’ for n stor, altså ca. 3,1416, kaldet pi.

Børnene ser hurtigt, at højdens og breddens kvadrater tilsammen giver diagonalens kvadrat.

Først efter at optælling og omtælling har bragt de ydre totaler indenfor som bundttal med enheder, kan disse endelig plusses. Men skal 2 3ere og 4 5ere plusses lodret eller vandret? Ved lodret plusning skal enhederne først gøres ens med omtællings-formlen. Ved vandret plusning som 8ere plusses to arealer, hvor gange kommer før plus. Dette kaldes integralregning, der så bliver til differentialregning ved tilbageregning, fx ved spørgsmålet ”2 3ere + hvor mange 4ere giver 5 8ere. Her fjernes først de 2 3ere, hvorefter resten optælles i 4ere. Så her kommer minus før division som forventet af den modsatte regneart.

Etcifrede tal kan plusse med overlæs eller under læs: 6+9 = 2B3 6ere = 2B-3 9ere.

Så mangler vi kun at plusse per-tal, fx 2kg a 3kr/kg + 4kg a 5kr/kg = 6kg af hvor mange kr/kg?

Vi ser at styk-tallene 2 og 4 kan plusse direkte, da de har samme enhed. Men for at kunne plusses, skal per-tallene 3 og 5 først opganges til styk-tal, hvilket giver arealer. Per-tal plusses altså med integralregning, der igen bliver til differentialregning ved tilbageregning. Det gælder også brøker, hvor 1 rødt af 2 æbler plus 2 røde af 3 æbler giver (1+2) røde af (2+3) æbler, og naturligvis ikke 7 røde af 6 æbler, som plus-matematikken ellers påstår.

Ens procenter kan også læges sammen: Hvis jeg 8 måneder i træk lægger 5% til min formue, hvad har jeg så lagt til i alt? Lægges 5% til 100% fås 105%, der kan omtælles til 100% som 105% = (105/100) x 100%, altså 105% x 100%. Vi plusser altså 5% ved at gange med 105%. At gange med 105% otte gange giver 105% opløftet i ottende potens eller 147,7%. Altså giver er 8 måneder á 5% i alt 47,7%, dvs. 40% som simpel rente plus 7,7% som ekstra rente, rentes-rente. Opdeles 100% rente i mange små dele bliver den samlede rente (1+1/n)^n for n stor, altså ca. 2,718, kaldet Euler-tallet e.

Omvendt vil spørgsmålet ”8 måneder á hvor mange % giver 50%” føre til ligningen u^8 = 150%, hvor løsningen forudsiges af en faktor-finder kaldet rod, u = 8√(150%) = 105,2%. En månedlig rente på 5,2% vil altså give 41,6% i simpel rente plus 8,4% i ekstra rente.

Og spørgsmålet ”Hvor mange måneder á 5% giver 63%?” vil føre til ligningen 105%^u = 160%, hvor svaret forudsiges af en faktor-tæller kaldet logaritme, u = log 105%(163%) = 10,0. En månedlig rente på 5% vil altså efter 10 måneder give 50% i simpel rente plus 13% i ekstra rente.

Matematikfagets kerne består af geometri og algebra. På græsk betyder geometri ’jord-måling’, der typisk sker ved opdeling af trekanter, der er fremkommet ved at indlægge diagonaler i firkanter. På arabisk betyder ’algebra’ at genforene tal, og et såkaldt ’algebra skema’ giver et fint overblik over hvordan vi kan forene verdens fire taltyper: Hvor uens styk-tal forenes med plus, forenes ens styk-tal med gange. Og hvor uens per-tal forenes med integration, forenes ens per-tal med potens.

Desuden ses, hvordan totaler modsat kan opdeles med de modsatte regnearter: minus, division, differentialregning samt rod og logaritme. Og igen ses, at ligninger løses ved at flytte til modsat side med modsat regnetegn.

Efter nu at have udviklet sit medfødte tal-sprog, kan barnet nu anvende det til at skabe fortællinger og litteratur ved at tælle og regne på ting og handlinger i verden.

Barnet kan jo begynde med vækst-regning, hvor vækst med en konstant tilvækst kaldes lineær vækst, da punkterne ligger på en ret linje i et koordinatsystem, der koordinerer regning med tegning, algebra med geometri. Vækst med konstant aftagende væksttal kaldes så kvadratisk vækst og giver en parabellinje, der bøjer nedad.

Vækst med en konstant vækst-procent giver en stejlende linje og kaldes eksponentiel vækst, hvor vækst med en aftagende vækstprocent giver en bakketop og kaldes logistisk mætningsvækst.

Vækst med både konstant væksttal og konstant vækstprocent kaldes opsparingsvækst. Her vil forholdet mellem opsparingen og indskuddet svare til forholdet mellem enkelt-renten og den samlede rente.

Ligesom tale-sproget har også tal-sprogets litteratur tre genrer, fakta og fiktion og fup. De tre genrer kan eksemplificeres med tre påstande: ‘DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger København lavt’; ‘HVIS København lå i alperne, SÅ lå København højt’, og ‘HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt.’

Fakta er ‘DaSå’ beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige: DA prisen er 4 kr/kg, SÅ koster 6 kg 6x4 = 24 kr. Fakta-beregninger kontrolberegnes: T = 3 kg á 4 kr/kg = 3x4 kr. = 15 kr, hov regnefejl, T = 12 kr. Et andet eksempel er den regnefejl, som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm + 3 tommer = 5 cm.

Fiktion er ‘HvisSå’ beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige: HVIS indkomsten er 4 kr/dag, SÅ vil 6 dages indkomst være 6x4 = 24 kr. Fiktions-beregninger scenarie-beregnes: Hvis indkomsten er mellem 4 og 5kr/dag, så vil 3 dages indkomst ligge mellem 12 kr og 15 kr.

Fup er ‘HvadSå’ beregninger, som kvantificerer ikke-kvantificerbare kvaliteter: Hvis prisen på en gravplads er 10 kr/dag, og prisen på en hospitalsplads er 10.000 kr/dag, så er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVAD-SÅ, betyder det, at hastighedsgrænsen skal sættes op til 200 km/time for at spare penge? Fup-beregninger afvises og henvises fra en kvantitativ ital-sættelse i tal-sproget til en kvalitativ itale-sættelse i tale-sproget.

Nu er vi nået et godt stykke hen i sjette klasse, og mange ønsker at lære meget mere matematik. Det kan de også nemt, når skolen er blevet opdelt i to dele som i resten af verden, en primærskole indtil syvende klasse til børn, der jo er nysgerrige på deres omverden, og derefter til de unge, der jo er nysgerrige på sig selv ”Hvem er jeg, og hvad kan jeg?” en sekundærskole, der som i USA ønsker at gøre de unge selvhjulpne ved at støtte deres identitetsarbejde med daglige lektier i selvvalgte boglige og praktiske halvårshold sammen med en lærer, som kun underviser i sit hovedfag, og hvor bestå-grænsen er 70% af de points, der modtages for fremmøde, afleveringer og delprøver.

Her kan de mange matematik-begejstrede unge så frit valg mellem forskellige boglige og praktiske matematikhold, hvoraf nogle fører helt frem til eller ligefrem ind på det tertiære college-niveau.

Så naturligvis skal vi også have en helt anden skole. Ikke kun for matematikkens skyld, men også af den enkle grund, at vi ellers vil uddø meget snart.

”Søvngængeren” hedder Christopher Clarks bog om det uhyggelige fravær af fornuft, der førte til, at den ’smukke epokes’ lyse fremtidsudsigter forsvandt i den første verdenskrigs meningsløse selvudryddelse. Tænk, at vi nu skal opleve det igen, selvudryddelsen, denne gang ikke på grund af maskingeværer, men på grund af vores uhæmmede overinstitutionalisering, som har brug for horder af ansatte. Og som derfor har indrettet sit skolingssystem institutions-rettet, så det hurtigt kvæler den uvurderlige gave, naturen har udstyret os med, vore individuelle talenter. Som ellers kunne gøre os selvhjulpne, så vi senere kunne nøjes med få og slanke institutioner i stedet for at klientgøres i et vildtvoksende velfærdssystem. En skole, der groft sagt kun giver os to muligheder, ansat eller klient.

Den nuværende reformregering ville ellers gennemføre de tiltrængte reformer. Men hvornår kommer så den vigtigste reform, der kan stoppe vores nuværende affolkning, hvor et fødselstal på 1,5 barn pr. kvinde giver et årligt fald i befolkningen på 1,5%, så den er halveret om 50 år? Og som resulterer i, at vi ugentligt står med 1000 ubesatte jobopslag, og næste uge endnu 1000, osv. Så vi ikke kan skaffe personale til vores overdimensionerede velfærdssektor, som bare bliver ved med at vokse, selvom også den burde slankes med 1,5% om året. Eller personale til de fabrikker, vi gerne vil hjælpe Afrika med. Eller arbejdskraft til de fabrikker, der kan producere våben til Ukraine.

Når vi forhåbentlig snart vågner af vores søvngængeri, vil vi indse, at den eneste måde hvorpå vi kan bevare det danske sprog er, at vi indretter os som den 51. stat i Nordamerika. Dvs. vi skal bygge vores samfund op på den overbevisning, at vi alle er født med hver vores individuelle talent, som vi kan bruges til at blive selvhjulpne, så vi kun har brug for få og slanke institutioner. Derfor skal skolen naturligvis ikke være institutions-rettet, så den kun kan uddanne arbejdskraft til de offentlige institutioner. Den skal selvfølgelig være individ-rettet, så den kan oplyse børn om deres omverden og unge om sig selv, så de støttes i deres selvudviklingsarbejde med daglige lektier på selvvalgte praktiske og boglige halvårshold. Kun derved kan vi undgå det nuværende stavnsbånd til årgangen, som skaber tvangsklasser, der påtvinger de unge ti veldokumenterede plager:

Støj, så mange må bruge høreværn. Mobning, fordi de unge er tvunget til at være sammen, time efter time, dag efter dag, uge efter uge, måned efter måned i årevis. Fravær på grund af mobning og støj, som igen medfører snyd og bundkarakterer. Druk og stoffer som kompensation for manglende identitetsudvikling. Vikarer og privatskoler, da mange unge og lærere og ledere flygter fra tvangsklasserne. Mistrivsel, især blandt drenge der er to år bagud i modenhed, og som derfor får markant mindre uddannelse end pigerne, der ringeagter dem. Samt en halveringstid på 50 år for Europas befolkning, hvor et par kun afleverer 1½barn, der så afleverer 1 barn i næste generation. Modsat Nordamerika, der holder sit befolkningstal konstant med 2,1 barn per par.

Og som netop støtter sine unge ved at tilbyde dem daglige lektier i selvvalgte boglige eller praktiske halvårshold sammen med en lærer, som kun underviser i sit hovedfag, og som har eget lokale til sine 5-6 daglige halvårshold, som bydes indenfor med et: »Velkommen, alle har et talent, og det næste halvår vil vi sammen forsøge at afdække og udvikle dit personlige talent. Går det godt, siger vi 'godt job', du har talent, gå videre med det. Hvis ikke siger vi 'godt forsøg', du har mod til at prøve kræfter med noget ukendt, så nu finder vi noget andet, du kan prøve kræfter med det næste halvår.”

Med få institutioner og en slankere administration, er der ikke brug for et stort folketing og en storcentraladministration Begge skal som i USA slankes og flyttes væk fra de store byer til en placering midt i landet, hvor børnefamilier har råd til at bosætte sig og få de bedste betingelser for deres tre børn, som kan stopper vores affolkning, et til mor, et til far og et til staten.

Så Køben-mini-havns aktiviteter skal flyttes vestpå til en maxi-havn ved Glatved-pynten midt på det østlige Djursland. Her ligger Nordeuropas bedst beliggende dybvandshavn, hvor maxi-skibe fra Østasien kan omlade deres containere direkte til og fraføderskibe fra Østersøen, og derved undgå den voldsomme miljø- og klimaskadelige lastbiltrafik, der nu foregår mellem maxi-havnen i Rotterdam og Hamborgs forskellige ladepladser mod øst, Århus, Lübeck, Wismar mm.

Samtidig kan der ved Glatved bygges som en moderne formeringsreaktor, der kan udvinde den store mængde restenergi, der er i spaltningsprodukterne fra de normale kraftværker, der allerede findes i stort antal rundt omkring i Europa. Hvor der allerede findes to formeringsreaktorer, der dog begge ligger i Rusland.

Glatved-reaktoren kan forsyne den tyske industri med den grønne energi, som den tørster efter. Og overskudsvarmen kan bruges til fødevareproduktion under kunstigt lys som erstatning for de jorde, der ikke mere kan dyrkes på grund af oversvømmelse eller tilsaltning.

Så valget er ret enkelt: Vil vi uddø, eller vil vi have en ny skole med en ny matematik nu?

Afkoloniser tal-sproget nu

At skolens matematikfag er i dyb krise, er vist ikke ukendt. Men hvorfor? To regnestykker giver svaret, '1+2=3' og '3x4=12'. De viser, at matematikken er en uheldig sammenblanding af universitetets upålidelige 'plus-matematik' og virkelighedens pålidelige 'gange-matematik'.

Plus-stykker uden enheder som '1+2=3' er kun rigtige inden for skolens lukkedesystem, udenfor holder de sjældent, fx er 1uge + 2dage = 9dage. Gange-stykker er derimod altid rigtige, da de blot angiver et skift af enheder, fx at 3 4ere også kan optælles som 1 bundt og 2 ti'ere.

Plus-matematik med sine endimensionelle tal uden enheder burde derfor kaldes 'matematisme', en ideologi, som kun taler om sig selv, og som er svær at lære og ofte uanvendelig. Men som er velegnet til at diagnosticere børn og unge som uvidende.

Gange-matematik med sine todimensionelle tal er derimod en naturvidenskab om et perlebræt med firkanter afgrænset af lodrette og vandrette elastikker. Og er ovenikøbet let og morsom at lære og anvende.

Så vi må forvente, at skolen snart går over til at undervise i virkelighedens gange-matematik, da skolen jo skal gøre eleverne selvhjulpne, så de kan mestre deres omverden. Og dermed stopper med at undervise i universitetets utroværdige plus-matematik, som har bragt faget i knæ, og som har sænket bestå-grænsen ved afgangsprøven til blot 15% korrekt besvarelse, hvor den i USA er 70%.

Og som især bruger brøkregning til at knække elevernes selvtillid. Hvad er 1 over 2 plus 3 over 4? spørger læreren. Det er da 4 over 6, svarer klassen nærmest i kor. Nej, det er 5 over 4! Men 1 rødt æble blandt 2 plus 3 blandt 4 giver da 4 blandt 6, og det kan da aldrig give 5 røde blandt 4 æbler? Men det gør det altså, og det ville I vide, hvis I kunne jeres brøkregning.

Igen insisterer plus-matematikken på, at enheder er unødvendige. Med det resultat, at mange mister deres talsans og deres lyst til faget.

Gange-matematik medtager naturligvis altid enheder, da tal jo fremkommer ved optælling i bundter og bundter af bundter, osv. Så her oversættes 58 til 5Bundt8, eller 5B8. Og 583 oversættes til 5BB8B3. Nu kan alle pludselig regne de stykker, halvdelen ikke magtede før:

7*508 = 7*5BB0B8 = 35BB0B56 = 35BB5B6 = 3556. Og 4509/9 = 45BB0B9 /9 = 5BB0B1 = 501.

Hvor plus-matematikken er påtvunget, er gange-matematikken medfødt. Spørges en 3årig "Hvor mange år bliver du næste gang?" er svaret fire med fire finger vist. Men holdt sammen to og to protesterer barnet og siger "Det er ikke fire, der er to 2ere". Barnet ser altså, hvad der findes i rum og tid, 2ere i rum, og to når de optælles i tid.

Vi andre ser kun fire, uanset hvordan fingrene holdes sammen. Hvorved vi påtvinger de forskellige muligheder samme identitet eller essens. Barnet kan modsat skelne mellem eksistens og essens, hvad der netop er kernepunktet for den filosofiske retning, der hedder eksistentialisme. Så her skilles de to matematik-veje.

Men desværre har universitetets unaturlige essens-matematik fået lov til at kolonisere virkelighedens naturlige eksistens-matematik, som derfor nu skal afkoloniseres ved hjælp fra sociologien, som så småt er begyndt at indse koloniseringens uheldige konsekvenser: Den berøver børn og unge deres naturlige tal-sprog.

Med Habermas kan sociologien se situationen som et eksempel på en systemverden, der har koloniseret livsverdenen. Med Weber kan den se en rationalisering, der er gået for vidt, så eleverne nu er indespærret i et jernbur. Og med Bauman kan den se en målforskydning: mestring af matematik burde være et middel til at bringe de unge til det endelig mål, at mestre Mange, men har i stedet formået at gøre sig selv til mål ved at gøre sig så vanskelig, at manglende mange-mestring nu bliver et middel til at styrke plus-matematikken endnu mere.

Den kommende afkolonisering vil naturligvis fjerne ordet matematik, da vi jo ikke kan 'matematikke'. Og i stedet bruge ord for hvordan vi kan mestre Mange, ved at tælle og regne i rum og tid. Som så automatisk medfører mestring af matematik også.

Lær dit barn at matematikke før skolen gør det

Forhåbentlig stiller de unge sig snart sig op i skolegården uden for lederens vindue, de så skiftes til at råbe "Kan I matematikke?", "Nej, det kan vi ikke". Altså en samlet protest mod, at universitetet og dets mange udsendte vejledere tvinger lederen til at lære eleverne, hvordan man kan 'matematikke'. Hvad de unge naturligvis afviser, for matematik er jo ikke et handleord, men et navneord, og man kan jo heller ikke 'slipse' eller ’frakke’. Men universitetet siger blot: Formålet med matematikundervisning er naturligvis at lære matematik, som jo er det, matematikere laver.

Med det resultat, at danske unge nu kan bestå afgangsprøven ved blot at regne 16%, mens de i USA skal regne 70% rigtigt.

En matematikbog er da også fuld af noget helt andet, nemlig regne-fortællinger: talregning, bogstavregning, brøkregning, procentregning, forholdsregning, potensregning, rentesregning, vækstregning, integralregning, differentialregning, trekantsregning, vektorregning, osv. osv. osv.

Det må derfor undre, at faget ikke kaldes tælling og regning, da man jo ikke kan regne noget, der ikke først er optalt, hvor regning så er en hurtig måde til at forudsige resultatet. Tælle og regne er begge handleord, og ny forskning viser, at man automatisk lærer matematikkens kernstof ved at besvare spørgsmålet ”Hvor mange?” Altså ved at optælle med enheder og eventuelt også omtælle til andre enheder, før man beregner den samlede total, eller hvordan denne kan opdeles i dele.

Og med handleord bliver matematikken bare så let. Dens to søjler hedder algebra og geometri, der begge er handleord. På græsk betyder geometri ’at måle jord’, og på arabisk betyder algebra ’at genforene tal’. Og da der kun findes fire typer tal i verden, vil blot en enkelt sætning kunne formulere matematikkens enkle ærinde: ”At genforene ens eller uens styk-tal eller per-tal”. Hos styk-tal hedder enhederne fx kroner og kilo, og hos per-tal hedder de så kroner pr. kilo, eller kroner pr. kroner, som også kaldes procent.

3 kroner og 2 kroner er uens styk-tal, og her forudsiges det samlede resultatet af plus-regning, 3+2 = 5.

3 gange 2 kroner er ens styk-tal, og her forudsiges det samlede resultatet af gange-regning, 3*2 = 6.

3 gange 2% er ens per-tal, og her forudsiges det samlede resultatet af potens-regning,102%^3 = 106,12%, i alt altså 6% i rente samt 0,12% ekstra i ’rentes-rente’

Uens per-tal findes fx i blandinger som 2kg á 3kr/kg og 4 kg á 5kr/kg. Her kan styk-tallene 2 og 4 samles direkte, mens per-tallene 3 og 5 først skal opganges til styk-tal, som så bliver til arealer. Så per-tal samles som arealer, som også kaldes at integrere, hvor gange kommer før plus:

2 kg til 2*3 kr + 4 kg til 4*5 kr = 6 kg til (2*3+4*5) kr, altså 6 kg til 26/6 kr/kg.

Omvendt kan totaler opdeles på fire måder, som kan forudsiges af de omvendte regnearter: minus, division, rod eller logaritme samt differentialregning.

Man kan altså hurtigt lære et tal-sprog til at genforene uens og ens styk-tal og per-tal. Herefter kan man så begynde at regne på alle de tal, der findes i verden.

Bogstavregning regner på forkortelser: i stedet for at skrive 2 bananer + 3 bananer kan man bare skrive 2b+3b = 5b.

I geometri tæller og regner man på jorden, som man opdeler i trekanter, som med to nabo-trekanter bliver til de rette firkanter, rektangler, der ses overalt: døre, vinduer, borde, reoler, bøger, osv. Og som giver anledning til nye per-tal, der måler højden i bredder, og som kan beregne en cirkels omkreds, da højden er næsten sammenfaldende med cirklen i meget lave rette firkanter.

I vækstregning regner man på, hvad der sker, hvis vækst-tallet eller vækst-procenten er konstant eller ændrer sig konstant eller er svingende. Eller hvis de styres af en vækstformel.

Hvis man ikke kan forud-sige fremtidige tal, kan man ofte bagud-sige dem, så man kan beregne en gennemsnitlig værdi og den gennemsnitlige afvigelse herfra. Disse to tal kan så bruges til at opstille sandsynligheder for fremtidige værdier. Dette bruges i forbindelse med spil og forsikringer.

Man kan også regne på bevægelse i naturen, som jo består af stof med iboende kræfter, der pumper bevægelse ind og ud af stoffet. Der kan her regnes både på synlig bevægelse som planetbaner og boldbaner, og på usynlig bevægelse som varme, lys og elektricitet.

Ligesom tale-sproget har også tal-sproget tre genrer, fakta og fiktion og fup.

Fakta er ‘DaSå’ beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare og beregner det beregnelige: ‘DA prisen er 4 kr/kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr’. Fakta-beregninger skal kontrolberegnes: T = 3 kg á 4 kr/kg = 3*4 kr = 15 kr. Hov regnefejl, T = 12 kr.

Fiktion er ‘HvisSå’ beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, men beregner det uberegnelige: ‘HVIS indkomsten er 4 mio$/år, SÅ vil 6 års indkomst være 6*4 = 24 mio$’. Fiktions-beregninger skal suppleres med andre scenarier: HVIS Indkomsten vi ligge mellem 4kr/dag og 5kr/dag, så vil 3 dages indkomst vil ligge mellem 3*4 = 12 kr og 3*5 = 15 kr.

Fup er ‘HvadSå’ beregninger, som kvantificerer ikke-kvantificerbare kvaliteter og beregner det uberegnelige: ‘HVIS en gravplads koster 10 kr/dag, og en hospitalsplads koster 10.000 kr/dag, SÅ er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVADSÅ? Betyder det, at hastighedsgrænsen så skal sættes op til 200 km/time for at spare penge?’ Et andet eksempel er skolens plusstykker uden enheder: 2+1=3 altid, næh for 2dage+1uge = 9 dage. Et tredie eksempel er Mars-sonden Climate Orbiter, som forulykkede på grund af regnefejlen 2 + 3 = 5, hvor man overså, at enhederne var forskllige. Derimod er gangestykker altid fakta, da fx 3*4=12 blot siger, at 3 4ere kan omtælles til 1,2 tiere. Fup-beregninger skal afvises og henvises fra kvantitativ ital-sættelse i tal-sproget til kvalitativ itale-sættelse i tale-sproget.

Men, når nu matematik bare er så let, hvorfor fremstiller universitetet og dets vejledere det så som om, det bare er så svært? Og hvad kan vi gøre for at ændre matematik fra svært til let?

Svaret findes uden for matematikken, i de tre store videnskaber, filosofi og psykologi og sociologi. Og svaret er positivt: Matematik bliver bare så let, hvis vi vælger den naturgivne eksistens i stedet for en menneskeskabt essens.

Forskellen mellem eksistens og essens henter vi fra filosofien, hvor eksistentialismen netop siger, at eksistens bør gå forud for essens for at undgå, at essensen koloniserer eksistensen. Så i sætninger skal man respektere subjektet, som eksisterer, og betvivle prædikatet, da det er en konstrueret essns, der begrænser subjektets mulighed for væren. Men desværre lader universitetet sin essens gå forud for naturens eksistens.

I psykologi giver forskellen mellem eksistens og essens anledning til to læringsmetoder, radikal og social konstruktivisme. Den første siger, at man skal kunne gribe eksistens for at kunne begribe essens. Den anden siger modsat at man skal tilegne sig den institutionaliserede essens gennem kyndig formidling. Desværre lader skolen den sociale konstruktion gå forud for den radikale.

Sociologien ser matematikken som en institution, der lider af en målforskydning, hvor mål og middel har bytte plads. En institution er noget, mennesker skaber for at nå etmål, som de ikke selv har tid til at nå. Som middel ansættes så et personale, der hurtigt indser, at deres egen fortsatte ansættelse bedst kan sikres ved at arbejde fro, at målet ikke nås fx ved at opfinde forskellige vaskligheder. Hvorved det oprindelig mål nu bliver middel ti at sikre det nye mål, ansættelse af endnu flere vejledere.

Det er politikernes ansvar at stoppe undervisningen i at ’matematikke’. Fejler de, kan forældrene heldigvis selv vise deres børn og unge, hvor let det er at genforene uens og ens styk-tal og per-tal.

Kan matematikken afkoloniseres ved at ombytte essens med eksistens?

Matematikundervisningen afholder hvert fjerde år en stor international konference. Til sommerens konference i Australien er et af hovedpunkterne ønsket om at afkolonisere matematikken. Herunder at diskutere, hvordan faget er blevet koloniseret og har koloniseret andre områder.

Typisk ses matematik som en indre essens, hvis mestring er et middel til senere at mestre en ydre eksistens, nemlig fænomenet mange, som det optræder i tid og rum. Spørgsmålet er så blot: hvad skal mestres først, matematik eller mange, essens eller eksistens?

Filosofien giver her to svar. Eksistentialismen vil hævde, at essens afspejler eksistens, hvorimod Platon vil hævde, at essens installerer eksistens.

Fagets traditionelle svar følger Platon: Formålet med undervisning i matematik må da være at lære matematik, som den skabes på universiteterne. Og som så siden måske kan anvendes på andre områder. Men man jo ikke kan anvende matematikken, før man har lært den. Altså essens før eksistens.

Desværre gør det matematik meget svær at lære. Det er derfor relevant at spørge, om dens nuværende abstrakte essens-baserede form har koloniseret en oprindelig konkret eksistens-baseret form.

Som let findes ved at spørge en 3årig ”Hvor mange år næste gang?” Svaret er 4, med 4 fingre vist. Men holdt sammen 2 og 2, protesterer barnet: ”Det er ikke 4, det er 2 2ere.” Barnet ser altså eksistensen, bundter af 2ere i rummet, og 2 af dem i tid, når de tælles.

Barnets medfødte talsans fører således til en helt anden taltype end skolens. Nemlig til todimensionelle bundt-tal med enheder, hvis gange-stykker er pålidelige, da ’3 gange 4 er 12’ blot siger, at 3 4ere kan omtælles til en anden enhed, fx til 1,2 tiere. I modsætning fører skolens endimensionelle linjetal uden enheder til plus-stykker, som er upålidelige, da ’2 plus 1 er 3’ modsiges fx af 2dage plus 1uge er 9dage. Skolens essens-baserede matematik burde derfor omdøbes til ’matematisme’, sandt indenfor, men sjældent uden for skolen.

Skolen kunne i stedet vælge en eksistens-baseret matematik, hvor cifrene er ikoner med de antal streger, de beskriver, fire i 4-tallet osv. Og hvor børnenes eget tal-sprog videreudvikles ved at de bundt-tæller og om-tæller eksisterende totaler, før de regner på dem. Regnearterne bliver så også ikoner, men kommer i modsat rækkefølge med potens først: Bundttælles håndens fem fingre i 2ere fås ikke '2B1' 2ere, men '1BB 0B 1' 2ere, da 2 2ere er 1 bundt-bundter, altså 1 BB, eller 1 B^2. Bundt-tæller vi i ti'ere, bliver ti til 1B 0, hundrede til 1BB 0B 0, tusinde til 1BBB 0BB 0B 0, altså samme cifre som hvis 8 optælles i 2ere.

Efter potens til at beskrive bundt-bundter, kommer så division og gange: Ved bundttælling af 8 i 2ere skal bundter skubbes væk og stakkes, hvilket kan ikoniseres med en kost og en lift, så processen kan skrives som en 'omtællings-formel' 8 = (8/2)x2, eller T = (T/B)xB med T og B for Total og Bundt. En formel, som ellers først optræder i syvende klasse under navnet 'proportionalitet', og som nok er fagets vigtigste formel, da den bruges til at skifte mellem enheder overalt i natur og i samfund.

Omtælles 9 i 2ere, kan et minus-reb trække stakken væk for at finde ubundtede, der anbragt oven på stakken beskrives som en brøk også optalt i 2ere, eller som et decimaltal, eller som et overlæs, eller som et under-læs med et negativt tal: 9 = 4½ B = 4B1 = 3B3 = 5B-1 2ere. Rumligt optræder de tidslige tælletal således i forskellige former. Tilsvarende kan tælletallet 58 optræde som 5B8, som 6B-2, som 4B18, osv. Disse fleksible bundt-tal letter regnestykker:

37+48 = 3B7+4B8 = 7B15 = 8B5 = 85. Og 37 – 18 = 3B7 – 1B8 = 2B-1 = 1B9 = 19. Og 4*23 = 4*2B3 = 8B12 = 9B2 = 92. Og 92/4 = 9B2 /4 = 8B12 /4 = 2B3 = 23.

Ved omtælling fra ti'ere til ikoner fører spørgsmålet "Hvor mange 2ere i 8?" til ligningen u*2 = 8. Da 8 kan omtælles i 2ere som 8 = (8/2)*2, bliver svaret u = 8/2, der findes ved at flytte tal til modsat side med modsat regnetegn.

Omvendt fører spørgsmålet "6 7ere er hvor mange ti'ere?" til tabeller og videre til bogstavregning: 6*7 = (B-4)*(B-3). I et ti gange ti kvadrat ses, at 6*7 er tilbage, når vi fjerner 4 vandrette og 3 lodrette bundter og tillægger de 4 3ere, der er fjernet to gange, så 6*7 = B*B – 4*B – 3*B + 4*3 = 3B + 1B2 = 4B2 = 42. Hvoraf ses, at minus gange minus skal være plus.

Ligeledes ses, at bundt-bundter er kvadrater. Som kan plusses til et nyt kvadrat på en tværlinje. Og som firkantede døre og bøger kan omtælles til ved at flytte halvdelen af det overskydende til nabosiden. Hvilket så næsten giver kvadratroden, samt et firedelt kvadrat, der kan løse andengradsligninger.

Omtælles æbler fra kroner til kilo fås et 'per-tal' som 4kr/5kg, der danner bro mellem de to enheder. Spørges "16 kr = ?kg" bliver svaret "16kr = (16/4)*4kr = (16/4)*5kr = 20 kr". Med ens enheder fås brøker og procenter: 4kr/5kr = 4/5, og 4kr/100kr = 4/100 = 4%.

Trekantsregning opstår i en firkant med en diagonal, hvor højden, bredden og diagonalen omtælles i hinanden parvis, fx højde = (højde/bredde)*bredde = tangens* bredde, hvor tangens-tallet beskriver diagonalens stejlhed.

Ved kørsel kan der omtælles fra meter til sekunder: meter = (meter/sekund)*sekund = fart*sekund

Efter afsluttet bundt- og omtælling kan totaler så endelig plusses. Og her fører spørgsmålet "2 3ere og 4 5ere er hvor mange 8ere?" til plusning af arealer, som er fagets vigtigste regneart, der ellers først optræder i den sidste gymnasieklasse under navnet 'integralregning'.

Cifre plusses derfor som bundter: '6 plus 9' er '(2B3) 6ere' eller '(2B-3) 9ere'. Og '9 minus 6' er (1B0 – 1B-3) 9ere, dvs. +3. Hvoraf igen ses, at minus gange minus naturligvis må være plus.

Vi er nu fremme ved fagets kerne, algebra-kvadratet, opkaldt efter det arabiske ord 'algebra', der betyder 'at genforene tal'. Kvadratet viser genforening af de fire eksisterende tal-typer tal, uens og ens styktal og per-tal: Plus og gange forener uens og ens styktal, og integration og potens forener uens og ens per-tal. Og alle har de en modsat regneart til opdeling: Minus, division, differentiation og rod eller logaritme.

Så allerede inden sjette klasse har børn nu et tal-sprog til at beskrive ydre eksistens med indre tal-fortællinger, der ligesom i tale-sproget har tre genrer: fakta, fiktion og fup. Fakta fortæller fx om dagens indkøb, fiktion om morgendagens indkøb, og fup kan fx være plusning uden enheder, 2dage + 1uge = 3.

Men desværre koloniseres børnenes eksistens-baserede tal-sprog af skolens essens-baserede matematisme. Som gymnasiet så koloniserer til meta-matsime i form af abstrakt mængde-matematik. Som universitetet så koloniserer med otte kompetencer, der skulle være nødvendige for at anvende den lærte meta-matisme på virkelige problemer. Og som missioneres af skarer af efteruddannede matematikvejledere.

Men til hvilken nytte, når kun få kan lære den overabstrakte meta-matisme? Og når børn og unge allerede besidder de to kompetencer, tælle og regne, som efterlyses i FN's sytten verdensmål for en bæredygtig udvikling. Hvor det fjerde mål vil sikre, at alle unge inden 2030 opnår kyndighed i både tekst og tal.

Så hvorfor ikke bare afkolonisere matematikfaget ved at følge filosofiens råd om at ombytte essens med eksistens? Svaret finder vi i sociologien.

Vi mennesker har mål, men ikke tid til at nå dem alle. Vi opretter derfor institutioner med ansatte som middel til at nå målet. Men som hurtigt indser, at ansættelsen bedst sikres ved, at målet ikke nås, fx ved at gøre vejen ekstra vanskelig. Altså ved at skabe en såkaldt 'mål-forskydning', hvor mål og middel bytter plads.

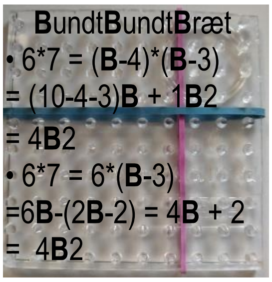
Fx ved at lade elevers eget tal-sprog kolonisere gang på gang, så de aldrig opnår kyndighed i tal under deres forgæves forsøg på at opnå kyndighed i kyndighed, som er den oprindelige græske betydning af ordet 'matematik'.

Matematik

MatemaTisme? eller MangeMatik

med barnets 2D BundtBundtTal på BBBræt

Matematik blir så let hvis
Mange mestres først med
MangeMatik



MangeMatik respekterer, at MANGE beskrives med barnets egne **BundtBundt-tal med enheder -** i stedet for at få påtvunget falsk WOKE-identitet som **linjetal uden enheder**, der blir **matematisme** ved at påstå, at 2+1 er 3 altid, til trods for at 2dage+1uge er 9dage.

MangeMatik ses ved at spørge en 3-årig "Hvor mange år næste gang?" Svaret er 4, med 4 fingre vist. Men holdt sammen 2 og 2, indvender barnet "Det er ikke 4, det er 2 2ere." Barnet ser således, hvad der findes i rum og tid, bundter af 2ere i rummet, og 2 af dem i tid, når de tælles. Så det, der eksisterer, er totaler, der kan optælles til (gen)forening (*algebra på arabisk*) i rum og tid, som fx 2**B**1 2ere.

MangeMatik bygger på filosofien eksistentialisme, der anbefaler, at eksistens går forud for essens, der ellers vil kolonisere eksistensen. Det eksternt eksisterende går altså forud for interne 'essens-regimer' som bør dekonstrueres & demodeleres så eksistensen afkoloniseres

BundtTal med enheder: ~~8~~, 0B8, 1B-2, eller 1B0 8ere. ~~87~~, 8B7, 9B-3.

Allan.Tarp@MATHeCADEMY.net, 2024

01. MANGE-MATIK BRUGER BUNDT-TAL MED ENHEDER

Der findes to slags tal, styk- og per-tal, der kan være uens eller ens, og som skal genforenes. Matematiks ærinde er derfor ikke at 'matematikke', for det kan man jo ikke, men at handle: ***at genforene uens & ens styk-tal & per-tal***.

• 3 kroner og 2 kroner er uens styktal, og her forudsiger stykket 3+2 = 5 resultatet af at forene dem.

• 3 gange 2 kroner er ens styktal, og her forudsiger regnestykket 3*2 = 6 resultatet af at forene dem.

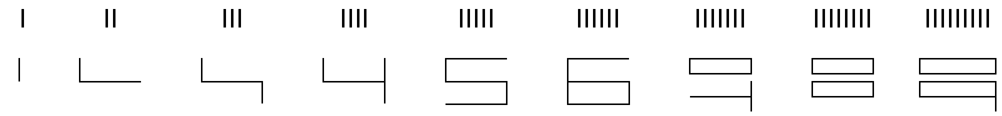
• 3 gange 2% er ens per-tal, her forudsiger regnestykket 102%^3 = 106,12% resultatet af at forene dem til 6% samt 0,12% ekstra i 'rentes-rente'.

• Uens per-tal er fx blanding som 2kg á 3kr/kg og 4 kg á 5kr/kg. Her kan styk-tallene 2 og 4 forenes direkte, medens per-tallene 3 og 5 først skal opganges til styk-tal, før de kan forenes som arealer, kaldet at integrere, hvor gange kommer før plus: T = (2+4) kg til (2*3+4*5) kr, altså 6 kg á 26/6 kr/kg.

Forene / *opdele i*	**Uens**	**Ens**
Styk-tal (meter, sekund)	**T = a + b** *T – b = a*	**T = a*b** *T/b = a*
Per-tal (m/sek, m/100m = %)	**T = ∫ f dx** *dT/dx = f*	**T = a^b** *b√T = a loga(T) = b*

CIFRE ER IKONER

Et ciffer er et ikon med samme antal streger som det viser, fire i 4-tallet, osv.



1 2 3 4 5 6 7 8 9

BUNDT-TÆLLING

• Totaler optælles i bundter. 5 fingre optælles som ’1 **B**undt 2’ 3ere, kort som ’1**B**2’ 3ere, eller blot ’12’ 3ere. Og ti fingre optælles som ’3**B**1’ 3ere, eller ’1**B**undt**B**undt 0**B**undt 1’ 3ere, eller ’1**BB** 0**B** 1 3ere, eller blot ’101’ 3ere.

• T = 345 er uden enheder, T = 3**BB**4**B**5, hvor **B** = ti, og **BB** = **B**^2 = hundrede.

Tælling med enhed: 0**B**1, …, 0**B**9, 0**B**ti eller 1**B**0, 1**B**1, …, 9**B**9, 9**B**ti, 1**BB**0**B**0.

• Optælling af 5 i 2ere kan ske på tre måder: normalt, eller med ’overlæs’ eller med ’under-læs’: 5 = 2**B**1 = 1**B**3 = 3**B**-1 2ere. Det letter beregning: 45+27 = 4**B**5+2**B**7 = 6**B**12 = 7**B**2 = 72, og 7*56 = 7*5**B**6 = 35**B**42 = 39**B**2 = 392.

• En total T optælles i en enhed, fx T = 3 4ere, eller T = 3*4. Dette kaldes en tal-fortælling med et grundled T, et udsagnsled =, og et prædikat, 3*4.

REGNEARTER ER IKONER FOR FORENING

• At bort-skubbe 2ere ved omtælling af 8 kan ikoniseres med en kost kaldet division, 8/2. At op-stakke 2ere 4 gange kan ikoniseres med en lift kaldet gange, 4 x 2. Omtælling kan forudsiges af en **omtællings-formel**, der bruges til at skifte enheder: 8 = 4*2 = (8/2)*2, eller *T* = (*T*/***B***)****B***, med T og **B** for Total og **B**undt. Denne proportionalitets-formel siger, at antal ***B***’ere i *T* er *T*/***B***.

• At bort-trække af en stak for at finde ubundtede kan ikoniseres med et reb kaldet minus, 9 – 4*2 = 1. Placeret oven på stakken bliver ubundtede til en decimal, en brøk eller et under-læs: 9 = 4**B**1 = 4 ½ = 5**B**-1 = 3**B**3 2ere.

• At op-samle stakke kan ikoniseres med et kryds kaldet plus, +, der viser de to retninger, hvorpå 2 3ere og 4 5ere kan samles, vandret og lodret.

OPDELING

Det modsatte af samling er opdeling, der forudsiges af tilbageregning eller ligningsregning, hvor vi bruger bogstavet *u* for det ukendte tal.

• I tilbageregningen (ligningen) ’*u* + 2 = 5’ spørger vi ”Hvad er det, der sammen med 2 giver 5?”. Svaret fås naturligvis ved den modsatte proces, ved nu at bort-trække de 2 fra 5 med minus, *u* = 5 – 2. Det ukendte tal findes altså ved at flytte det kendte tal *til modsat side med modsat regnetegn*.

• I ligningen *u**2 = 6 spørger vi ”Hvor mange 2ere er der i 6?”. Svaret fås naturligvis ved at optælle 6 i 2ere, 6 = (6/2)*2, så *u* = 6/2. Altså igen ved den modsatte proces, ved at bort-skubbe 2ere væk. Så igen ’*modsat side & tegn’*.

• I ligningen 2^*u* = 8 spørger vi ”2 er bundt-bundtet ? gange i 8?”. Svaret fås af bundtnings-tælleren logaritme, *u* = log2(8). Så igen ’*modsat side & tegn’*.

• I ligningen *u*^3 = 8 spørger vi ”Hvad bundt-bundtes 3 gange for at give 8?”. Svaret fås af bundt-finderen rod, *u* = 3√8. Så igen ’*modsat side & tegn’*

• I ligningen 2*3 + *u**5 = 4*8 spørger vi ”Samles 2 3ere og ? 5ere fås 4 8ere?” Svaret fås igen ved den modsatte proces, dvs. ved at bort-trække 2 3ere og derefter at bort-skubbe 5ere, også kaldet at differentiere, hvor minus er før division, altså det modsatte af at integrere, hvor gange er før plus.

OMTÆLLE MELLEM IKONER OG 10ERE

”Hvor mange 8ere er der i 32?” Svaret forudsiges af ligningen *u**8 = 32, med løsningen *u* = 32/8, da 32 omtalt i 8ere er 32 = (32/8)*8.

”Hvor mange 10ere i 6 7ere?” forudsiges af 6*7 på et **B**undt**B**undt**B**ræt, et **BBB**ræt for at lære tidlig algebra: 6*7 = (**B**-4) * (**B**-3) = 10**B** -4**B** -3**B** + 4*3, da de 4 3ere bort-trækkes to gange. Heraf ses, at minus gange minus giver plus.

OMTÆLLE MELLEM STAKKE OG KVADRATER

Bundt**B**undter er kvadrater, der vokser med 2 sider mere: 6^2 = 5^2+2*5 +1. En T = 6*4 stak omformes til et √T-kvadrat ved at flytte det halve overskud: 6*4 ≈ (6-1)*(4+1) = 5^2, så √T ≈ 5, for der skal skæres *u* af 5 til 1*1 hjørnet:

*u**5*2 = 1 giver *u* = 0,1. Og √24 = 4.9 rammer faktisk lommeregnerens 4,9.

OMTÆLLING MELLEM FYSISKE ENHEDER GIVER PER-TAL

Frugt kan omtælles mellem kg og kr af et **per-tal**, prisen, fx 4kr per 5 kg, eller 4kr/5kg. Enhed skiftes ved at omtælle i per-tallet, kaldet proportionalitet.

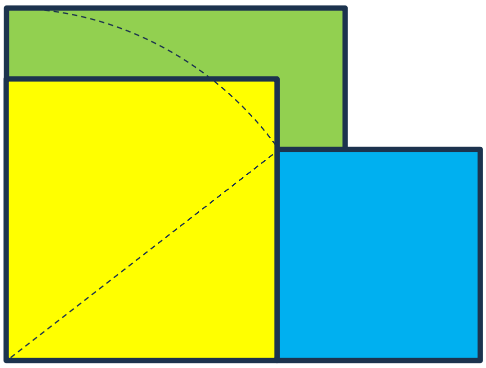
Spørgsmål: 20kg = ? kr. **Svar**: 20kg = (20/5) * 5kg = (20/5) * 4kr = 16kr.

Med samme enhed er per-tal brøker, 4kr/5kr = 4/5, 4kr/100kr = 4%.

Spørgsmål: 4/5 af 20kr = ? kr. **Svar**: 20kr = (20/5)*5kr gir (20/5)*4kr = 16kr.

Naturen og STEM er fyldt med per-tal. En bevægelse kan optælles i både meter og sekunder, hvor per-tallet meter/sekund kaldes fart eller hastighed. Vand kan optælles både i gram og liter med per-tallet gram/liter, tætheden.

I en stak med bund, højde og diagonal, kan højden omtælles i bunde: Højde = (højde/bund) * bund = tangens-vinkel * bund. Med højde 3 og bund 2 fås 3 = (3/2)*2, eller tangens-vinkel = 3/2 = 1.5.



Måles vinklen, fås 56 grader.

Så ved 56 grader er højden 1.5 bunde.

Tilsvarende med de andre vinkler op til 90.

Vi kan således bruge en lineal som vinkelmåler.

Da en cirkel kan opdeles i mange små højder
finder vi pi som $\pi = n$*tan(180/*n*) for *n* stor = 3.14...

To kvadrater kan samles til ét på deres Bund-Top BT-linje.

bund^2 + højde^2 = TB^2.

PLUSNING, MEN VANDRET ELLER LODRET?

Når totaler er talt op og om, kan de plusses, men vandret eller lodret?

Ved vandret plusning spørges fx ’T = 2 3ere + 4 5ere = ? 8ere’. Omtællings-formlen forudsiger, at ’T/8 = 3.mere’, og mere = T – 3*8 = 2’, så ’T = 3**B**2’ 8ere. Det kaldes også integration, da vi plusser arealer.

Ved lodret plusning skal omtælling først gøre enhederne ens, fx 3ere, 5ere eller tiere. Herefter vil omtællings-formlen forudsige, fx at ’T/3 = 8.mere’, og ’mere = T – 3*8 = 2’, så ’T = 8**B**2’ 3ere. Det kaldes proportionalitet.

Enkeltcifre: 6+9 = 2**B**3 **6ere** = 2**B**-3 **9ere** = ½**B**1 + ½**B**4 **ti’ere** = 1**B**5 = 15.

9-6 = 1**B**0 – 1**B**-3 **9ere** = 3, så 0 - -3 = 0+3. 6-9 = 1**B**-3 – 1**B**0 **9ere** = -3.

Ved plusning af per-tal bliver de til arealer, når de opganges til styktal, og plusses derfor som arealet under deres kurve, altså som integration.

TOTALER I TID OG RUM, VÆKST OG STATISTIK

I tid vokser en total ved at plusses eller ganges med et tal, kaldes plus-vækst og gange-vækst, eller lineær og eksponentiel vækst.

Plusvækst: Sluttal = Begyndelsestal + enkeltvækst-tal * vækstgange, eller kort, *T* = *B* + *a*n*. *a* kaldes også stigningstallet eller hældningstallet. Gangevækst: Sluttal = Begyndelsestal * enkeltvækst-faktor ^ vækstgange, eller kort, $T = B * a\text{^}n$, da 200kr + 5% = 200*105% kr, så a = 1 + rente

Plus&gange-vækst (opsparing i en bank): $A/a = R/r$, hvor A er slut-kroner, a = periode-kroner, R = slut-rente, r = periode-rente, og $1+R = (1+r)\text{^}n$, hvor n er antal perioder. Tilskrives 100% mange gange n fås Euler-tallet $e = (1+1/n)\text{^}n$.

Hvis vækst-tallet ændrer sig konstant, fås kvadratisk vækst med en parabel-kurve med krumning opad eller nedad ved voksende el. aftagende ændring.

Hvis krumningen ændrer sig konstant, fås kubisk vækst med en dobbelt-parabel med krumning og mod-krumning. Hvis vækst-faktoren falder konstant, fås logistisk mætnings-vækst med en bakke-kurve ved infektioner. Forveksling af eksponentiel og mætningsvækst kan medføre unødig skade.

I rum kan en total opdeles i flere deltotaler, der kunne være lige så store som deres gennemsnit, og hvor spredningen så fortæller, hvor langt væk fra gennemsnittet de i gennemsnit ligger. Men gennemsnit har kun mening, hvis de kunne være lige store. Elever i 1. og 9. går ikke i 5. klasse i gennemsnit.

02. MATEMA-TISME BRUGER LINIETAL UDEN ENHEDER

Mange-matik med enheder bygger på den konkrete eksistens 'Mange', og bruger bundt-tal med enheder, og skelner mellem styk-tal og per-tal.

Mængde-matematik uden enheder bygger på den abstrakte essens 'mængde', og anerkender ikke per-tal, men bygger på linjetal uden enheder, der bliver til 'matematisme', altid sandt indenfor med sjældent udenfor klassen, ved at påstå, at 2+1 = 3 til trods for, at 2par + 1 = 5. Og at cifre og brøker er tal, når de i stedet er operatorer, der behøver tal for at blive tal. At mængder fører til et selv-reference paradoks negligeres: Mængden af mængder der ikke tilhører sig selv, tilhører den sig selv eller ikke? Dette svarer til at spørge: "Denne sætning er usand", er den sand eller usand?

Matematisme anser cifre og regnetegn for symboler ligesom bogstaver. Flercifrede tal siges at følge et positionssystem, men ti kaldes ikke bundt, hundrede ikke **B**undt-**B**undt, osv. Negative tal tillades ikke på en position.

Forening sker med de samme regnearter, dog præsenteres de ikke samtidig, men i den modsatte rækkefølge plus, minus, gange, division, potens. 3+1 = 4 fremstilles, som at 3+1 og 4 er forskellige tal-navne for det samme. Altså ikke som en fortælling om en total, T = 3+1 = 4. Dvs. både grundled og udsagnsled udelades. Der angives kun en ækvivalens mellem tal-navne. Over-læs og under-læs accepters ikke, i stedet bruges mente og lån.

Er 2+3*4 = 20 eller 14? Det afgøres af det valgte regne-hierarki. Til trods for, at T = 2+3*4 = 2 1ere + 3 4ere, der kun kan omtælles til 1**B**4 tiere eller 14.

8/2 er 8 delt i 2 4-bundter, i stedet for 8 optalt i 4 2-bundter. 6*7 angis som et talnavn for 42, til trods for, at 6*7 er 6 7ere, der evt. kan omtælles til 4**B**2 tiere eller 4.2*10 eller 42 hvor større bredde reducerer højden fra 6 til 4.2.

Den lille tabel læres udenad, 6*7 = 42 i stedet for at sige 6*7 = (**B**-4)*(**B**-3) = **BB**-3**B**-4**B**+3*4 = (10-(3+4))**B**+3*4 = 3**B**12 = 4**B**2, eller 6*7 = 6*(**B**-3) = 6**B** -18 = 6**B**-(2**B**-2) = 4**B**2 = 4.2*10. Begge gange ses altså, at minus*minus giver plus.

Bogstavregning og reduktionsopgaver som $2ab + 3bc = (2a+3c)*b$ fremstilles som anvendelse af den distributive lov, hvor tal kan flyttes ind eller ud af parenteser.

Altså ikke ved at finde den fælles enhed, b'ere:

Antal b'ere er $2a + 3c$, så $T = (2a + 3c)$ b'ere = $(2a+3c)*b$.

Division fører videre til brøker, decimaler og procent. Også brøker behandles uden enheder: 1/2 + 2/3 = 7/6, til trods for at ½ af 2æbler + 2/3 af 3 æbler er 3/5 af 5 æbler, og naturligvis ikke 7 æbler af 6.

Proportionalitetsopgaver løses ved at gå over enheden.

Negative tal indføres som selvstændige tal, hvor minus gange minus defineres til at være plus.

Opdeling kaldes løsning af en ligning med to tal-navne, hvis ækvivalens udtrykkes i et udsagn, der bevarer sin sandhedsværdi ved operationer udført på begge tal-navne samtidig. Ved omformning af et tal-navn benyttes tre love, en kommunikativ og en associativ og en distributiv lov.

2**x* = 8;   (2**x*)*½ = 8*½;   (*x**2)*½ = 4;   *x**(2*½) = 4;   *x**1 = 4;   *x* = 4

Andengradsligningen i 10. klasse undlader at tegne *x*^2+6*x*-8=0 som (*x*+3)^2 hvis 4 dele forsvinder på nær 3^2 -8 = 1. Så (*x*^3)^2 = 1, dvs. *x* = -2 og *x* = -4.

Formler fra geometrien fører til funktionsbegrebet. Euler definerede en funktion som et regnestykke med tal og bogstaver.

I mængdematematikken defineres en funktion som en delmængde af et mængdeprodukt hvor første-komponent identitet medfører anden-komponent identitet.

Hvor *x* står for et uspecificeret tal, står *f*(*x*) for en uspecificeret formel med *x* som en variabel. Udtrykket *f*(2) er derfor meningsløst, da 2 er en konstant.

Lineære og eksponentielle funktioner defineres så som eksempler på homomorfier:

f(x) = *a***x*, og *f*(*x*) = *a*^*x*, altså uden begyndelsestal *b*.

I geometrien behandles plangeometrien og koordinatgeometrien før trigonometrien.

Calculus behandles sidst med differentiation før integration, skønt regning på blandinger er plusning af stykkevis konstante per-tal.

Der senere bliver lokalt konstante, som omskrives til tilvækster, *p**d*x* = d*y*, der så kan plusses som én differens mellem slut-*y* og start-*y*, da alle mellemled forsvinder.

Derudover indfører matematismen 8 såkaldte matematik-kompetencer, hvor mange-matematik kun har 2: tæl og regn i rum og tid.

03. MATEMATIK SOM ET TAL-SPROG TIL MODELERING

Matematisme har store problemer med at anvendes til modellering, og skelner ikke mellem genrerne fakta, fiktion og fup ('DaSå / HvisSå / HvadSå' eller 'rum / rate / risiko' modeller).

Alle siges at være tilnærmelser. Mange-matematik bruger formler fra start. Og har derfor ikke problemer med modellering, da den ser sig som et tal-sprog parallelt til tale-sproget, der begge har et meta-sprog (en grammatik) og tre genrer: fakta, fiktion og fup. Fup-modeller er fx matematisme med **addition** af tal uden enheder, samt **gennemsnit** af tal, som ikke kunne have været ens.

04. AFKOLONISERING MED DEMODELERING OG DEKONSTRUKTION

2 koloniseringer: BundtTal af matematismens linjetal, og igen af 'meta-matismens' mængder

	Matematisme, ESSENS	**MangeMatik, EKSISTENS**
Cifre	Symboler	Ikoner
345	Positionssystem	3**BB** 4**B** 5, **BB** = **B**^2, **BBB** = **B**^3
Regnearter	Funktioner, + - x / ^	Ikoner, ^ / x - +
3 + 4	3 + 4 = 7	Meningsløst uden enheder
3 * 4	3 * 4 = 12	3 * 4 = 3 4ere
9 = ? 2ere	Meningsløst, kun ti-tælling	9 = 3**B**3 = 5**B**-2 = 4**B**1 = 4½ 2ere
8 = ? 2ere	Meningsløst, kun ti-tælling	8 = (8/2)*2, T = (T/**B**)***B**, prop.

2*u = 8	(2*u)*½ = 8*½, u = 4	2*u = 8 = (8/2)*2, så u = 8/2
6*7 = ?	øh 44, øh 52, øh 42? OK	(**B**-4)*(**B**-3) = (10-4-3)**B** 12 = 4**B**2
4kg = 5$, 6kg =?	1kg = 5/4$, 6kg = 5/4*6$	6kg = (6/4)*4kg = (6/4)*5$
½ + 2/3 = ?	½ + 2/3 = 3/6 + 4/6 = 7/6	½*2 + 2/3*3 = 3/5*5
2 3ere+ 4 5ere	2*3+4*5 = ~~10*5~~ = 6+20= 26	2*3 + 4*5 = 3**B**2 8ere, integration
6 + 9 = ?	6 + 9 = 15	2**B**3 6er, 2**B**-3 9er, ½B1+½B4 tier = 15
Tangens = ?	Tan = sin/cos	høj = (høj/bred)*bred, tan = h/b

HENVISNINGER (Eksistens før essens)

Tarp, A. (2018). *Mastering Many by counting, re-counting and double-counting before adding on-top and next-to*. Journal of Math. Education, 11(1), 103-117.

Tarp, A. (2019). *A decolonized curriculum.* Mathecademy.net/a-decolonized-curriculum/

Tarp, A. (2020). *De-modeling numbers & operations: From inside-inside to outside-inside understanding*. Ho Chi Minh City Univ. of Educ. Journal of Science 17(3), 453-466.

Tarp, A. (2023). *MateMatik-Miraklet 2030, Brug Barnets BundtTal med enheder*, https://www.saxo.com/dk/matematik-miraklet-2030_ebog_9788771962277.

● *Matematik er bare så let*, https://youtu.be/zUlaXnSBJ4Y.

● *Flexible Bundle Numbers Develop the Childs Innate Mastery of Many*, https://youtu.be/z_FM3Mm5RmE.