Matematik forudsiger
B
Formelregning med formelregner
Formler kan forudsige og spå, især om fremtiden

Et kompendium til matematik B
af Allan.Tarp@MATH**e**CADEMY.net
Version 0508_3

Fra MATEMATIK-undervisning

Til MATEMATIK-læring

Et kompendium er et svar på spørgsmålet: 'Hvordan omlægges matematiktimen fra matematikundervisning til matematiklæring?'

Hver side i kompendiet er en afsluttet læringsaktivitet. Kompendiet er skrevet med henblik på at introducere matematikkens forskellige områder, så eleven efter basisforløbet kan træffe et sikrere valg af studieretning.

Læringsarbejdet udføres af den lærende, som kan opfattes som en 'senmoderne konstruktivist'.

I senmoderniteten gør informationsteknologien konstruktivisten skeptisk over for traditioner.

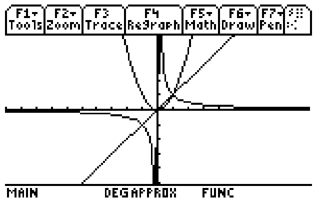
Faget kan ikke mere hælde viden på, men må tillade konstruktivisten at konstruere sin egen viden gennem arbejdet med autentiske og meningsfulde opgaver.

Dvs. konstruktivisten skaber sin egen matematik, ikke ved at læse om matematik, med ved at arbejde med det matematik-skabende. Konstruktivisten udvikler gerne autoriserede rutiner, men autoriseringen skal komme fra laboratoriet, ikke fra biblioteket.

For at matematik kan bidrage til almen studieforberedelse er der medtaget en side om matematikkens historie og kulturelle betydning som et forudsigelsessprog, der har bevirket at et moderne samfund kunne opbygges ved at erstatte biblioteksbaseret fortolkning med laboratoriebaseret forudsigelse.

Kompendiet er opbygget så den lærende hele tiden oplever matematik som forudsigelser, der bagefter kan testes ved afprøvning.

Kompendiet bygger på anvendelse af formelregneren TI-89.



y = 1*x , y = x*x , y = 1/x

Teori

Temaopgaver og projekter

Matematik forudsiger

Matematik
 Algebra
  Opdele og genforene tal
 Geometri
  Opmåle jordstykker
 Statistik
  Optælle status
	Matematik er en samlet betegnelse for tre områder, algebra, geometri og statistik
	Algebra (regning) bruges til at forudsige optællingsprocesser, enten slutresultatet elle enkeltdelene.
	Geometri (jordmåling) bruges til at opmåle plane figurer eller rumlige former.
	Statistik (tælling) bruges til at optælle forskellige fænomeners aktuelle størrelser.

Matematik består af to hovedområder: algebra og geometri samt statistik

Algebra betyder genforening på arabisk. Algebra kan oversættes til regning. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan kan vi forene enkelt-tal til en total? Geometri betyder jordmåling på græsk. Jorden er det vi lever på og lever af, og som vi derfor må dele.

Algebra og geometri opstod historisk som svar på de to grundlæggende spørgsmål: Hvordan deler vi vor jord og det den producerer?

Oprindeligt brødfødte mennesker sig som andre dyr, som jægere og samlere.

Det første kulturskift sker med indførelse af agerbrugskultur i varme floddale hvor alt kunne produceres, specielt peber og silke. Højlandsfolket havde derfor ingen varer at bytte med, kun ædelmetaller, især sølv.

Sølvminerne uden for Athen finansierede den græske kultur og det græske demokrati. Sølvminerne i Spanien finansierede det romerske imperium som brød sammen da minerne erobredes først af vandaler siden arabere.

Efter år 1000 findes sølv i Harzen. Handelsvejene genopstår og financierer italiensk renæssance og tyske fyrstendømmer. Italien bliver så rigt og kan udlåne penge ved at skabe banker, hvilket fører til rentesregning.

Handelen formidles af arabere, som udvikler både den græske geometri, og en ny regnekunst, algebra.

Den græske geometri opstod da Pythagoras opdagede to formler, som kunne bruges til at forudsige lyde og former. For at skabe vellyd skal strenges længde have bestemte tal-forhold. I retvinklede trekanter er to sider frie, men den sidste kan forudsiges af Pythagoras' læresætning: a^2 + b^2 = c^2. Pythagoras overfortolkede sin succes ved at hævde: Alt er tal.

I Athen blev filosoffen Platon inspireret af Pythagoras til at oprette et akademi, som bygger på troen på, at alt fysisk er eksempler på metafysiske former, som f.eks. geometrien der kunne udledes som eksempler på metafysiske aksiomer. 'Kom kun ind hvis du kender geometri' havde Platon skrevet over akademiets indgang.

Det lykkedes dog ikke Platon at finde flere formler. Og hans akademi blev omdannet til kirkens klostre, der senere blev omdannet til vore dages universiteter.

Den næste formel blev fundet i Italien af Galilei som målte strækning s og tid t for et skråt fald på et skråplan og fandt at s=½*g*t^2. Italien gik dog bankerot da prisen for peber faldt til 1/3 i Lissabon da portugiserne opdagede den anden vej til Indien rundt om Afrika, og herved kunne springe de arabiske mellemhandlere over. Spanien forsøgte at finde en tredje vej til Indien: Ved at sejle mod vest opdager de Vestindien, hvor der hverken er peber eller silke, men til gengæld rigeligt med sølv, f.eks. i sølvlandet Argentina.

Englænderne stjæler en del af det spansk sølv og forøger at finde en fjerde vej til Indien, over havet uden landkending. Her skal man sejle efter månen, og man spurgte derfor: Hvordan bevæger månen sig?

Kirken sagde: Mellem stjernerne. Newton sagde: Månen falder mod jorden ligesom æblet, den falder blot så skævt at jorden er krummet væk inden den rammer, hvorfor månen udfører et evigt fald rundt om jorden.

Hvorfor falder æblet til jorden? Kirken sagde: Det er en metafysisk vilje som sker i himlen som på jorden. Og Herrens vilje er uforudsigelig, så alt hvad du kan gøre er at tro, gå i kirke og lære at bede.

Newton sagde: Det er en fysisk vilje som sker overalt. Men denne vilje, tyngdekraften, er forudsigelig da den kan sættes på formel. Så alt hvad du skal gøre er at vide, gå i skole og lære at regne.

Brahe brugte sit liv på at måle planetpositioner. Kepler fortolkede Brahes data korrekt, men kunne ikke validere sine 3 love uden at opsende nye planeter. Newton kunne derimod validere sin tyngdekraft med faldende ting og penduler.

Newtons succes førte til oplysningstiden, hvor man indså at med formler behøver man ikke mere formynderiet fra de to herrer, Herremanden og Vorherre, men man kunne nu opbygge et demokrati og en industrikultur baseret på formlernes evne til at forudsige naturens adfærd, og på den varebaserede trekantshandel der kom med opdagelsen af, at der var flere penge at tjene på bomuld end på silke.

I den moderne skole findes groft sagt tre typer fag: NAT-fag som forud-siger naturen med formler, SAM-fag som bagud-siger samfundet med tabeller, og HUM-fag, som (stadig) fortolker bibliotekets tekster.

Regningsarter forudsiger

Regningsarter bruges til at forudsige totalen T. Der er 2*4 regningsarter til opsamling af/opdeling i forskellige typer tal:

Opsamling af Opdeling i	Uens	Ens
Styktal Kr, kg, s	Plus + Minus -	Gange * Division /
Pertal Kr/kg, kr/100kr, %	Integration ∑ Differentiation Δ	Potens ^ Logaritme ln

a kr og n kr er totalt T kr:	a+n = T
a kr n gange er totalt T kr:	n*a = T
r % n gange er totalt T%:	(1+r)^n = 1+T
a1 kg á p1 kr/kg + a2 kg á p2 kr/kg er totalt T kr: p1*a1+ p2*a2 = T:	∑ p*a = T

Algebra betyder at samle eller genforene på arabisk. Algebra kan oversættes til regning, forudsigelse. Algebra giver svaret på spørgsmålet: Hvordan kan vi forudsige optællingen af enkelttal til en samlet total?

Der er fire måder at opsamle enkelttal på: plus (+), gange (*), potens (^) og integration (∑).

Plus + bruges til at forudsige opsamling af uens enkelttal:

Job	Optæl	Forudsig
32kr og 63 kr	1,2,…,95	T = 32+63
2kr 36 gange	2,4, …,72	T=72*2
20% 5 gange	120, 144...	T=120%^5

2kr og 3 kr og 4 kr er totalt T kr: 2+3+4 = T

(Optælling: 1,2   3,4,5   6,7,8,9. Forudsigelse: T=2+3+4=9 ☺. 2: et led)

Gange * bruges til at forudsige opsamling af ens enkelttal:

2kr + 2kr + 2kr + 2kr + 2kr = 5 gange 2kr = T, 5*2 = T

(Optælling: 2, 4, 6, 8, 10. Forudsigelse: T = 5*2 = 10 ☺. 5: en faktor)

Potens ^ bruges til at forudsige opsamling af ens procent-tal: 5 gange 2% er totalt T%, 102%^5 = 1+T

(Optælling: 100, 102, 104.04, 106.12, 108.24, 110.41. Forudsigelse: T = 102%^5 = 110.41. 102%: et grundtal, 5: en eksponent)

Integration ∑ eller ∫ bruges ved opsamling af forskellige per-tal:

2kg á 7kr/kg + 3kg á 8kr/kg er totalt T kr: 7*2 + 8*3 = T , ∑ kr/kg * kg = T , ∫ p*dx = T

Omvendte regningsarter findes til alle regningsarter, og bruges til at opdele en total i enkelttal.

15-3 forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3+? = 15</u>, hvor totalen 15 opdeles i 2 uens led (ukendt led).

(Afprøvning: 3+2=5 nej, 3+3=6 nej, … Forudsigelse: ? = 15-3 = 12. Test 3+12 = 15 ☺)

$\mathbf{\frac{15}{3}}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3*? = 15</u>, hvor totalen 15 opdeles i 3 ens led (ukendt faktor).

(Afprøvning: 3*2=6 nej, 3*3=9 nej, … Forudsigelse: ? = $\frac{15}{3}$ = 5. Test 3*5 = 15 ☺)

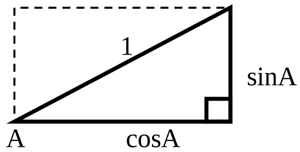
$\mathbf{\sqrt[3]{125}}$ = 125^$\frac{1}{3}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>?^3 = 125</u>, hvor totalen 125 opdeles i 3 ens faktorer (ukendt grundtal).

(Afprøvning: 2^3=8 nej, 3^3=27 nej, … Forudsigelse: ? = $\sqrt[3]{125}$ = 125^$\frac{1}{3}$ = 5. Test 5^3 = 125 ☺) $\frac{1}{3}$: 3reciprok.

$\mathbf{\log_3 243}$ = $\frac{\log 243}{\log 3}$ = $\frac{\ln 243}{\ln 3}$ forudsiger svaret på spørgsmålet <u>3^? = 243</u>, hvor totalen 243 opdeles i ens 3faktorer (ukendt eksponent). Log er en forkortelse for $\log_{10}$. Ln er en forkortelse for $\log_e$, hvor e = 2.7182818

(Afprøvning: 3^2=9 nej, 3^3=27 nej, … Forudsigelse: ? = $\frac{\ln 243}{\ln 3}$ = = 5. Test 3^5 = 243 ☺)

sin, cos og tan. En diagonal deler et rektangel i 2 ens retvinklede trekanter. Lad diagonalen have længden 1. sinA forudsiger længden af siden over for A(væggen), og cosA forudsiger siden hos A (gulvet). tanA forudsiger længden af væggen hvis gulvet er 1.
Omvendt forudsiger sin-1A vinklen over for væggen. cos-1A forudsiger vinklen hos gulvet, og tan-1A forudsiger vinklen over for væggen hvis gulvet er 1.



Opgaver. Besvar spørgsmålene ved afprøvning, forudsigelse og test (løs ligningerne)

1. 4+? = 20, 4*? = 20, 4^? = 20, ?^4 = 20 2. 5+? = 40, 5*? = 40, 5^? = 40, ?^5 = 40 3. 6+? = 80, 6*? = 80, 6^? = 80, ?^6 = 80 4. Fremstil selv nye ligninger med ’randMat(1,2)’	5. Indtegn på millimeterpapir en kvart cirkel med radius 10 cm. Indtegn forskellige retvinklede trekanter. Forudsig og test længden af væg og gulv. Forudsig og test vinklerne.

Ligninger, tilbageregning

En ligning (x+3=15) består af et start-tal, en beregning og et slut-tal. Enhver beregning kan vendes om så slut-tallet tilbage-regnes til start-tallet ved at udføre den omvendte beregning.

Tal kan overflyttes ved at skifte til omvendt regnetegn.

Bemærk ombytning: $2+3 = 3+2$, $2*3 = 3*2$, $2\text{^}3 \neq 3\text{^}2$

?+3 = 15	?*3 = 15	?^3 = 125	3^? = 243
x+3 = 15	x*3 = 15	x^3 = 125	3^x = 243
x = 15-3	$x = \frac{15}{3}$	$x = 125\text{^}\frac{1}{3}$	$x = \frac{\ln 243}{\ln 3}$
+ <-> -	* <-> /	eksp <-> rec	gr.tal <-> ln

En Ligning består af et start-tal, en beregning og et slut-tal, evt. i modsat rækkefølge: a+b = T, T = a+b.

x+3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som plusset med 3 giver 15?
x = 15-3	Forudsigelse: 15-3 er det tal, som plusset med 3 giver 15. Test: 3+(15-3) = 15
Regel	**Plus-tal overflyttes som minus-tal, og omvendt**

x*3 = 15	Spørgsmål: Hvad er det tal, som ganget med 3 giver 15?
$x = \frac{15}{3}$	Forudsigelse: $\frac{15}{3}$ er det tal, som ganget med 3 giver 15. Test: $3*\frac{15}{3} = 15$
Regel	**Gange-tal overflyttes som divisions-tal, og omvendt**

x^3 = 125	Spørgsmål: Hvad er det tal, som opløftet i 3de giver 15?
$x = 125\text{^}\frac{1}{3}$	Forudsigelse: $125\text{^}\frac{1}{3}$ er det tal, som opløftet i 3de giver 15. Test: $(125\text{^}\frac{1}{3})\text{^}3 = 125$
Regel	**Eksponent overflyttes som reciprokke eksponenter og omvendt**

3^x = 243	Spørgsmål: Hvad er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243?
$x = \frac{\ln 243}{\ln 3}$	Forudsigelse: $\frac{\ln 243}{\ln 3}$ er det antal gange, der skal ganges med 3 for at få 243. Test: $3\text{^}\frac{\ln 243}{\ln 3} = 243$
Regel	**Grund-tal overflyttes som logaritme, og omvendt**

Et blandet regnestykke indeholder flere regnestykker, men kan reduceres til et enkelt regnestykke ved at sætte en skjult parentes om det stærkeste regnestykke:

T = 2+3*4 = 2+(3*4) , T = 2+3^4 = 2+(3^4) , T = 2*3^4 = 2*(3^4) <u>Prioritet: 1. (), 2.^, 3. *, 4. +</u>

Formel-formular (lignings-skema) kan bruges til dokumentation af ligningsløsning

Her skrives det ukendte tal	c = ?	T = a+b*c	*Her skrives formlen*
Her skrives de kendte tal	a = 2		*Fra T-formel til c-formel, i hovedet eller med 'solve':*
	b = 3	T = a+(b*c)	*Fra blandet til enkelt regnestykke med skjult parentes*
	T = 14	T-a = b*c	*+ over flyttes som det modsatte, -*
		$\frac{(T-a)}{b} = c$	** over flyttes som det modsatte, /*
			Parentes om det regnestykke der var i forvejen
		$\frac{(14-2)}{3} = c$	*Tallene indsættes*
			Løsningen beregnes
		4 = c	
Her udføres eventuel test	Test	14 = 2+3*4	*Løsningen testes fordi vi har ændret en T-formel til en c-formel*
		14 = 14 ☺	

Alternativ1: 'solve(T = a+b*c,c)' giver 'c = $\frac{(T-a)}{b}$'. Hvorefter '$\frac{(T-a)}{b}$ | T = 14 and a = 2 and b = 3' giver 'c = 4'

Alternativ2: 'solve(14 = 2+3*c,c)' giver 'c = 4'

Ved modsat fortegn flyttes den ubekendte først:

c = ?	T = a-c
	T+c = a
	c = a-T

c = ?	$T = \frac{a}{c}$
	T*c = a
	$c = \frac{a}{T}$

Opgaver

Find de ukendte tal for formlen.
Opstil bagefter selv en ny tabel med randMat(1,3)

1. T = a+b*c	5. T = a-b*c
2. T = a+b/c	6. T = a-b/c
3. T = a*b^c	7. T = a/b^c
4. T = a+b^c	8. T = a-b^c

	T	b	a	c
1		1.5	12	20
2	60		12	20
3	60	1.5		20
4	60	1.5	12	

Formler forudsiger

En formel består af et regnestykke og det tal der udregnes.

En ligning er en formel med 1 ubekendt. En ligning kan løses.

En funktion er en formel med 2 ubekendte. En funktion kan tabellægges og graftegnes.

Indkøbs-formlen :
b kr + x kg á a kr/kg er totalt y kr:
b + x * a = y

Udbytte-formlen:
b kr. + a kr delt mellem x personer er totalt y kr:
b + a / x = y

En formel består af et regnestykke og det tal der udregnes.

En formel kan lagres i formelregneren under et selvvalgt navn:

y = b + a*x -> ind y = b + a/x -> udbyt

Formlen kan hentes frem ved at skrive dens navn eller ved at hente den på listen over variable, var-link.

En ligning er en formel med 1 ubekendt:

y = 10 + 2*3, eller 16 = b + 2*3, eller 16 = 10 + a*3, eller 16 = 10 + 2*x

En ligning løses ved at angive de kendte tal efter formlen og den lodrette 'forudsætnings-streg'.

'y = b + a*x | b=10 and a=2 and x=3' giver en løsning: y= 16

'y = b + a*x | y=16 and a=2 and x=3' giver en ligning 16= b+6, der løses ved brug af 'solve':

'solve(16= b+6,b)' giver en løsning b=10

Efter brug af 'solve' testes løsningen ved at indsætte alle kendte tal:

y = b + a*x | y=16 and b=10 and a=2 and x=3 giver 'true' (eller 'false' hvis der er en fejl)

Man kan også sætte en formel ind i en formel: 'y = b + a*x | a = c*x+d' giver 'y = c*x^2 + d*x + b'

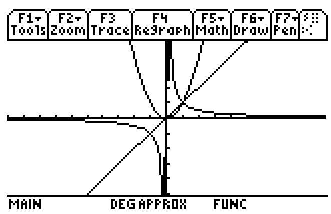
En funktion er en formel med 2 ubekendte:

y = b + 2*3, eller y = 10 + 2*x, eller 16 = b + 2*x, eller 16 = 10 + a*x

Normalformen af en funktion: Med 'solve' isoleres den ene ubekendte y, den uafhængige variable. Den anden ubekendte kaldes x, den afhængige variable. Normalformen indtastes i formelregnerens y-editor.

Funktion	Normalform	
y = b + 2*3	y = x + 6	(egentlig y = b+6)
y = 10 + 2*x	y = 10 + 2*x	
16 = b + 2*x	y = 16 – 2*x eller y = 8 - x/2	fundet ved 'solve' samt evt. 'expand'
16 = 10 + a*x	y = 6/x eller y = 6/x	som her er det samme.

Tabellægning af en funktion sker med formelregnerens 'table'.
Graftegning af en funktion sker med formelregnerens 'graph'.
Grafer vil ofte være linier (y = x), parabler (y = x^2) eller hyperbler (y = 1/x).
En funktion af to variable er en formel med 3 ubekendte:
y = b + 2*x, eller y = 10 + a*x, eller 16 = b + a*x
Normalformen af en funktion: Med 'solve' isoleres den ene ubekendte z, den uafhængige variable: De to andre ubekendte kaldes x og y, de afhængige variable.
Normalformen indtastes i formelregnerens y-editor.



Funktion	Normalform	
y = b + 2*x	z = y + 2*x	(egentlig y = b + 2*x)
y = 10 + a*x	z = 10 + y*x	
16 = b + a*x	z = 16 - y*x eller z = (16-y)/x	

Tabellægning af en funktion af to variable er ikke muligt på formelregneren. Graftegning af en funktion sker med formelregnerens 'graph' idet der via 'mode' først skiftes til 3D.

Opgaver. Løs ligningerne og tegn en graferne. Løs bogstavsligningerne på sidste side.

y =b+a*x	y	b	a	x
1		10	1.2	20
2	34		1.2	20
3	34	10		20
4	34	10	1.2	
5	34		1.2	
6	34			20
7		10	1.2	
8		10		20
9			1.2	20
10	34	10		
11		10		
12			1.2	

y =b+a/x	y	b	a	x
13	35	10	500	20
14	35		500	20
15	35	10		20
16	35	10	500	
17	35		500	
18	35			20
19		10	500	
20		10		20
21			500	20
22	35	10		
23		10		
24			500	

Tal og tal-lister

2357 = 2*10^3 + 3*10^2 + 5*10 + 7 34.67 = 3*10 + 4 + 6*10^-1 + 7*10^-2 345.72 = 3.457 * 10^2 = 3457.2 * 10^-1	Et 4-cifret tal er et polynomium bestående af 4 optællinger af styk, bundter, bundt-bundter, bundt-bundt-bundter En vektor er en tal-liste. En matrice er en vektor-liste

Et tal angiver resultatet af en optælling. Ved optælling tælles enkeltstyk, bundter, bundter af bundter osv.

T = 235 = 2 bundt-bundter + 3 bundter + 5 enkeltstyk = 2*10*10 + 3*10 + 5 = 2*10^2 + 3*10^1 + 5*10^0

T = 34.67 = 3 bundter + 4 enkeltstyk + 6 opdelte + 7 opdelte opdelte = 3*10^1 + 4*10^0 + 6*10^-1 + 7*10^-2

Et 10bundt kan opdeles i 10 enkeltdele. Ligeledes kan en enkeltdel betragtes som et 10bundt af 10 opdelte, hvor hver opdelt igen kan betragtes som et 10bundt af 10 opdelte osv.

Bemærk at 10^1 = EE1 = 10, 10^0 = 1, 10^-1 = $\frac{1}{10\text{^}1}$ = 0.1, 10^-2 = $\frac{1}{10\text{^}2}$ = 0.01 osv. (test på formelregner)

Andre bundtstørrelser. 6: T = 235 = 2*6^2+3*6+5 = 95 = 9*10+5. 2: 1011 = 1*2^3+0*2^2+1*2+1 = 11

Nogle tal kan betragtes som regnestykker: -5 = 0-5 , $\frac{3}{7}$ = 3/7 , 7% = $\frac{7}{100}$ = 0.07

Specielle tal.

π = 3.1416… = n*sin (180/n) for n stor: Overgrænse (grænseværdi) for omkredsen af et symmetrisk hegn med n kanter som er indskrevet i en cirkel med radius 1.

e = 2.7182818 = (1+1/n)^n for n stor: Overgrænse (grænseværdi) for rentes rente udbyttet. (100% pr år kan maksimalt blive til 171.82% ved at øge antallet af tilskrivninger).

(1 2) + (3 5) = (4 7) (1 2) * (3 5) = 1*3+2*5	$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1*5+2*6\\3*5+4*6\end{pmatrix}$	En vektor er en liste af tal skrevet vandret eller lodret. En matrix er et liste af vektorer med rækker og søjler.

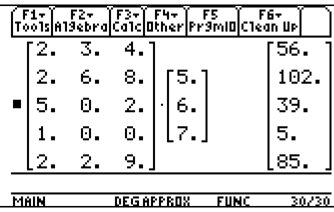
Eksempel. En forretning sælger appelsiner, bananer og citroner. Stykprisen er hhv. 5kr, 6kr og 7kr. På lageret haves hhv. 20stk, 30stk og 40stk:

Lagerstørrelse <u>L</u> = (20 30 40), Stykpriser: <u>P</u> = (5 6 7),

Lagerværdi v = <u>L</u>*<u>P</u> = (20 30 40)* $\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$ =20*5+30*6+40*7

En dag forekommer 5 salg: <u>S1</u> = (2 3 4), <u>S2</u> = (2 6 8), <u>S3</u> = (5 0 2), <u>S4</u> = (1 0 0), <u>S5</u> = (2 2 9)

Dagens fakturaer: <u>F</u> = <u>S</u>*<u>P</u> = $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\2 & 6 & 8\\5 & 0 & 2\\1 & 0 & 0\\2 & 2 & 9\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2*5+3*6+4*7\\2*5+6*6+8*7\\5*5+0*6+2*7\\1*5+0*6+0*7\\2*5+2*6+9*7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}56\\102\\39\\5\\85\end{pmatrix}$



Format: 5x3-matrix * 3x1-matrix = 5x1-matrix. Dvs. antal søjler i matricen skal være lig med antal rækker i vektoren.

Dagen efter forekommer salget S1 8 gange: 8*S1 = 8*(2 3 4) = (8*2 8*3 8*4) = (16 24 32)

På formelregneren indtastes vektorer og matricer i matrix-editoren.

Nye vektorer og matricer kan fremstilles med ’randMat(m,n)’

Opgaver

1. Udregn n*sin (180/n) for n =10^3, 10^4, 10^5, … 2. Udregn (1+1/n)^n for n =10^3, 10^4, 10^5, … 3. Vis rigtigheden af formelen for π 4. Vis rigtigheden af formelen for e 3. Find fem måder at skrive 23.45 på 4. 10-bundteren siger T = 234. Hvad tror 5-bundteren der bliver sagt? 5. En parameter er en konstant som kan være anderledes. Hvad er variabel, parameter og konstant i y=2+a*x?	6. 10-bundteren siger T = 234. Hvad siger 5-bundteren? 4-bundteren? 3-bundteren? 2-bundteren? 7. 50% pr år kan maksimalt blive til ?% ved at øge antallet af tilskrivninger 8. Lav eksemplet om til 2 varetyper. 9. Lav eksemplet om til 4 varetyper. 9. Hvilke type salg beskriver en enhedsmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

To ligninger med to ubekendte, tre ditto

To ligninger med to ubekendte kan løses almindeligt, grafisk eller med matricer	b kr + 5kg á a kr/kg = 25 b kr + 8kg á a kr/kg = 34	x + 5*y = 25 x + 8*y = 34	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

2 ligninger med 2 ubekendte: Formlen b kr + 5kg á a kr/kg = 25 indeholder 2 ubekendte og kan derfor ikke løses, men mindre vi kender et andet eksempel på samme formel, f.eks. b kr + 8kg á a kr/kg = 34.

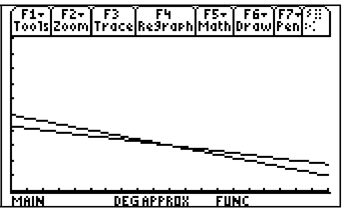
Opskrevet som ligningssystem	Opskrevet som matrix-ligning
x + 5*y = 25 x + 8*y = 34	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

Almindelig løsning findes ved hjælp af solve: 'solve **(**x + 5*y = 25 and x + 8*y = 34, x) giver x=10 og y=3.

Grafisk løsning findes ved at isolere y af ligningerne og indsatse dem i y- editoren.

'Solve(x + 5*y = 25, y)' giver 'y = (25-x)/5' , og 'Solve(x + 8*y = 34, y)' giver 'y = (34-x)/8'

Skæringspunktet kan bestemmes med 'graph, F5, Intersection' til x = 10 og y = 3.



Matrix-løsning findes ved at indtaste de to matricer i matrix-editoren som mv2 og mh2:

$\underline{V} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ?$	$\underline{\underline{mv2}} * \underline{V} = \underline{mh2}$
$\underline{\underline{mv2}} = \begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}$ $\underline{mh2} = \begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$	$\underline{V} = \underline{\underline{mv2}}$^-1 * $\underline{mv2}$ $\underline{V} = \begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix}$ ^-1 * $\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$ $\underline{V} = \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$
Test	$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 8\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\34\end{pmatrix}$

$\underline{V} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ?$	$\underline{\underline{mv3}} * \underline{V} = \underline{mh3}$
$\underline{\underline{mv3}} = \begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}$ $\underline{mh3} = \begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$	$\underline{V} = \underline{\underline{mv3}}$^-1 * $\underline{mv3}$ $\underline{V} = \begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix}$ ^-1 * $\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$ $\underline{V} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
Test	$\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-2\\16\end{pmatrix}$

3 ligninger med 3 ubekendte kan ikke løses grafisk, kun som almindelig løsning eller matrix-løsning:

Opskrevet som ligningssystem	Opskrevet som matrix-ligning
3*x + 5*y + 2*z = 19 x – z = -2 4*x – 3*y + 6*z = 16	$\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\1 & 0 & -1\\4 & -3 & 6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\-2\\16\end{pmatrix}$

En matrix-løsning findes ved at indtaste de to matricer i matrix-editoren som mv3 og mh3.

4 ligninger med 4 ubekendte, 5 ligninger med 5 ubekendte osv.: Ligesom 3 ligninger med 3 ubekendte

Ligningssystemer til træning kan fremstilles af tallene fra f.eks. 'randMat(3,3)' og 'randMat(3,1).

Opgaver. Løs ligningssystemerne

1. 4x - 1*y = -9 4x - 4*y = 0 2. 4x + 2*y = 16 5x - 3*y = -2 3. 7x + 4*y = -1 -3x + 2*y = 19 4. 2x - 5*y = 16 3x - 4*y = 17	5. -7*x - 3*y - 7*z = 3 -1*x - 5*y + 1*z = -13 9*y - 5*z = 36 6. 4*x + 3*y + 7*z = 81 5*x + 3*y + 1*z = 54 2*x + 9*y + 5*z = 57 7. 2*x + 3*y - 1*z = - 6 5*x + 3*y - 4*z = -15 2*x – 2*y + 5*z = 40	8. 2*x + 5*y - 1*z + 9t = 118 1*x + 1*y - 9*z - 5t = -88 - 3*y + 7*z + 5t = -51 -3*x + 5*y + 2*z - 5t = -10 9. -6*x - 1*y + 8*z + 8t = 129 -2*x + 2*y - 5*z + 7t = 60 8*x + 6*y + 3*z + 3t = -40 -7*x - 4*y - 8*z - 4t = 12

PerTal I

Styktal bærer 1 enhed. Pertal bærer 2 enheder, evt. som %. Pertal opstår ved dobbeltoptælling eller omtælling.	Per-tal SKAL omregnes til styktal før de plusses. (vægtet sum, vægtet gennemsnit, betinget sandsynlighed)

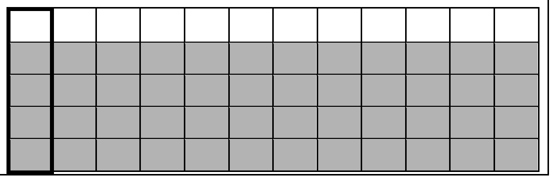
Optællingsformlen T = T/b *b bruges til at forudsige en optælling: 8 1ere optalt i 2ere er: 8=8/2 *2 = 4*2.

Dobbeltoptælling (proportionalitet) forekommer mange steder. Ved optælling af et vareparti viser det sig at 4kg svarer til 5kr, dvs. der er 4kg per 5 kr, eller 4kg/5kr, eller 4/5 kg/kr (eller 5kr/4kg). Spørgsmål: 60kg = ?kr og 60kr = ?kg

Metode 1, tallet optælles	60kg = 60/4 *4kg = 60/4 *5kr = 75kr	60kr = 60/5 *5kr = 60/5 *4kg = 48kg
Metode 2, enheden optælles	Kr = kr/kg *kg = 5/4 *60 = 75	Kg = kg/kr *kr = 4/5 *60 = 48

Procent

Figuren til højre kan optælles i felter eller i grå felter.
Vi ser at der er 4grå felter per 5 felter, dvs. 4per5 (4/5) felter er grå.
Hvor mange er det per 100 (%)?
100 = 100/5*5 = 100/5*4g = 80g , dvs. 4/5 = 80/100 = 80%
eller som procent-formel: a er p% af b: $\mathbf{\frac{a}{b} = p}$



Ved hjælp af 'solve' kan vi finde søster-formlerne til procent-formlen:

Søster-formler:	$p = \frac{a}{b}$	a = p*b (/b overflyttes som *b)	$b = \frac{a}{p}$ (/b ovf. som *b, *a ovf. som /a)

Eksempler

30kr er 40% af ?kr a kr er p% af b kr	30kr er ?% af 75kr a kr er p% af b kr	?kr er 40% af 75kr a kr er p% af b kr
$b=\frac{a}{p}=\frac{30}{0.40}=75$ eller 'solve($0.4=\frac{30}{b}$,b)' giver b=75	$p = \frac{a}{b} = \frac{30}{75} = 0.40 = 40\%$	a = p*b = 0.40*75 = 30

Rente

250kr + 8% = ?kr. Kr + % kan man ikke. Men 100%+8% = 108%, og 108% af 250kr = 1.08*250 = (1+0.08)*250 = 270
Rente-formlen: y = b*(1+r) , y: slut-tal, b: start-tal, r: rente, 1+r: fremskrivningsfaktor.

Søster-formler:	y = b*(1+r)	$b = \frac{y}{1+r}$	$r = \frac{y}{b} - 1$

Renten r% tillagt n gange: y = b*(1+r)*(1+r) *(1+r)* … = b*(1+r)^n = b*(1+SR), SR: samlet rente

Søster-formler:	y = b*(1+r)^n	$b = \frac{y}{(1+r)\text{^}n}$	$r = \frac{y}{b}\text{^}\frac{1}{n} - 1$	$n = \frac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(1+r)}$
Søster-formler:	1+SR = (1+r)^n		$r = (1+SR)\text{^}\frac{1}{n} - 1$	$n = \frac{\ln(1+SR)}{\ln(1+r)}$

5% tillagt 4gange giver altså SR = 1.05^4-1 = 0.216 = 21.6% = 5%*4 + 1.6% = simpel rente + rentes rente

Den samlede rente SR består derfor af to ting, den simple rente n*r og rentes rente RR: SR = n*r + RR

Opgaver

1. Massefylde = 1.23 kg/l. 7.5 kg = ? l, ? kg = 34 l
2. Molekylvægt = 16 g/mol. 234 g = ? mol. ? g = 34.5 mol
3. Koncentration = 2.4 mol/l. 34 mol = ? l. ? mol = 3.5 l
4. Pris = 3.6 kr/kg. 346 kr = ? kg. ? kr = 234 kg
5. Fart = 23.4 m/s. 34 m = ? s. ? m = 56 s
6. 20 er ?% af 30. ? er 20% af 30. 20 er 30% af ?.

7: Leje = 80 kr/dag. 200 kr = ? dage. ? kr = 40 dage
8: 40 kg = 60 l. 75 kg = ? l. ? kg = 200 l.
9: 40 kr = 82 dage. 75 kg = ? dage. ? kg = 200 dage.
10: 30 m = 20 s. 65 m = ? s. ? m = 800 s.
11: 60 J = 90 s. 55 J = ? s. ? J = 400 s.

12. Beregn de tomme felter, når y = b*(1+r)^n

	y	b	r	n	SR	n*r	RR
1		10	3.2%	20			
2	34		3.2%	20			
3	34	10		20			
4	34	10	3.2%				
5	34		3.2%		72%		
6	34			20		50%	
7		10	3.2%		68%		
8		10		20			12%
9	34		3.2%				23%

Lineær, eksponentiel, potentiel og opsparingsvækst

Lineær vækst:	+1 dag, +5 kr	y = b+a*x,	x:+1, y:+a	++ vækst
Eksponentiel vækst:	+1 dag, +5 %	y = b*a^x,	x:+1, y:+r%, a=1+r	+* vækst
Potentiel vækst:	+1 %, +5 %	y = b*x^a:	x: +1%, y: +a%	** vækst
Opsparingsvækst:	+1 dag, +5 % & + 5kr	y = a/r*SR:	x:+1, y:+r% & y:+a	++&*vækst

Lineær vækst forekommer ved køb eller leje:
b kr + x dage à 5 kr/dag er totalt T kr: b+5*x = T (+1 dag : +5 kr)

Eksponentiel vækst forekommer ved rentetilskrivning
b kr + x dage à 5 %/dag er totalt T kr: b*(1+0.05)^x = T (+1 dag : +5 %)

Potentiel vækst forekommer ved tekniske formler
Hvis bjælkens tykkelse x øges med 1% øges styrken T med 0.67 %: T = b*x^0.67 (+1 % : +0.67 %)

Søster-formler: Lineær vækst	y = b+a*x	b = y-a*x	$x = \frac{y-b}{a}$	$a = \frac{y-b}{x}$	$a = \frac{t1-t2}{x1-x2}$
Søster-formler: Eksponentiel vækst	y = b*a^x	$b = \frac{y}{a\text{^}x}$	$x = \frac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(a)}$	$a = (\frac{y}{b})\text{ ^ }\frac{1}{x}$	$a = (\frac{t1}{t2})\text{ ^ }\frac{1}{x1-x2}$
Søster-formler: Potentiel vækst	y = b*x^a	$b = \frac{y}{x\text{^}a}$	$x = (\frac{y}{b})\text{ ^ }\frac{1}{a}$	$a = \frac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(x)}$	$a = \frac{\ln(\frac{t1}{t2})}{\ln(\frac{x1}{x2})}$

x og y er variable, a og b er konstanter. a og b bestemmes af to eksempler hvor man kender x og y (eller t): t1=b+a*x1 og t2=b+a*x2. b isoleres af den første ligning og indsættes i den anden:
'Solve(t1=b+a*x1,b)' giver 'b=t1-a*x1', og 'solve(t2=b+a*x2 | b=t1-a*x1,a) giver $a = \frac{t2-t1}{x2-x1}$

<table>
<tr><th>Tabel</th><th>Lineær vækst</th><th>Eksponentiel vækst</th><th>Potentiel vækst</th></tr>
<tr>
<td><table><tr><td>x</td><td>y = t</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>9</td><td>?</td></tr><tr><td>?</td><td>12</td></tr></table></td>
<td>$a = \frac{t1-t2}{x1-x2} = 0.5$
b = y-a*x = 4
y = b+a*x = 8.5
$x = \frac{y-b}{a} = 16$</td>
<td>$a = (\frac{t1}{t2})\text{ ^ }\frac{1}{x1-x2} = 1.088$
$b = \frac{y}{a\text{^}x} = 4.226$
y = b*a^x = 9.009
$x = \frac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(a)} = 12.408$</td>
<td>$a = \frac{\ln(\frac{t1}{t2})}{\ln(\frac{x1}{x2})} = 0.306$
$b = \frac{y}{x\text{^}a} = 4.044$
y = b*x^a = 7.926
$x = (\frac{y}{b})\text{ ^ }\frac{1}{a} = 34.870$</td>
</tr>
</table>

a- og b-tallene kan også findes ved regression. Beregningerne kan også udføres med en formel-formular.

Resultatet kan også findes ved indtegning af hhv. lineær, eksponentiel og potentiel vækst på tekniske papir:
++ papir (millimeter-papir), +* papir(enkeltlogaritmisk-papir) og **papir ((dobbeltlogaritmisk-papir).

Ved eksponentiel vækst er fordoblingstiden (halveringstiden) konstant: $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1+r)}$.

Opsparingsvækst. På konto 1 indsættes 1 kr, på konto 2 alle rentebeløb fra konto 1 + renter af konto 2. Konto 2 udføres da opsparingsvækst da den modtager +r% + rkr. Slutopsparing er den samlede rente SR. Dvs. et indskud på r kr opsparer SR kr. Et indskud på a kr vil da opspare a/r gange så meget. Efter x terminer er der da opsparet y = a/r*SR, hvor samlet rente SR: 1+SR = (1+r)^x. Opsparingsvækst er en kombination af lineær og eksponentiel vækst.
En opsparing kan f.eks. bruges til at afbetale et lån G. Et låns løbetid x er da bestemt af formlen G*(1+r)^x = a/r*SR.

Opgaver. Forudsig svaret, og test svaret både med grafer på formelregneren og på teknisk papir

1. Hvad er billigst: 40kr+3kr/dag eller 60kr+2kr/dag?
2. Hvad er billigst: 60kr+4kr/dag eller 90kr+3kr/dag?
3. Hvem er rigest: 120kr-4kr/dag eller 80kr-2kr/dag?
4. Hvem er rigest: 160kr-5kr/dag eller 120kr-3kr/dag?
5. Hvem er rigest: 120kr+4%/dag eller 180kr+2%/dag?
6. Hvem er rigest: 120kr-4%/dag eller 80kr-2%/dag?
7. Hvor er mest: 120kg+10 kg/dag eller 150kg +3%/dag?
8. Hvor er mest: 80kg -2kg /dag eller 100kg -5%/dag?
9. 7. og 8. Kaldes Malthus' problem. Hvem var Malthus?
10. Hvad bøjer mest: 20m+3%/% eller 30m+2%/%
11. Hvad bøjer mest: 20m+0.3%/% eller 30m+0.2%/%
12. Lån 10000. Ydelse 500. Rente 3%. Løbetid = ?
13. Lån 10000. Ydelse = ?. Rente 3%. Løbetid = 3011.

Udfør test af søster-formlerne ved at indsætte dem i den oprindelige formel.

14. Beregn de tomme felter for alle fire vækstformer (b->r)

	y	b	a	x
1		10	1.2	20
2	34		1.2	20
3	34	10		20
4	34	10	1.2	

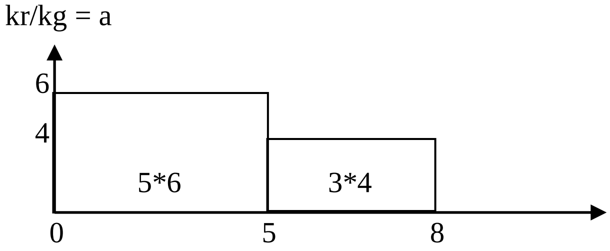
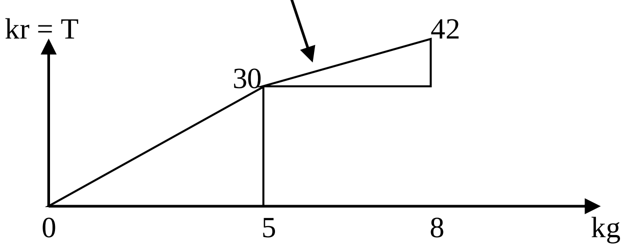
PerTal II

Pertal, stigning på total-kurven, findes ved differentiation Totaler, areal under pertals-kurven, findes ved integration	$a = 6\frac{kr}{kg} = \frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ T = 4 kr/kg*3kg + 6 kr/kg*5kg = $\sum$ kr/kg * kg = $\int$a*dx

Eksempel. Ved et indkøb er der rabat: De første 5 kg kan fås for 6kr/kg, og de næste 3 kg kan fås for 4 kr/kg.

T1 = 5kg á 6 kr/kg = 5*6 kr = 30 kr <u>T2 = 3kg á 4 kr/kg = 3*4 kr = 12 kr</u> T = 8kg á ? kr/kg = 42 kr , ?= $\frac{42kr}{8kg} = 5.25\frac{kr}{kg}$	T1 = 5kg á 3/5 = 5*3/5 kg = 3 kg *Forene brøker* <u>T2 = 3kg á 2/3 = 3*2/3 kg = 2 kg</u> T = 8kg á ? = 5 kg , ?= $\frac{5}{8}$ $\boxed{\text{dvs. } \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8}}$

Pertals-kurve hvoraf Totalen kan findes ved integration. **Total-kurve** hvoraf pertallet kan findes ved differentiation.

 y1(x) = when(x<0,0,when(x<5,6,when(x<8,4,0)))	Stigning = a = $\frac{42-30}{8-5} = \frac{12\ kr}{3\ kg} = 4\frac{kr}{kg} = \frac{T2-T1}{x2-x1} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$  y2(x) = when(x<0,0,when(x<5,6*x, when(x<8,30+4*(x-5),0)))
Del-totalerne er del-arealer under pertals kurven. Samlet total er samlet areal under pertals kurven .	Del-totalerne er del-tilvækster på Totalkurven. Per-tallet er stigningen (hældningen) på totalkurven.
Totalen kan forudsiges ved integralregning. Totalen, arealet under kurven y = 6 fra 2 til 5 er: '∫(6,x,0,5)' giver '$\int_0^5 6\,dx = 30$' Arealet under kurven y = 6 fra 2 til t: '∫(6,x,2,t)' giver ,$\int_2^t 6\,dx = 6*(t-2)$' Test ved at differentiere ,d(6*(t-2),t)' giver ,$\frac{d}{dt}(6*(t-2)) = 6$' ☺	Pertallet kan forudsiges ved differentialregning Pertal, stigning, hældning på kurven y = 6*x + b er: ,d(6*x+b,x)' giver ,$\frac{d}{dt}(6*x+b)) = 6$' Vi tester ved at integrere: '∫(6,x)' giver ∫(6 dx) = 6x' ☺ Konstanten b kan ikke testes. Vi bemærker at differentiere og integrere er modsatte regningsarter, der begge regner på regnestykker, hvor de andre regningsarter regner på tal. Differentiation kan overflyttes som integration Integration kan overflyttes som differentiation | $a = \frac{dT}{dx}$ $\int a\,dx = T$
Arealet under kurven y = 4x+3 fra 0 til x '∫(4x+3,x)' giver '∫(4x+3)dx' = 2x^2 + 3x Test ved at differentiere ,d(2x^2 + 3x, x)' giver ,$\frac{d}{dx}$(2x^2 + 3x) = 4x+3'	Pertal, stigning, hældning på kurven y = 6*x^2 + 5x + 7 er: ,d(6*x^2+5x+7,x)' giver ,$\frac{d}{dx}$(6*x^2+5x+7))=12x+5' Vi tester ved at integrere: '∫(12x+5,x)' giver ∫(12x+5) dx = 6*x^2 + 5x ' ☺ Konstanten 7 kan ikke testes.
Areal-beregning kan både give et areal-tal og en areal-formel	Pertals-beregning giver en pertals-formel, pertallet kan så beregnes af formlen 'd(6*x+b,x) | x=5', der giver 6

Rabatordning kan aftage jævnt i stedet for stykkevis og dermed blive en polynom-kurve i stedet for en trappekurve.
Forudsigelser af arealer og stigninger kan testes grafisk, se afsnit om polynom-kurver.

Opgaver

Gentag beregningerne ovenfor og test grafisk: 1. Rabat: 10kg for 7kr/kg, 8kg for 5kr/kg, 5kg for 3kr/kg 2. Rabat: kr/kg = y = 20 – 0.8*x 3. Rabat: kr/kg = y = 20 + 0.8*x – 0.05*x^2 4. Rabat: kr/kg = y = 20 - 2*x + 0.2*x^2 – 0.005*x^3 5. Som 1-4 blot med totalen i stedet for rabatten 6. Find en formel for d/dx af x^2, x^3, x^-1, x^½, x^n 7. Find en formel for ∫ af x^2, x^3, x^-1, x^½, x^n	Gentag beregningerne ovenfor og test grafisk: 8. Fart: 10s á 9m/s, 7s á 6 m/s, 6s á 4 m/s 9. Fart: m/s = y = 30 – 0.6*x 10. Fart: m/s = y = 40 + 0.4*x – 0.04*x^2 11. Fart: m/s = y = 50 - 4*x + 0.4*x^2 – 0.008*x^3 12. Som 8-11 blot med totalen i stedet for rabatten 13. Newtons problem: 5s á 4m/s voksende til 7m/s er ?m 14. Vis at ∫(y1(x),x) = y2(x), og at d(y2(x),x) = y1(x)

Polynom-kurver

1. grads polynomium fastlægger højde 2. grads polynomium fastlægger højde + stigning 3. grads polynomium højde + stigning + krumning 4. grads polynomium fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning	y = 5 y = 5 + 2*x y = 5 + 2*x + 0.3*x^2 y = 5 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3

Krumme polynom-kurver med højere grad end 1 har en række interessante punkter:

Vendepunkter, enten top-punkt (maximum) eller bund-punkt (minimum).

Skæringspunkter med x-akse (nulpunkter), med y-akse (start-punkt), og med andre kurver.

Skæringspunkter med vandrette linier (ligningsløsning), og med lodrette linier (værdier).

Krumningsskift, hvor krumningen skifter fortegn.

Tangent-punkt. En tangent er en ret linie, der er praktisk taget sammenfaldende med kurven omkring røringspunktet. En tangent viser hvordan kurven vil se ud hvis stigningen i punktet forbliver uændret.

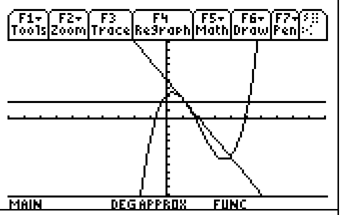
Hvis kurven er en pertals-kurve aflæses totalen som arealet under kurven, dvs. ved integration
Hvis kurven er en total-kurve, aflæses pertallet som stigningen på kurven, dvs. ved differentiation.
Krumningen fås ved at differentiere to gange. Ved positiv krumning krummes opad, ved negativ nedad.

Alle disse ting kan aflæses i formelregnerens grafiske vindue og forudsiges ved formelregning

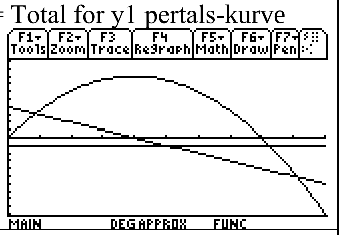
Eksempel: y = 0.5x^3-3x^2+2x+3

Skæringspunkt	Aflæst graf.	Forudsagt ved formel
Med y-akse	y=3	y1(x) | x=0
Med x-akse	x=-0.694 x=1.748 x=4.946	Solve(y1(x)=0,x)
Med y=2	x=-0.329 x=1.181 x=5.147	Solve(y1(x)=2,x)
Med x=3	y = -4.5	y1(x) | x=3
Med tangent 'Intersection'	(x,y)=(1,2.5) (x,y)=(4,-5)	Solve(y1(x)=y2(x),x)
Toppunkt 'Maximum'	x=0.367 y=3.355	Solve(d(y1(x),x)=0,x) d(d(y1(x),x),x) | x=0.3 er <0 fmax(y1(x),x) | 0<x and x<5
Bundpunkt 'Minimum'	x=3.633 y=-5.355	Solve(d(y1(x),x)=0,x) d(d(y1(x),x),x) | x=3.6 er >0 fmin(y1(x),x) | 0<x and x<5
Krumningsskift 'Inflection'	x=2.0 y=-1.0	solve(d(d(y1(x),x),x)=0,x)
Stigning i x=3	-4	d(y1(x),x) | x=3
Areal fra 2 til 5	-2	∫(y1(x),x,2,5)
Tangent i x=1	y=-2.5x+5	d(y1(x),x) | x=1->-2.5 y1(x) | x=1->2.5 solve(a = $\frac{t1-t}{x1-x}$,t) | x1=1 and t1=2.5 and a=-2.5

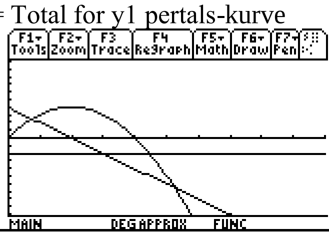
y1(x) = 0.5x^3-3x^2+2x+3
y2(x) = 2
y3(x) = -2.5x+5



y1(x) = 4 - 1x
y2(x) = d(y1(x),x) = pertal hvis y1 er en Total-kurve
y3(x) = ∫(y1(x),x,0,x) = Total for y1 pertals-kurve



y1(x) = 4 - 2x
y2(x) = d(y1(x),x) = pertal hvis y1 er en Total-kurve
y3(x) = ∫(y1(x),x,0,x) = Total for y1 pertals-kurve



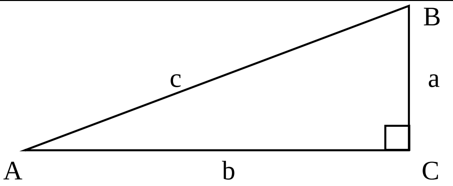
Opgaver

1. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = 0.7x^3-4x^2+3x+4. 2. Gentag ovenstående aflæsninger og forudsigelser med polynomiet y = -0.4x^3+2x^2-0.5x-3. 3. Fremstil selv polynom-formler ved brug af randPol(x,3). Eller ved brug af tabeller og regression. 4. Vis forskellige måder at vokse fra (0,0) til (1,1) ved hjælp af polynomier af 1. grad, 2. grad og 3. grad. 5. Dimensioner billigste kasse uden låg indeholdende 1liter 6. Dimensioner billigste rør uden låg indeholdende 1liter	7. Dimensioner billigste kasse uden låg el. bund indeh. 1 l. 8. Dimensioner billigste rør uden låg el. bund indeh. 1 l. 9. Dimensioner billigste kasse indeholdende 1liter, hvor lågets materiale er dobbelt så dyrt som resten. 10. Som 9, nu blot rør. 11. y1 er et polynomium af grad 0. Hvis y1 er en Totalkurve, hvordan ser pertals-kurven da ud? Hvis y1 er en pertals-kurve, , hvordan ser Totalkurven da ud? 12. Som 5 men med polynomium af grad 1. 13. Som 5 men med polynomium af grad 2. 14. Som 5 men med polynomium af grad 3.

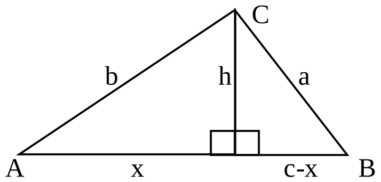
Geometri

Ethvert jordstykke kan opdeles i trekanter Enhver trekant kan opdeles i 2 retvinklede trekanter	To Græske formler: A+B+C = 180 a^2 + b^2 = c^2 Tre Arabiske formler: $\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\tan A = \frac{a}{b}$

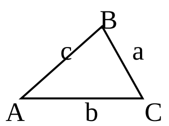
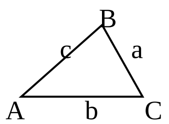
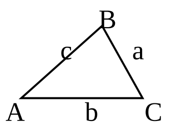
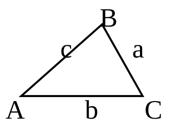
For at kunne tegne en trekant skal man kende 3 stykker (vinkler eller sider), og de sidste 3 stykker kan så forudsiges ved hjælp af 3 formler. Grækerne udviklede kun to formler, hvorfor trekantregning først kunne begynde da araberne kom med yderligere tre formler.

	Græske formler: A+B+C = 180 a^2 + b^2 = c^2 (Pyhtagoras) Arabiske formler: $\sin A = \frac{a}{c}$ (væg i % af c) $\cos A = \frac{b}{c}$ (gulv i % af c) $\tan A = \frac{a}{b}$

For at kunne regne på en ikke retvinklet trekant, opdeles den i to retvinklede trekanter ved hjælp af en højde h:

Hvis C er 90 gælder $\cos A = \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$ og $\cos B = \frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$ dvs. b^2 = xc og a^2 = c^2-xc dvs. a^2 +b^2 = c^2 (Pythagoras)	**Sinus-relationer:** Af venstre og højre trekant fås: $\sin A = \frac{h}{b}$ og $\sin B = \frac{h}{a}$ b*sinA = h og a*sinB = h b*sinA = a*sinB eller ved overflytning $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ Sidste del fra anden højde.	**Cosinus-relationer:** b^2 = h^2+x^2, dvs. h^2 = b^2-x^2 a^2 = h^2+(c-x)^2, dvs. h^2 = a^2-(c-x)^2 solve(a^2-(c-x)^2 = a^2-x^2,x) giver $x = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2*c}$ eller 2*c*x = -a^2+b^2+c^2 $\cos A = \frac{x}{b}$, dvs. b*cosA = x, som indsat giver a^2 = b^2+c^2 – 2*b*c*cosA. Tilsvarende fås b^2 = a^2+c^2 – 2*a*c*cosB og c^2 = b^2+a^2 – 2*b*a*cosC

De fire trekantstilfælde:

VSV: Vinkel Side Vinkel A=32 b=8 C=71 	Solve(32+B+71=180,B) B = 77	Solve($\frac{a}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 77}$,a) a = 4.351	Solve($\frac{c}{\sin 71} = \frac{8}{\sin 77}$,c) c = 7.763
SVS: Side Vinkel Side c=7 A=41 b=9 	Solve(a^2 = 9^2+7^2 – 2*9*7* cos41,a) A = 5.908	Solve(9^2 = 5.9^2+7^2 – 2*5.9 *7*cosB, B) | 0<B and B<180 B = 88.0	Solve(41+88+C=180,C) C = 51
SSS: Side Side Side a=5 b=8 c=6 	Solve(5^2 =8^2+6^2 – 2*8*6* cosA, A)) | 0<A and A<180 A = 38.6	Solve(8^2 = 5^2+6^2 – 2*5*6 *cosB, B)) | 0<B and B<180 B = 92.9	Solve(38.6+92.9+C=180,C) C = 48.5
VSS: Vinkel Side Side A=28 b=11 a=9 	Solve($\frac{11}{\sin B} = \frac{9}{\sin 28}$,B) | 0<B and B<180 B = 35.0 og B = 145.0	Solve(28+35+C=180,C) C = 117 Solve(28+145+C=180,C) C = 7	Solve($\frac{c}{\sin 117} = \frac{9}{\sin 28}$,c) c = 17.081 Solve($\frac{c}{\sin 7} = \frac{9}{\sin 28}$,c) c = 2.336

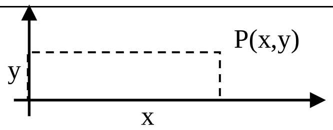
Opgaver: Brug formel-formular og husk at teste løsningen. Brug randMat(1,3) til at frembringe 3 tal til flere opgaver.

1. Beregn de tomme felter

	A	B	C	a	b	c
1	32	63		25		
2	47		69		47	
3	36			12	15	
4		67		14		23
5			34	18		25
6				12	15	19
7	37		90		12	
8			90	14	16	

2. Hvordan flyttes en ting hurtigst fra et punkt i et område til et punkt i et andet område, når vi bevæger sig med forskellig hastighed i de to områder?
3. Bestem højden af en høj ting (en flagstang) på to forskellige måder: Den lette, hvor vi kan komme helt hen til tingen, og den svære, hvor vi ikke kan.
4. Tip en plade 30 grader og indtegn en vej op, der højst må stige 20 grader (en 'hårnåle' -vej). Gentag øvelsen med andre gradtal. Hvor meget øges tyngdens træk i en bil, når vejens stigning øges med 10 grader?

Koordinatgeometri

Koordinatgeometri koordinerer geometri og algebra så ligninger kan oversættes til geometri og omvendt. Koordinatgeometri muliggør computergrafik.	

En geometrisk figur består af punkter. I koordinatgeometri indlægges en figur i et koordinatsystem, der forsyner hvert punkt med to koordinater x og y, hvor x er frem-tallet og y er op-tallet.

To punkter P(x1,t1) = (4,3) og Q(x2,t2) = (8,5) (på formelregneren bruges t i stedet for y af tekniske grunde)

Afstanden d mellem P og Q.	d=((x1-x2)^2+(t1-t2)^2)^0.5	'd = ((x1-x2)^2 + (t1-t2)^2)^0.5 $\mid$ t1=3 and t2=5 and x1=4 and x2=8' giver 'd=4.47'
Stigningen a mellem P og Q.	$a = \frac{t1-t2}{x1-x2}$	'a = $\frac{t1-t2}{x1-x2}$ $\mid$ t1=3 and t2=5 and x1=3 and x2=8' giver 'a=0.5'.
Liniens ligning mellem P og Q.	t = t1 – a(x1-x)	'solve(a = $\frac{t1-t}{x1-x}$,t) $\mid$ t1=3 and x1=4 and a=0.5' giver 't = 0.5*x + 1'
Midtpunktets koordinater	'(xm,ym) = ($\frac{x1+x2}{2}$, $\frac{t1+t2}{2}$)	'(xm,ym) = ($\frac{x1+x2}{2}$, $\frac{t1+t2}{2}$) $\mid$ t1=3 and t2=5 and x1=3 and x2=8' giver '(xm,ym) = (6,4)
Normalens stigning c	a*c = -1	'solve(a = $\frac{t1-t}{x1-x}$,t) $\mid$ t1=4 and x1=6 and a=-1/0.5' giver 't = -2*x + 16' (midtpunktsnormalens ligning)
Liniens vinkel v med vandret	tan(v) = a	'solve(tan(v)=a,v) $\mid$ a=0.5 and v<90 and –90<v' giver 'v=26.6'
Afstanden d af et punkt (x1,t1) = (3,8) over linien t = ax+b	$d = \frac{abs(t1-ax1-b)}{(1+a^2)^0.5}$	,d = $\frac{abs(t1-ax1-b)}{(1+a^2)^0.5}$ $\mid$ a=0.5 and b=1 and t1=8 and x1=2' giver 'd=5.367'
Cirklens ligning med centrum i (x1,t1) og radius r	(x-x1)^2 + (t-t1)^2 = r^2	,(x-x1)^2 + (t-t1)^2 = r^2 $\mid$ t1=4 and x1=6 and r=2' giver ,t^2 - 8t + x^2 - 12x + 52 = 4'
Skæringspunkt	Solve(lign1 and lign2,x)	Solve (x^2+t^2=1 and t=2x+1,x)' giver (x,t) = (-0.8, -0.6) og (x,y) = (0,1)

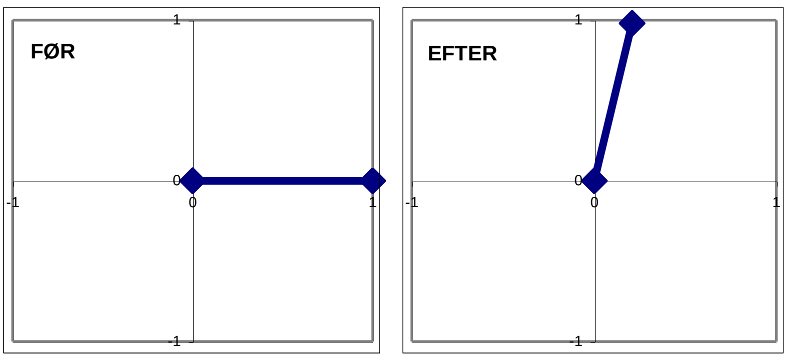
Forudsigelser kan testes ved at tegne de geometriske figurer på papir, eller på formelregnerens Cabri program.

Drejning. En vektor kan drejes v grader om sit startpunkt ved hjælp af en drejningsmatrix: $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$

Punktet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ drejes 78 grader til vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 78 & -\sin 78 \\ \sin 78 & \cos 78 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 78 \\ \sin 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.208 \\ 0.978 \end{pmatrix}$

Drejning

Vinkel:		Drejningsmatrix	
78		0,208	-0,978
		0,978	0,208
		Punkt 1	Punkt 2
Før	x	0	1
	y	0	0
Efter	x	0	0,208
	y	0	0,978



Dobbeltklik og rediger tallene i Excel.

Opgaver

1. Opdeling af land. Tegn et 10x10cm landstykke. Vælg hver en hovedstad evt. ved terningekast. Opdel landet mellem jer. Hvor meget får i hver? Brug testede forudsigelser. 2. Samme spil med 3 personer. Opstil en trekant ABC. Koordinaterne kan evt. findes ved hjælp af de to tal i 'randMat(1,2)'.	3.Opstil medianernes ligninger. Hvor skærer de hinanden? 4. Som 3, nu med højder. 5. Som 3 nu med vinkelhalveringslinier 6. Som 3, nu med midtnormaler. 7. Drej trekanten 60 grader. 8. Flyt trekanten 2 frem og 3 op. 9. Drej trekanten 30 grader og flyt den 3 tilbage og 4 ned.

Statistik

Uforudsigelige tal kan ikke forudsiges, men bagud-siges ved hjælp af statistik, som kan bruges til at forudsige nye tal med forskellige sandsynligheder.	Statistik bagud-siger det uforud-sigelige.

Nogle tal er forudsigelige, andre uforudsigelige. Uforudsigelige tal kaldes tilfældige tal, random-tal eller stokastiske tal. Stokastiske tal kan dog som regel 'bagud-siges' ved at opstille en statistik over deres hidtidige adfærd. I tabellen opstilles de observerede tal samt hvor hyppigt de enkelte tal er forekommet

Eksempel. Eksperimentet 'kast en mønt' gentages 5 gange, hvor krone er Gevinst og plat er Tab. Antal gevinstgange x er da et uforudsigeligt tal, som dog kan bagud-siges efter at have udført kasteserien f.eks. 40 gange. Tabellen indtastes som liste på formelregnerens statistik-editor. Frekvens = hyp/sum(hyp). KumFrek = cumsum(frek).

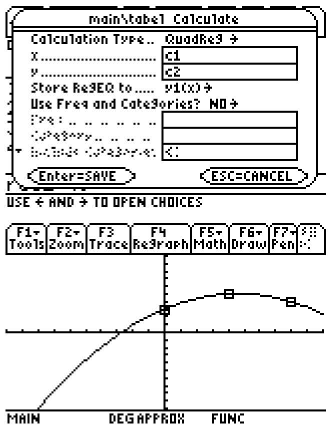
Obs.	Hyp.	Frek.	KumFrek.
0	2	.05	.050
1	5	.125	.175
2	9	.225	.400
3	12	.300	.700
4	8	.200	.900
5	4	.100	1.000

Man kan nu beregne forskellige tal ved hjælp af 1-var statistik:
Middeltal, gennemsnit, $m = 2.8$
Spredning, $s = 1.3$
Konfidens-interval = $m \pm 2*s = [0.2;5.4]$
1. kvartil = 2
Median = 3
3. kvartil = 4

Middeltal, gennemsnitstal, forventningstal: Hvis alle observationer var ens. Det er de ikke, de er spredt.
Spredning: Hvis alle spredninger var ens (i forhold til middeltallet).
Konfidens-interval: Omfatter ca. 95% af observationerne, kan bruges til at forudsige nye observationer med.
Ordnes observationerne i voksende rækkefølge vil
Median = den midterste observation, 1. (3.) kvartil = den midterste observation i 1. (2.) halvdel.
Et histogram viser de enkelte observationers hyppigheder eller frekvenser.
En sumkurve viser den kumulerede frekvens, hvoraf median og kvartiler kan aflæses.

Fra tabel til formel
En formel kan bruges til at opstille en tabel. Omvendt en formel også tilpasses til en tabel ved regression.
1punkts tabel fastlægger højde $y = 3$
2punkts tabel fastlægger højde + stigning $y = 3 + 2*x$
3punkts tabel fastlæger højde + stigning + krumning $y = 3 + 2*x + 0.3*x^2$
4punkts tabel fastlæger højde + stigning + krumning + modkrumning $y = 3 + 2*x + 0.7*x^2 – 0.2*x^3$
En tabel oprettes under matrixeditor som data-tabel med navnet 'tabel'. Formlen opstilles ved regression under F5 og lagres under y1(x).

1punkts tabel	x	y	y = 3
	0	3	
2punkts tabel	x	y	y = 0.5*x + 3
	0	3	fundet ved LinReg
	4	5	
3punkts tabel	x	y	y = -0.094*x^2 + 0.875*x + 3
	0	3	fundet ved QuadReg
	4	5	Find vendepunkt, tangent, areal og stigning
	8	4	Forudsig svaret og test grafisk
4punkts tabel	x	y	y = 0.030*x^3 -0.456*x^2 + 1.842*x + 3
	0	3	fundet ved CubicReg
	4	5	Find vendepunkter, tangent, areal og stigning
	8	4	Forudsig svaret og test grafisk
	10	6	



Opgaver

1. Udfør eksperimentet ovenfor 40 gange som '5*rand()'. Lav statistik.
2. I eksperimentet ovenfor find hyppighederne ved '9*rand()'
3. I eksperimentet ovenfor find hyppighederne ved nCr(5,0), nCr(5,1), nCr(5,2) osv.
4. Udfør de ovenstående beregninger.

5. Find et 3. gradspolynomium med 'randPol(x,3). Opstil en 4punkts tabel. Lav kubisk regression.
6. Som 5 med et 2. gradspolynomium.
7. Som 5 med et 1. gradspolynomium.
8. Som 5 med et 4. gradspolynomium.
9. Opstil polynomier af 0., 1., 2. og 3. grad ud fra den venstre tabel:.

x	y
2	8
5	6
7	9
12	5

x	y
2	4
5	6
8	7
12	9

10. Opstil polynomier af 0., 1., 2. og 3. grad ud fra den højre tabel.
10. Opstil to polynomier af 1.grad ud fra den højre tabel.

Sandsynlighedsregning

Gentages et spil med gevinstchance 25% 100 gange, vil der være størst sandsynlighed for at vinde de forventede 25 gange, men større sandsynlighed for at ramme lige ved siden af.	Sandsynlighedsregning forudsiger det uforudsigelige.

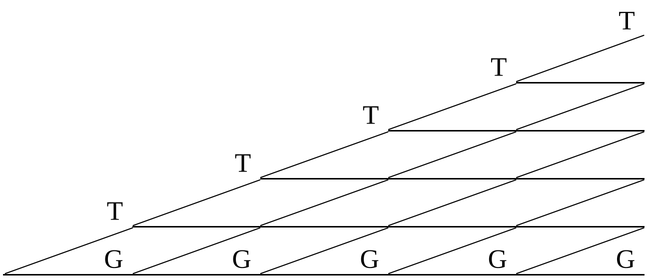
Eksempel1. Et spil med to udfald, Gevinst og Tab, gentages 5 gange. Teoretisk set har serien 6 mulige udfald, idet vi kan vinde 0, 1, 2, 3, 4, 5 gange. Der er kun 1 vej til at vinde 5 gange: GGGGG, der er 5 veje til at vinde 4 gange idet man kan tabe 1., 2., 3., 4. eller 5. gang: TGGGG, GTGGG, GGTGG, GGGTG, GGGGT.
Hvor mange veje er der til at få Gevinst 3 gange? Vi kan tælle efter eller forudsige resultatet:

Antal veje til 3 G ud af 5mulige = nCr(5,3) = 10 (nCr findes under Catalog).

De 6 udfald er lige mulige, men ikke lige sandsynlige. Den fordeling som fremkommer ved at gentage et 2-udfalds eksperiment mange gange kaldes en binomial-fordeling. Hvis gevinst-chancen p er 50% = 0.5, så er:

Sandsynligheden for at vinde netop 3 gange af 5: p(x=3) = BinomCdf(5,0.5,3,3) = 0.313 = 31.3%.
Sandsynligheden for at vinde 2, 3 eller 4 gange af 5: p(2≤x≤4) = BinomCdf(5,0.5,2,4) = 0.718 = 71.8%

Der kan nu opstilles en statistik over de forskellige samlede udfald, og af denne kan middelværdi og spredning beregnes. Disse tal kan dog forudsiges af formlerne m = n*p og s = √(n*p*(1-p)), hvor n er antal gentagelser og p er gevinstchancen.



x	nCr	Cdf
0 G	1	0.031
1 G	5	0.156
2 G	10	0.313
3 G	10	0.313
4 G	5	0.156
5 G	1	0.031

Eksempel2. Ved 30 gentagelser af et spil med gevinstchance 2/3 er middeltallet m= n*p = 30*2/3 = 20. Spredningen er s = √(n*p*(1-p)) = √(20*1/3) = 2.6. Konfidens-intervallet er da 20±2*2.6 = [14.8;25.2].
Der er altså ca. 95% chance for at der i næste spille-forløb vil være mellem 15 og 25 gevinstgange.
Hvis man kun vinder f.eks. 12 gange må man forkaste en evt. hypotese om at gevinstchancen er 2/3.

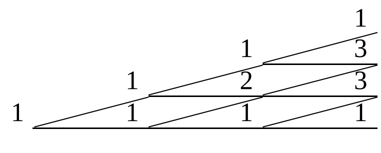
Normalfordeling

Gentages spillet mange gange, vil binomialfordelingen begynde at nærme sig til normalfordelingen, som ofte forekommer i naturen, hvor der som regel vil være en vis variation af f.eks. dyrs højde. I sådanne tilfælde kan den stokastiske variable x antage decimalværdier, evt. også negative værdier.

Eksempel3. Ved 20.000 gentagelser af et spil med 60% gevinstchance er middelværdi m = n*p = 20000*0.60 = 12000, og spredning s = √(n*p*(1-p)) = √(12000*0.40) = 69.3.
Binomialfordeling: P(0<x<12123) = BinomCdf(20000,0.60,0,12122) = 0.962 = 96.2%
Normalfordeling: P(0<x<12123) = NormCdf(0,12123,12000,69.3) = 0.962 = 96.2%

En normalfordeling vil have en retlinet sumkurve på et normalfordelingspapir.

Opgaver

1. Beskriv eksempel 1 med p = 30%? 2. Beskriv eksempel 1 med 6 gentagelser. 3. Beskriv eksempel 1 med 8 gentagelser. 4. 'when(rand()<0.7,1,0)' er et eksperiment med p=0.7. Sammenlagt med sig selv 5 gange svarer det til at udføre eksperimentet i eksempel 1. Udfør det 32 gange og lav statistik på resultatet. 5. Beskriv eksempel 1 med 200 gentagelser og forskellige p-tal. Sammenlign svar fra binomial- og normalfordeling. 6. En populations vægttal er normalfordelt med middel-værdi 13.2 og spredning 2.4. Hvad er sandsynligheden for højst 12.6? mindst 13.5? mellem 13.0 og 14.0?	7. En populations højdetal er normalfordelt med middel-værdi 132 og spredning 24. Hvad er sandsynligheden for højst 126? mindst 135? mellem 130 og 140? 8. Opstil nCr-tallene systematisk i ovenstående trekant ved at udbygge nedenstående trekant. Der fremkommer så en trekant med navnet Pascals trekant. Hvilke egenskaber har denne trekant? Hvem var Pascal? 

Bogstavregning

Lav en T-formel om til en a-formel med 'solve'. Test resultatet ved at gøre det modsatte bagefter.

	T		a	b	c
1	$T = a + b\cdot c$		$a = T - b\cdot c$	$b = \frac{T-a}{c}$	$c = \frac{T-a}{b}$
2	$T = a - b\cdot c$		$a = T + b\cdot c$	$b = \frac{a-T}{c}$	$c = \frac{a-T}{b}$
3	$T = a + \frac{b}{c}$		$a = T - \frac{b}{c}$	$b = (T-a) \cdot c$	$c = \frac{b}{T-a}$
4	$T = a - \frac{b}{c}$		$a = T + \frac{b}{c}$	$b = (a-T) \cdot c$	$c = \frac{b}{a-T}$
5	$T = (a + b)\cdot c$		$a = \frac{T}{c} - b$	$b = \frac{T}{c} - a$	$c = \frac{T}{a+b}$
6	$T = (a - b)\cdot c$		$a = \frac{T}{c} + b$	$b = a - \frac{T}{c}$	$c = \frac{T}{a-b}$
7	$T = \frac{a+b}{c}$		$a = T\cdot c - b$	$b = T\cdot c - a$	$c = \frac{a+b}{T}$
8	$T = \frac{a-b}{c}$		$a = T\cdot c + b$	$b = a - T\cdot c$	$c = \frac{a-b}{T}$
9	$T = \frac{a}{b+c}$		$a = T\cdot (b+c)$	$b = \frac{a}{T} - c$	$c = \frac{a}{T} - b$
10	$T = \frac{a}{b-c}$		$a = T\cdot (b-c)$	$b = \frac{a}{T} + c$	$c = b - \frac{a}{T}$
11	$T = \frac{a}{b} + c$		$a = (T-c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T-c}$	$c = T - \frac{a}{b}$
12	$T = \frac{a}{b} - c$		$a = (T+c) \cdot b$	$b = \frac{a}{T+c}$	$c = \frac{a}{b} - T$
13	$T = a \cdot b^{c}$		$a = \frac{T}{b^{c}}$	$b = \sqrt[c]{\frac{T}{a}}$	$c = \frac{\ln\left(\frac{T}{a}\right)}{\ln b}$
14	$T = \frac{a}{b^{c}}$		$a = T \cdot b^{c}$	$b = \sqrt[c]{\frac{a}{T}}$	$c = \frac{\ln\left(\frac{a}{T}\right)}{\ln b}$
15	$T = (a\cdot b)^{c}$		$a = \frac{\sqrt[c]{T}}{b}$	$b = \frac{\sqrt[c]{T}}{a}$	$c = \frac{\ln T}{\ln (a\cdot b)}$
16	$T = \left(\frac{a}{b}\right)^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} \cdot b$	$b = \frac{a}{\sqrt[c]{T}}$	$c = \frac{\ln T}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$
17	$T = (a + b)^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} - b$	$b = \sqrt[c]{T} - a$	$c = \frac{\ln T}{\ln (a+b)}$
18	$T = (a - b)^{c}$		$a = \sqrt[c]{T} + b$	$b = a - \sqrt[c]{T}$	$c = \frac{\ln T}{\ln (a-b)}$
19	$T = a + b^{c}$		$a = T - b^{c}$	$b = \sqrt[c]{T-a}$	$c = \frac{\ln (T-a)}{\ln b}$
20	$T = a - b^{c}$		$a = T + b^{c}$	$b = \sqrt[c]{a-T}$	$c = \frac{\ln (a-T)}{\ln b}$
21	$T = a^{(b+c)}$		$a = \sqrt[(b+c)]{T}$	$b = \frac{\ln T}{\ln a} - c$	$c = \frac{\ln T}{\ln a} - b$
22	$T = a^{(b-c)}$		$a = \sqrt[(b-c)]{T}$	$b = \frac{\ln T}{\ln a} + c$	$c = b - \frac{\ln T}{\ln a}$

Faktiske & fiktive tal

I statistiske tabeller findes eksempler på tal, der ændres med tiden, f.eks. forskellige beløbsstørrelser. Den samlede vækst i perioden vil være et faktisk tal, dvs. sandt. Den gennemsnitlige vækst i perioden vil derimod være et fiktivt tal, dvs. ikke nødvendigvis sandt. Men det vil kunne bruges som *antagelse* i en fremskrivning, en prognose om hvordan fremtiden kan se ud: 'Hvis væksten fortsætter uændret, hvad vil der så ske?'
Så prognosetal er fiktive, og bør derfor suppleres med prognosetal byggende på alternative antagelser, scenarier: 'Hvad nu hvis væksten i stedet var …?'
Prognoser kan beregnes i regneskemaer eller indtegnes som rette linier på millimeterpapir eller på enkeltlogaritmisk papir.

x	år	formue = y
	?	130000
9	2009	?
4	2004	102191
0	2000	88851 = b
	+1	*+a* *+r%*

		Fortid: Faktiske tal		*Fremtid: Fiktive prognosetal*	
År efter 2000	*x*	*0*	*4*	*9*	*?*
Årstal	**år**	2000	2004	2009	?
Krone-tal	**y**	88 851	102 191	?	130 000

Konstant tilvækst: Lineær vækst

Gennemsnitlig årlig tilvækst a for kronetallet y

$a = ?$	$\mathbf{y = b+(a\cdot x)}$
$y = 102191$ $b = 88851$ $x = 4$	$y-b = a\cdot x$ $\frac{(y-b)}{x} = a$ $\frac{(102191-88851)}{4} = a$ $\mathbf{3335 = a}$

Prognose for kronetallet y i 2009

$y=?$	$\mathbf{y = b+a\cdot x}$
$b = 88851$ $a = 3335$ $x = 9$	$y = 88851+3335\cdot 9$ $\mathbf{y = 118866}$

Prognose for hvornår kronetallet y bliver 130000

$x = ?$	$\mathbf{y = b+(a\cdot x)}$
$y = 130000$ $b = 88851$ $a = 3335$	$y-b = a\cdot x$ $\frac{(y-b)}{a} = x$ $\frac{(130000-88851)}{3335} = x$ $\mathbf{12.3 = x}$ **dvs. mellem 2012 og 2013**

Find en ligning (forskrift) for kronetallet y

$y = ?$	$\mathbf{y = b+a\cdot x}$
$b = 88851$ $a = 3335$	$\mathbf{y = 88851 + 3335\cdot x}$

Konstant vækstprocent: Eksponentiel vækst

Gennemsnitlig årlig vækstprocent r for kronetallet y

$r = ?$	$\mathbf{y = b\cdot(1+r)^x}$
$y = 102191$ $b = 88851$ $x = 4$ Fordoblingstid: $T = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$	$\frac{y}{b} = (1+r)^x$ $(\frac{y}{b})\wedge(\frac{1}{x}) = 1+r$ $(\frac{102191}{88851})\wedge(\frac{1}{4})-1 = r$ $0.036 = r$ $\mathbf{3.6\% = r}$ $\mathbf{T = \frac{\ln 2}{\ln 1.036} = 19.6}$

Prognose for kronetallet y i 2009

$y=?$	$\mathbf{y = b\cdot(1+r)^x}$
$b = 88851$ $r = 3.6\% = 0.036$ $x = 9$	$y = 88851\cdot 1.036^9$ $\mathbf{y = 122152}$

Prognose for hvornår kronetallet y bliver 130000

$x = ?$	$\mathbf{y = b\cdot(1+r)^x}$
$y = 130000$ $b = 88851$ $r = 3.6\% = 0.036$	$\frac{y}{b} = (1+r)^x$ $\frac{\ln(\frac{y}{b})}{\ln(1+r)} = x$ $\frac{\ln(\frac{130000}{88851})}{\ln 1.036} = x$ $\mathbf{10.8 = x}$ **dvs. mellem 2010 og 2011**

Find en ligning (forskrift) for kronetallet y

$y = ?$	$\mathbf{y = b\cdot(1+r)^x}$
$b = 88851$ $r = 3.6\% = 0.036$	$\mathbf{y = 88851 \cdot 1.036^x}$

Prognoseregning

		Tabel		*Prognose*			*Svar: Lineær*		*Eksponentiel*		
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*15*	*12*	*13.2*	
1	**år**	*1978*	*1983*	*1990*	*?*		1990	**1993**	1990	**1991.2**	
	y	120	140	?	180	y=?	**168**	180	**174**	180	
							y=120+4·x		y=120·1.031^x		T = 22.7
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*32*	*12*	*25.5*	
2	**år**	*1980*	*1984*	*1992*	*?*		1992	**2012**	1992	**2005.5**	
	y	240	260	?	400	y=?	**300**	400	**305**	400	
							y=240+5·x		y=240·1.02^x		T = 35.0
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*14*	*15*	*14*	*19.4*	
3	**år**	*1985*	*1990*	*1999*	*?*		1999	**2000**	1999	**2004.4**	
	y	170	140	?	80	y=?	**86**	80	**99**	80	
							y=170-6·x		y=170·0.962^x		T = -17.9
	x	*0*	*?*	*?*	*?*		*12*	*22*	*12*	*10.3*	
4	**år**	*1978*	*1982*	*1990*	*?*		1990	**2000**	1990	**1988.3**	
	y	260	210	?	150	y=?	**200**	150	**137**	150	
							y=260-5·x		y=260·0.948^x		T = -13.0

5 En vare kostede 320 kr. i 1987 og 460 kr. i 1994.
Hvor mange kroner er varen steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige tilvækst holder sig konstant:
Hvad er da prisen år 1992? Hvornår vil prisen da være 400?

5	*4*	*5*	*4.3*	
1992	**1991**	1992	**1991.3**	
420	400	**415**	400	
y=320+20·x		y=320·1.053^x		T = 13.4

6 En medlemstal var 520 i 1987 og 400 i 1995.
Hvor meget er medlemstallet steget med i alt og pr. år?
Hvis den gns. årlige tilvækst holder sig konstant:
Hvad er da tallet år 1990? Hvornår vil tallet da være 130?

3	*26*	*3*	*42.6*	
1990	**2013**	1990	**2029.6**	
475	130	**472**	150	
y=520-15·x		y=520·0.968^x		T = -21.1

Råolie i 1000 tons

7. Prognosetal		1985	1988	1989	1990	1991	1992
lineær vækst		**2892**			**5994**		
gns. årlig tilvækst 85-90							
Faktiske tal							
Afvigelse i pct.							

8. Prognosetal		1985	1988	1989	1990	1991	1992
eksponentiel vækst		**2892**			**5994**		
gns. årlig vækstpct. 85-90							
Faktiske tal							
Afvigelse i pct.							

SVAR

Råolie i 1000 tons

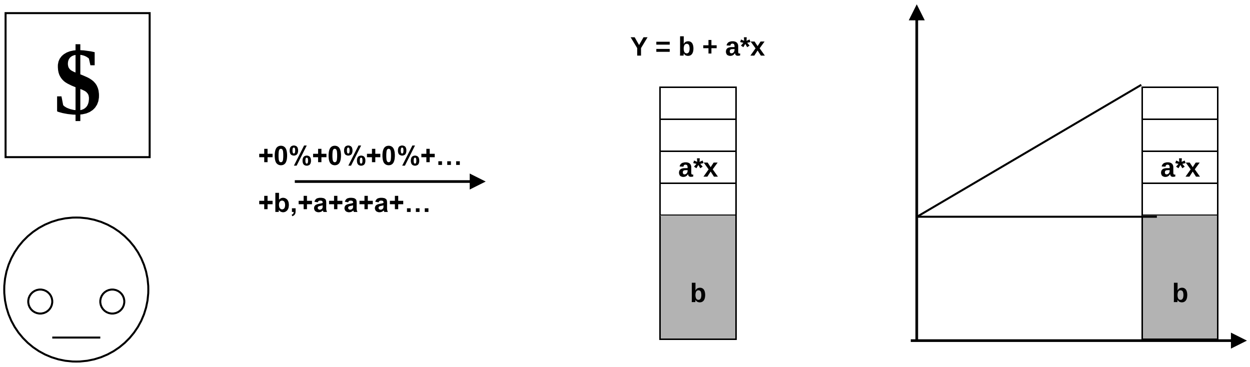
Prognosetal		1985	1988	1989	1990	1991	1992
lineær vækst		**2892**	4753	5374	**5994**	6614	7235
gns. årlig tilvækst 85-90	620,4						
Faktiske tal		2892	4732	5531	5994	6993	7756
Afvigelse i pct.		0,0%	0,4%	-2,8%	0,0%	-5,4%	-6,7%

Prognosetal		1985	1988	1989	1990	1991	1992
eksponentiel vækst		**2892**	4478	5181	**5994**	6935	8023
gns. årlig vækstpct. 85-90	15,7%						
Faktiske tal		2892	4732	5531	5994	6993	7756
Afvigelse i pct.		0,0%	-5,4%	-6,3%	0,0%	-0,8%	3,4%

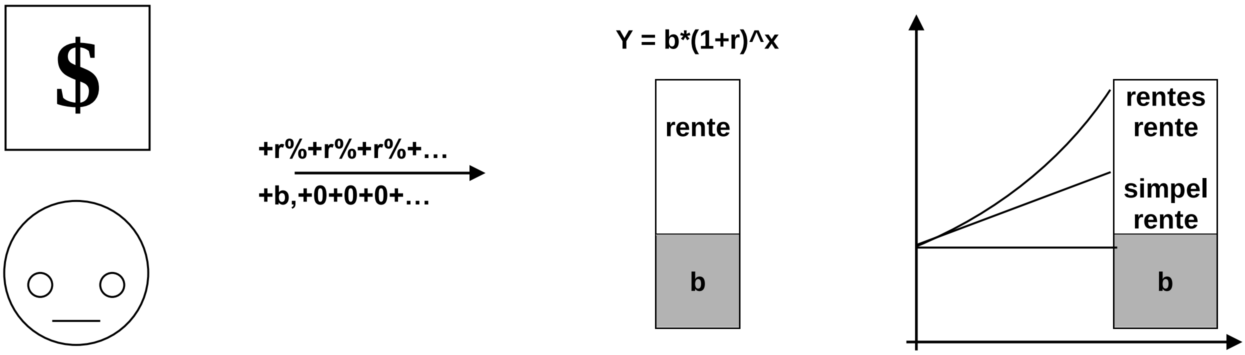
De fire opsparingsformer

I programmet PowerPoint eller Excel kan man vise de fire opsparingsformer:

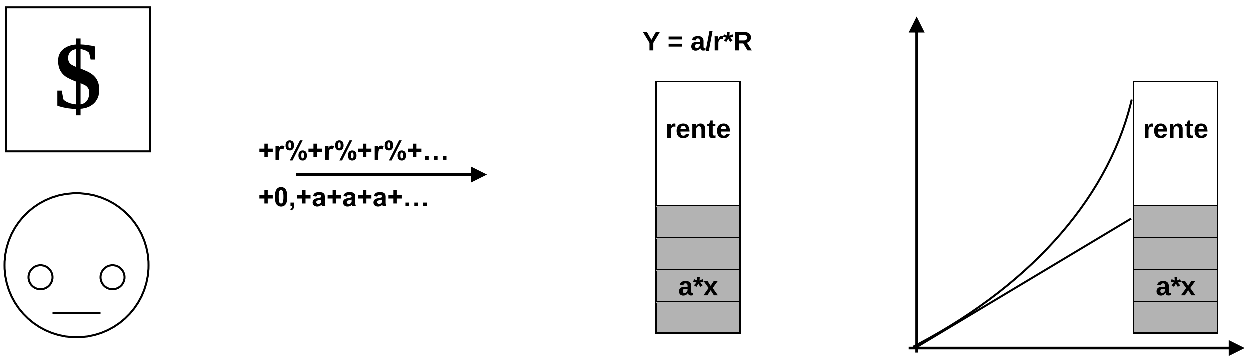
1. Rentefri opsparing: Lineær vækst, PLUS-vækst



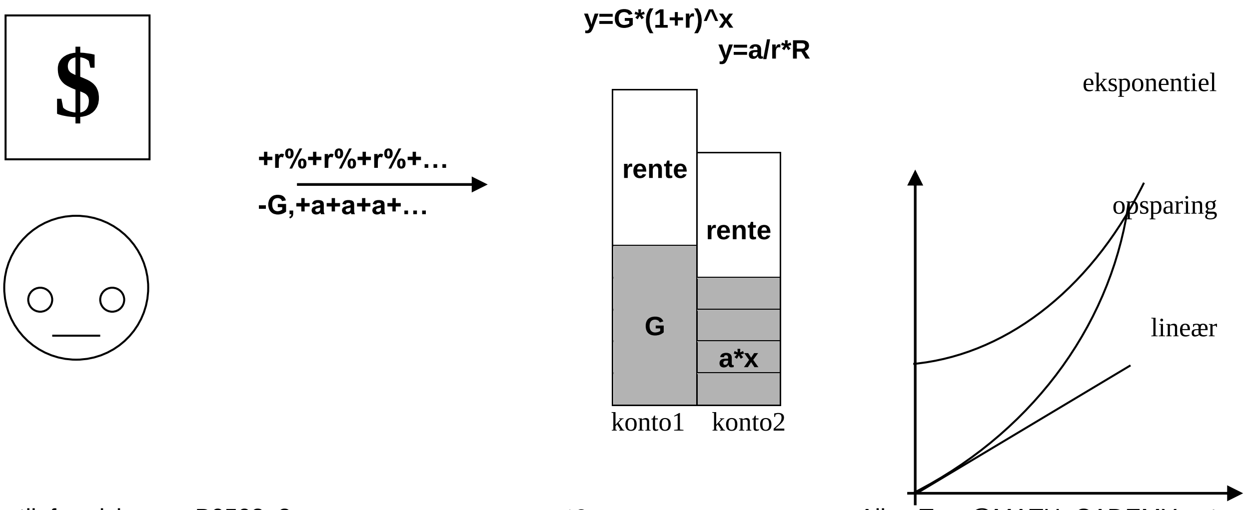
2. Indskudsfri opsparing: Eksponentiel vækst, GANGE-vækst



3. Opsparing uden startbeløb: Opsparings-vækst, PLUS&GANGE-vækst



4. Opsparing med negativt startbeløb: Gældsafvikling, PLUS&GANGE-vækst

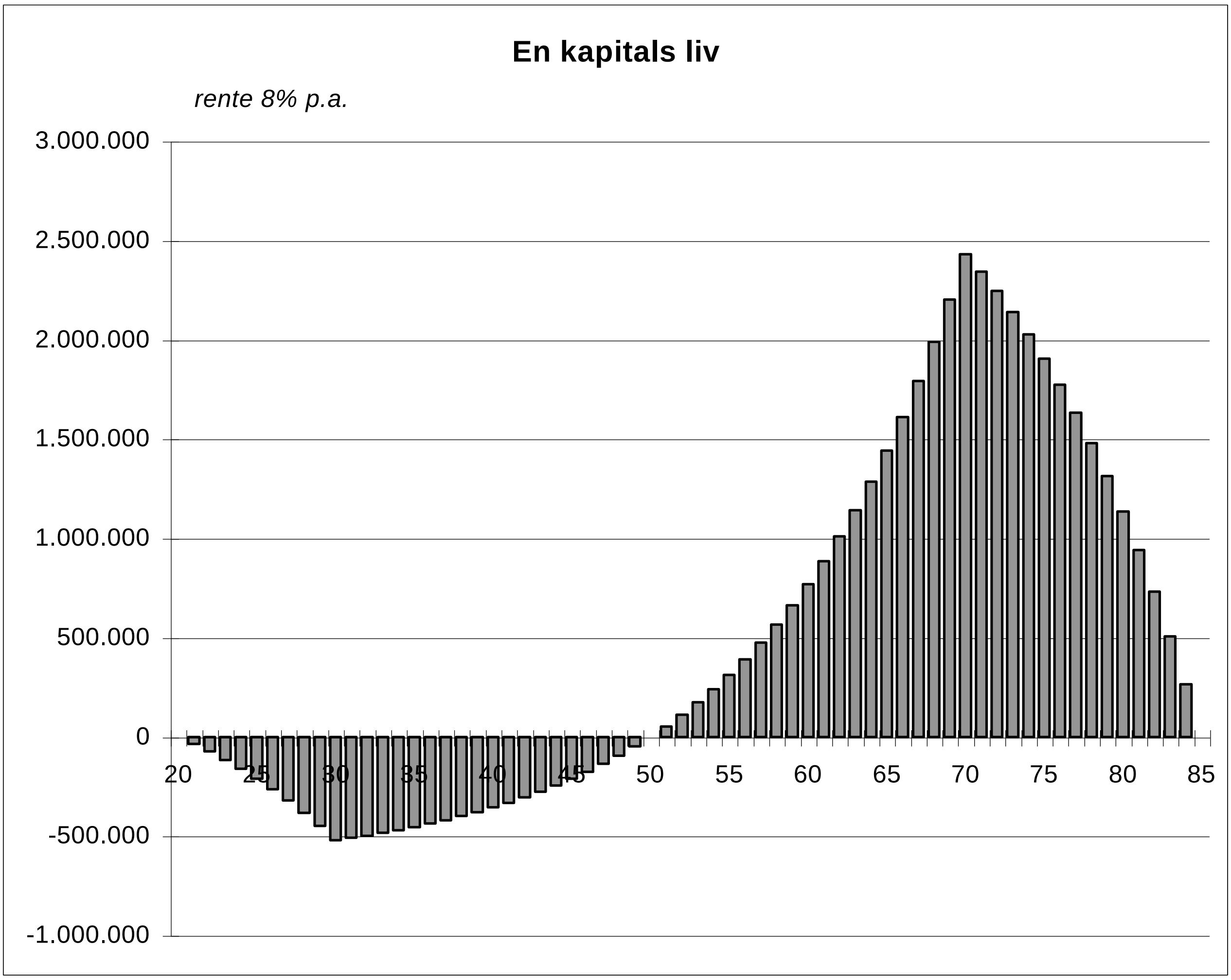


En kapitals liv

I løbet af sin levetid vil en persons kapitalforhold ofte ændre sig.
I det nedenstående eksempel er livet opdelt i fire epoker:

1. 20-30 år: Studielån, hvor der lånes kr. 36.000 per år i 10 år.
2. 30-50: Gældsafvikling, hvor studiegælden afvikles ved at betale kr. 53.000 per år i 20 år.
3. 50-70: Formueopbygning, hvor en formue opbygges ved at vedblive med at indbetale kr. 53.000 per år i 20 år
4. 70-85: Pension, hvor formue afvikles ved at udbetale kr. 284.000 per år i 15 år.

I eksemplet er regnet med en rente på 8% per år.
Dobbeltklik på figuren og rediger renten.



Rentes rente tabel

På måned0 indsættes kr.1 på konto0. På måned1 bliver kontoens beløb stående, og dens rente overføres til den næste konto i rækken. I måned 4 har k0 indestående, k1: indestående + rente af k0m3, k2: indestående + rente af k1m3, osv. Eksemplet viser de forskellige konti i tilfældet rente = 100%. Hvad hedder den fremkomne tabel?
Lav en tilsvarende eksempel med rente = 50%.

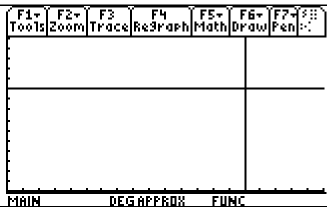
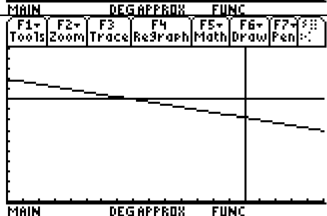
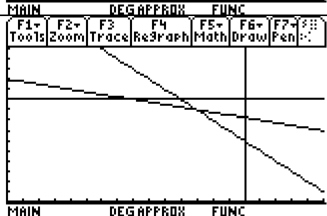
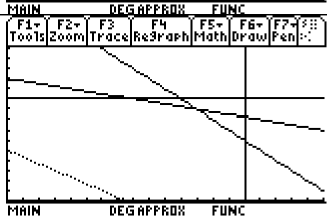
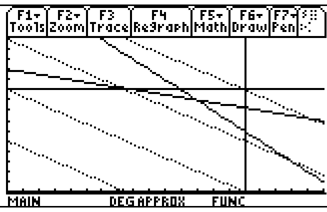
	m0	m1	m2	m3	m4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
K0	1	1	1	1	1						
K1		1	1+1 = 2	2+1 = 3	3+1 = 4						
K2			1	1+2 = 3	3+3 = 6						
K3				1	1+3 = 4						
K4					1						
K5											
K6											
K7											
K8											
K9											
K10											

Lineær programmering

Konstante pertal giver lineære totaler med parallelle niveaulinier. Den optimale findes ved begrænsningspolygonens hjørner.	Et polygonhjørne findes ved at løse n ligninger med n ubekendte.

Lineær programmering bruges til at optimere et bestemt tal (at maksimere overskuds-tallet, at minimere omkostnings-tallet osv.) inden for en række begrænsninger på andre tal, f.eks. råstoffer, kapital og arbejde.

Eksempel. Fra en markedsbod sælges øl og vand. Råstofferne er her øl og vand, kapitalen er budgettet og salgsboden, og arbejdskraften er sælgeren.

Virkelighed	Ligninger	Grafik
Antal kasser vand Antal kasser øl	x y	y øl x vand
Begrænsning på råstoffer: Boden kan højst indeholde Højst 15 kasser vand Højst 10 kasser øl	$0 \le x \le 15$ $0 \le y \le 10$	
Begrænsning på kapital: Indkøbspris: 25 kr. pr. kasse vand 100 kr. pr. kasse øl Højst 1200 kr. kan investeres.	$25*x + 100*y \le 1200$ $(y \le -\frac{1}{4}*x + 12)$	
Begrænsning på arbejde: I åbningstiden kan sælgeren højst nå at sælge 21 kasser.	$x + y \le 21$ $(y \le -x + 21)$	
Overskud til dækning af faste omkostninger (leje) og fortjeneste (dækningsbidrag D): Kr. 80/120 pr. kasse vand/øl.	$D = 80*x + 120*y$ $y = -\frac{2}{3}*x + \frac{D}{120}$ N0: D = 0: $y = -\frac{2}{3}*x$ N600: D = 600: $y = -\frac{2}{3}*x + 5$	
Løsning: Der skal indkøbes 12 kasser vand og 9 kasser øl. Dækningsbidraget bliver da D = 2040 kr.	'Solve($-\frac{1}{4}$*x+12 = -x+21,x)'giver x= 12 'y =-x + 21|x=12' giver y = 9 D = 80*x + 120*y | x=12 and y = 9' giver D = 2040	

Begrænsninger giver grafisk en polygon (mangekant). Niveaulinierne er parallelle da dækningsbidraget D kun har betydning for skæringen med y-aksen. At øge eller formindske D svare altså til at parallelforskyde niveaulinien hen over polygonen. Den optimale værdi fås da hvor en niveaulinie forlader (tangerer) polygonen, hvilket altid vil ske i et (eller to) hjørner. Man kan derfor forudsige den optimale situation ved at beregne alle hjørnepunkter (n ligninger med n ubekendte), samt D's værdi i disse (simplex-metoden). Denne metode bruges hvis antallet af variable er større end 2.

Opgaver. Find Dmax (1,3) og Dmin(2,4,5)

1. $4x+2y \le 60$ $6x+2y \le 72$ $0 \le x \le 10$ $0 \le y \le 8$ $D = 30x+40y$	2. $2x+2y \ge 20$ $6x+2y \ge 18$ $0 \le x$ $0 \le y$ $D = 20x+40y$	3. $4x+2y+5z \le 200$ $6x+2y+3z \le 720$ $0 \le x \le 40$ $0 \le y \le 80$ $0 \le z \le 30$ $D = 10x+20y+30z$	4. $2x+3y+4z \ge 60$ $5x+4y+3z \ge 88$ $0 \le x$ $0 \le y$ $0 \le z$ $D = 25x+50y+30z$	5. $2x+3y+4z+2t \le 600$ $5x+4y+3z+2t \le 400$ $0 \le x \le 50$ $0 \le y \le 80$ $0 \le z \le 30$ $0 \le t \le 60$ $D = 25x+50y+30z+10t$	5. $2x+3y+4z+2t \ge 60$ $5x+4y+3z+2t \ge 88$ $0 \le x$ $0 \le y$ $0 \le z$ $0 \le t$ $D = 25x+50y+30z+10t$

Blandingsregning

1. A klassen omfatter 20 elever, B klassen 30 elever. 60% af A klassen er piger. 20% af B klassen er piger. Hvor mange procent af begge klasser er piger? Hvor mange procent af pigerne kommer fra klasse A?

2. På en arbejdsplads er der 120 medarbejdere, hvoraf 80 er kvinder. 82% af kvinderne ryger. 36% af mændene ryger. Hvor mange procent af medarbejderne er rygere? Hvor mange procent af rygerne er kvinder?

3. I nord, syd, øst og vestkommunen bor henholdsvis 500, 700, 300 og 2000 indbyggere. Tilhængerne af et forslag udgør hhv. 45%, 68%, 82% og 39%. Hvor mange procent af kommunens indbyggere er tilhængere? Hvor mange procent af tilhængerne kommer fra vestkommunen?

4. Peter har fraværsprocenter på hhv. 12%, 8%, 0% og 30% i fagene dansk, engelsk, historie og matematik. Der har været afholdt hhv. 30, 30, 20 og 50 timer. Hvad er Peters samlede fraværsprocent i alle fag under et? Hvor mange procent af fraværstimerne kommer fra engelsk?

5. Til fabrikation af en vare indgår fem råstoffer i forholdet 2:3:8:4:12. Prisstigningerne på råstofferne udgør hhv. 12%, 36%, -15%, 116% og 8%. Hvad er den gennemsnitlige prisstigning for alle råstoffer under et. Hvordan fordeler prisstigningerne sig på de enkelte råstofgrupper?

6. Else har investeret 20.000 kr. i 6% obligationer, 60.000 kr. i 7% obligationer, 120.000 kr. i 8% obligationer og 40.000 kr. i 9% obligationer. Hvad er den gennemsnitlige rente af Elses investering?

7. Ole købte aktier i fire omgange: 40.000 kr. til kurs 60, 70.000 kr. til kurs 80, 30.000 kr. til kurs 50 og 90.000 kr. til kurs 70. Hvad er den gennemsnitlige kurs for den samlede aktiebeholdning?

8. Nina blander tre partier te i vægt forholdet 7:5:3. Priserne er hhv. 40 kr/kg, 50 kr/kg og 70 kr/kg. Hvad koster blandingen?

9. Hans spiser et stykke smørrebrød. Rugbrød, smør, medister og rødkål vejer hhv. 20g, 3g, 52g og 18g. Energiindholdet er henholdsvis 120 J/g, 560 J/g, 820 J/g og 230 J/g. Hvad er det gennemsnitlige energiindhold af smørrebrødet?

10. Frede har en markedsbod. I 12 dage har han tjent 2500 kr/dag, i 20 dage har han tjent 3000 kr/dag og i 15 dage har han tjent 5000 kr/dag. Hvad har Frede tjent i gennemsnit pr. dag?

11. Martin kører 2 timer med en gennemsnitshastighed på 40 km/t, 3 timer med en gennemsnitshastighed på 60 km/t, 5 timer med en gennemsnitshastighed på 80 km/t. Hvad er Martins gennemsnitshastighed?

12. Martine kører 200 km med en gennemsnitshastighed på 40 km/t, 300 km med en gennemsnitshastighed på 60 km/t, 400 km med en gennemsnitshastighed på 80 km/t. Hvad er Martines gennemsnitshastighed?

21. En butik sælger varerne A og B. Indkøbsprisen er hhv. 20kr/styk og 30 kr/styk. Fortjenesten er hhv. 50 kr/styk og 60 kr/styk. Indkøbsbudgettet er på 1000 kr. Lageret har plads til 500 enheder, idet hver A regnes for 2 enheder.

22. Et firma laver plastik kopper og tallerkner på to maskiner A og B. En tallerken kræver 1 time på A og 2 timer på B, en kop 3 timer på A og 1 på B. Hver maskine kører 15 timer pr. døgnet. Fortjenesten er 1 kr per tallerken og 1.60 kr per kop. Optimer Fortjenesten.

23. Til oplagring vælges mellem to kabinet-typer, A og B. Stykprisen er hhv. 100kr og 200 kr. Pladskravet per styk er hhv. 6 kvm. og 8 kvm. Lagerkapacitet per styk er hhv. 8 kbm. og 12 kbm. Budgetbegrænsningen er 1400 kr. og pladsbegrænsningen er 72 kvm. Optimer lagerkapaciteten.

24. En slikbutik blander choko-nødder og choko-rosiner i to forskellige forhold, 1-1 og 1-2 som sælger for hhv. 70 kr/kg og 50 kr/kg. Optimer omsætningen.

25. Pers diæt kræver indtagelse af 15 gram af haver af stofferne I og II, som fås i retterne A og B. Tabellen viser pris og gram/ret for hver ret. Optimer omkostningen.

Stykpris		I	II
6	A	3	2
10	B	2	4

26. Ved produktion af to typer CD A og B kræver A 3 minutter i maskinen og 1 minut i pakning, hvor B kræver 5 minutter i maskinen og 5 minutter i pakning. Der er 3900 timer til rådighed i maskine og 2100 i pakningen. Profit er hhv. 10 kr/styk og 15 kr/styk. Optimer profitten .

27. Marie skal tjene mindst 3K kr på to job A og B, som giver hhv. 1K per 10 timer og 1K per 15 timer. Hun har i alt 70 timer til rådighed. Optimer indtjeningen.

28. Lageret indeholder 90 enheder tun, 80 enheder lever og 50 enheder kylling. Det daglige behov for kattene A og B er hhv. 2,1,1 og 1,2,1. Salgsprisen er hhv. 1200 kr. og 1000 kr. Optimer indkomsten.

29. Fra to lagre I og II sendes borde til to butikker A og B. På lagrene findes hhv. 75 og 90 styk. Butikkerne beder om hhv. 50 og 85 styk. Tabellen viser forsendelsesomkostning per styk. Optimer forsendelsesomkostningerne.

		75	90
		I	II
50	A	70	60
85	B	50	50

30. Fra lager I, II og III sendes stole til to butikker A og B. På lagrene findes hhv. 75 og 90 styk. Butikkerne beder om hhv. 50 og 85 styk. Tabellen viser forsendelsesomkostning per styk. Optimer forsendelsesomkostningerne.

		420	80	500
		I	II	III
400	A	32	53	64
600	B	38	56	21

Forskellige vækstformer, et eksperiment

Lineær vækst er vækst med en konstant stigning a.	Men hvad hvis a ikke er konstant men stiger konstant? Eller konstant accelereret?

Eksperimentet går ud på at opdele formelregnerens skærm og afprøve hvad der sker når de indgående tal ændres.

Nulstil alle variable på 1 bogstav	'Home, F6, Clear a-z'
Vælg kvadratisk koordinatsystem	'Window, F2, ZoomSqr'
Opdel skærmen lodret	'Mode F2, Split screen LEFT-RIGHT'
Indtast y1(x) som et polynomium af grad 1 Stigning: konstant	'Home, Y = , y1(x) = b+2*x | b = 1, Graph'
1. Afprøv variation af b. b beskriver …	y1(x) = b+2*x | b = 5 y1(x) = b+2*x | b = 0 y1(x) = b+2*x | b = -2 y1(x) = b+2*x | b = -4
2. Afprøv variation af a. a beskriver …	y1(x) = 1+a*x | a = 2 y1(x) = 1+a*x | a = 3 y1(x) = 1+a*x | a = 1/3 y1(x) = 1+a*x | a = -2 y1(x) = 1+a*x | a = -3 y1(x) = 1+a*x | a = -1/3
Indtast y1(x) som et polynomium af grad 1 Indtast y2(x) som et polynomium af grad 2 Stigning: konstant voksende Acceleration: konstant	'y1(x) = 1+2*x' 'y2(x) = b+a*x | a = 2+0.1*x'
3. Afprøv variation af accelerationen. Acceleration positiv: Krumning … Acceleration negativ: Krumning …	y2(x) = 1+a*x | a = 2+0.001*x y2(x) = 1+a*x | a = 2+0.01*x y2(x) = 1+a*x | a = 2+0.1*x y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x y2(x) = 1+a*x | a = 2-1*x y2(x) = 1+a*x | a = 2-0.1*x y2(x) = 1+a*x | a = 2-0.01*x y2(x) = 1+a*x | a = 2-0.001*x
Indtast y1(x) som et polynomium af grad 1 Indtast y2(x) som et polynomium af grad 3 Stigning: konstant voksende Acceleration: konstant voksende	'y1(x) = 1+2*x' 'y2(x) = b+a*x | a = 2+1*x+0.1*x^2'
4. Afprøv variation af accelerationen. Acceleration voksende: Dobbeltparablen … Acceleration aftagende: Dobbeltparablen …	y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x+0.001*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x+0.01*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x+0.1*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x+1*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x-1*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x-0.1*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x-0.01*x^2 y2(x) = 1+a*x | a = 2+1*x-0.001*x^2
5. Gentag 2	y1(x) = -1+a*x | a = 2
6. Gentag 3	y2(x) = -1+a*x | a = 2+0.001*x
7. Gentag 3	y2(x) = -1+a*x | a = -2+0.001*x
8. Gentag 3	y2(x) = 1+a*x | a = -2+0.001*x
9. Gentag 4	y2(x) = -1+a*x | a = 2+1*x+0.001*x^2
10. Gentag 4	y2(x) = -1+a*x | a = -2+1*x+0.001*x^2
11. Gentag 4	y2(x) = -1+a*x | a = 2-1*x+0.001*x^2
12. Gentag 4	y2(x) = -1+a*x | a = -2-1*x+0.001*x^2
13. Gentag 4	y2(x) = 1+a*x | a = -2+1*x+0.001*x^2
14. Gentag 4	y2(x) = 1+a*x | a = 2-1*x+0.001*x^2
15. Gentag 4	y2(x) = 1+a*x | a = -2-1*x+0.001*x^2

Den kvantitative litteratur

Den klassiske kvantitative litteratur er geometri og algebra. Hertil kommer den moderne kvantitative litteratur, skabt af spørgsmål, som kommer fra produktionen: Hvordan hentes sølv og kul op fra minegangene? Hvordan navigeres på havet? Hvordan bygges maskiner? Hvordan optimeres en produktion? Hvordan optimeres profitten? Osv.
Der regnes på, hvordan sølvmalm og vand løftes op af minerne, og hvordan sølvmalm forvandles til sølv af forskellig renhedsgrad. Sølvet begiver sig nu på rejse ned ad de tyske floder til Italien, hvorfra købmænd er kommet for at bytte klæde og vin med sølv. Undervejs passeres adskillige borge beliggende på høje bjerge. Købmændene må aflevere sølv som told- og beskyttelsesafgifter, men vinder det tilbage igen gennem spil. Fra Italien rejser sølvet videre når købmændene bytter det med Østens efterspurgte varer, krydderi og silke, enten via den dyre vej over land transporteret af karavaner, eller via den billige vej over hav transporteret af arabiske købmænd i Egypten. Så Italiens rigdomme hober sig op først gennem handel og senere gennem bankudlån. I banken får man brug for at kunne lægge renter sammen og udvikler derfor potensregningen og opdager herved rentes-renten: 7 år á 6% = 42% rente + 8% rentes-rente = 50% da 106%^7 = 150%.
En stor del af fortjenesten går til forbrug af prægtige paladser overalt i Renæssancens Italien, og til ansættelse af kunstnere og filosoffer. Italien bliver udkonkurreret af Portugal, som kan nedsætte prisen på peber til 1/3 ved at overspringe mellemhandlerne og selv at hente Østens varer hjem over havet på egne skibe som sejler rundt om Afrika. Spanien forsøger at finde en anden vej til Indien ved at sejle mod vest. Men i Vest-Indien er der hverken krydderi eller silke, derimod rigeligt med sølv og guld. Paven deler den nye verden mellem Spanien og Portugal. Portugal får alt øst for den 60. længdegrad, Spanien alt vest for. I Spanien og Portugal går fortjenesten til forbrug gennem bygning af kirker og klostre og palæer. I England går fortjenesten til at købe aktier for og etablere industriel produktion.

De tre genrer: Fakta, fiktion og fidus
Både kvalitativ og kvantitativ litteratur kan opdeles i tre genrer: Fakta, fiktion og fidus.
Eksempler på de tre kvalitative genrer er
Fakta: 'DA København ligger på Sjælland, SÅ ligger København lavt'
Fiktion: 'HVIS København lå i alperne, SÅ lå København højt'.
Fidus: 'HVIS København ligger først i sætningen, så ligger den lavt.'

Fakta
Fakta er 'DaSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det beregnelige:
'DA prisen er 4 kr./kg, SÅ koster 6 kg 6*4 = 24 kr.'.
DaSå beregninger kunne også kaldes FritFalds-beregninger:
'DA accelerationen er 9.8 m/s^2, SÅ vil hastighedstilvæksten på 5 sekunder være 5*9.8 = 49 m/s'.
Eller Rum-beregninger:
'DA rummet har dimensionerne 3mx4mx5m, SÅ er rumfanget V = 3mx4mx5m = 60 m^3'.
Fakta-beregninger kontrolberegnes:
T = 3 kg. á 4 kr./kg. = 3*4 kr. = 15 kr., hov regnefejl, T = 12 kr.
Et eksempel er regnefejlen som fik marssonden Mars Climate Orbiter til at falde ned: 2 cm+3 tommer=5 cm

Fiktion
Fiktion er 'HvisSå' beregninger, som kvantificerer det kvantificerbare, og beregner det uberegnelige:
'HVIS indkomsten er 4 mio$/år, SÅ vil 6 års indkomst være 6*4 = 24 mio$'.
HvisSå beregninger kunne også kaldes Affalds-beregninger:
'HVIS affaldsmængden er 9.8 kg/dag, SÅ vil arbejdsugens affald være 5*9.8 = 49 kg'.
Eller Rate-beregninger:
'HVIS vækstraten er 3% pr. år, SÅ vil den samlede vækstrate efter 5 år være 15.9%, da 103%^5 = 115,9%'.
Fiktions-beregninger scenarieberegnes:
Indkomsten skønnes at ville ligge mellem 4kr./dag og 5kr./dag, så 3 dages indkomst vil ligge mellem 12 kr. og 15 kr., da T = 3 dage á 4 kr./dag = 3*4 = 12 kr., og T = 3 dage á 5 kr./dag = 3*5 = 15 kr.

Fidus
Fidus er 'HvadSå' beregninger, som kvantificerer ikke-kvantificerbare kvaliteter:
'HVIS konsekvensen K = 'brækket ben' sættes til 2 mio.$, og HVIS sandsynligheden S sættes til 30%, SÅ vil risikoen være R = K*S = 2*0.3 = 0.6 mio.$. Og HVADSÅ? Hvem siger at et brækket ben koster 2 mio. kr.? Og hvem siger at sandsynligheden for at brække et ben overhovedet kan måles?'
HvadSå beregninger kunne også kaldes Dødsfalds-beregninger:
'HVIS omkostningen ved en gravplads er 10 kr./dag, og omkostningen ved en hospitalsplads er 10.000 kr./dag, SÅ er det billigere at have folk liggende på kirkegården end på hospitalet. Og HVADSÅ, betyder det at hastighedsgrænsen så skal sættes op til 200 km/time for at spare penge?'
Eller Risiko-beregninger:
'HVIS vi kan øge sandsynligheden for dødsfald og mindske sandsynligheden for kvæstelse, SÅ vil risikoen ved skolevejen kunne nedsættes. Og HVADSÅ? Betyder det at vi skal nedlægge fodgængerfeltet?'
Fidus-beregninger afvises og henvises til kvalitativ behandling: 'Risiko = 30%*5mio. Og HVADSÅ, en oplysnings-kampagne kan nedsætte sandsynligheden, og hvem siger at et brækket ben koster 5 mio. kr.?'
Fidus-beregninger afvises og henvises til behandling i talesproget.

Beregning af planetbaner i Excel

Bilag til 'Newton regner på Keplers love' på næste side

Vækstligninger

d vx =	ax*dt
d vy =	ay*dt
d x =	vx*dt
d y =	vy*dt

Niveauligninger

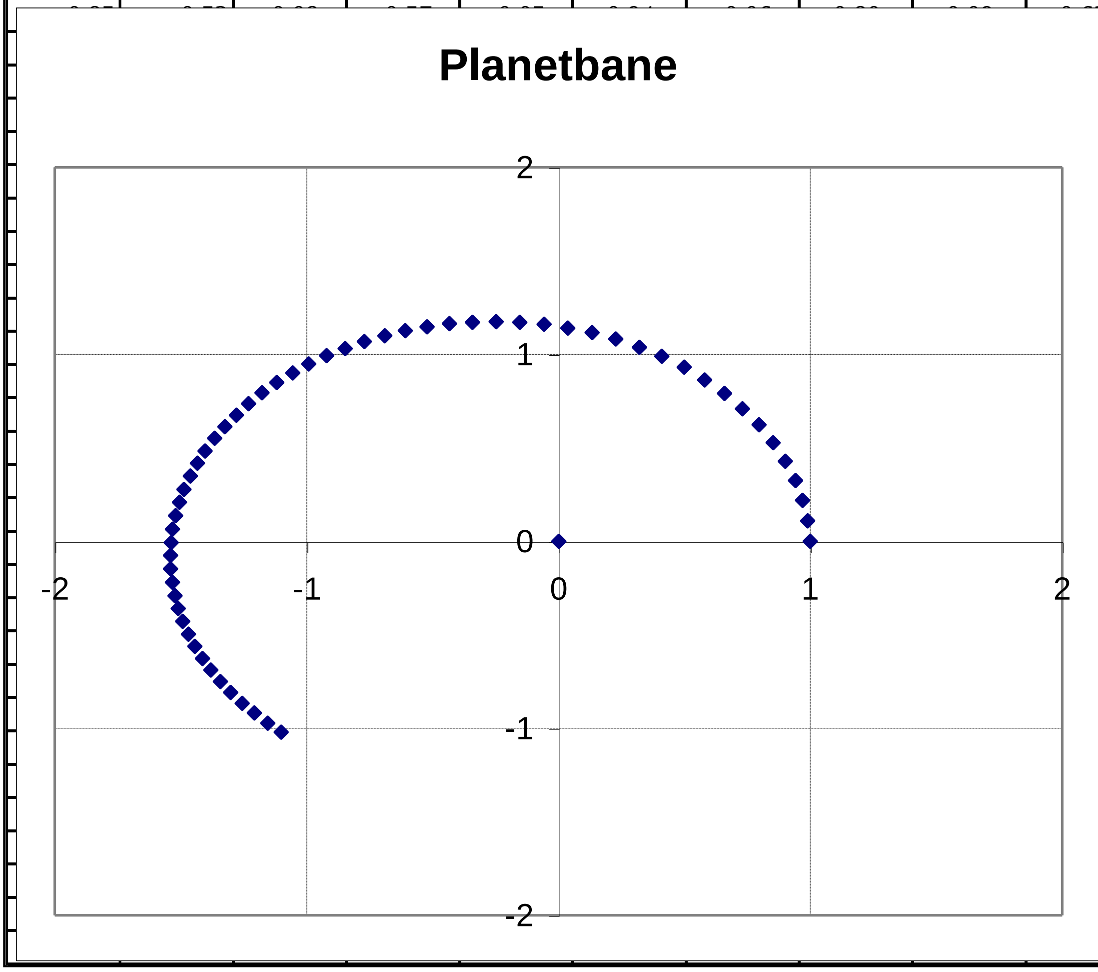
ax =	-x/r^3
ay =	-y/r^4
vx =	vx + d vx
vy =	vy + d vy
x =	x + d x
y =	y + d y
r =	V(x^2+y^2)
a =	1/r^2

Fremgangsmåde:
1. Vælg området Slet ovenfor til venstre, og slet med Delete
2. Vælg området Tabel ovenfor til venstre
3. Tæk lodret nedad i den sorte knap nederst til højre, eet eller flere trin ad gangen

Solen: 0 0

dt: 0,1

ax	ay	dvx	vx	dvy	vy	dx	x	dy	y	r
			0		1,10		1		0	1,00
-1,00	0,00	-0,10	-0,10	0,00	1,10	-0,01	0,99	0,11	0,11	1,00
-1,00	-0,11	-0,10	-0,20	-0,01	1,09	-0,02	0,97	0,11	0,22	0,99
-0,99	-0,22	-0,10	-0,30	-0,02	1,07	-0,03	0,94	0,11	0,33	0,99
-0,95	-0,33	-0,10	-0,39	-0,03	1,03	-0,04	0,90	0,10	0,43	1,00
-0,91	-0,43	-0,09	-0,49	-0,04	0,99	-0,05	0,85	0,10	0,53	1,00
										1,01
										1,02
										1,03
										1,04
										1,06
										1,07
										1,09
										1,10
										1,12
										1,14
										1,16
										1,18
										1,20
										1,22
										1,24
										1,26
										1,28
										1,30
										1,32
										1,34
										1,35
										1,37
										1,39
										1,40
										1,42
										1,43
										1,45
										1,46
										1,47



Dobbeltklik og rediger.

Klassiske tekstopgaver

B. Eksempler på babylonske matematikopgaver
B1. Giv mig et tal som sammenlagt med sin reciprok giver tallet b.
B2. Jeg har ganget længden med bredden og fået arealet 10. Jeg har ganget længden med sig selv og fået et areal, som er det samme som hvis jeg ganger forskellen på længden og bredden med sig selv og med 9.
B3. Én mand kan grave 3 stader grøft på 1 dag. Hvor mange mænd skal jeg bruge for at grave 100 stader grøft på 6 dage?
B4. Hvor mange måne-måneder på 29 dage skal der til for at give et helt antal solår på 365 dage?
B5. Forholdet mellem arealet og omkredsens kvadrat er 12 for en cirkel.

Æ. Eksempler på ægyptiske matematikopgaver
Ægypterne skrev på papyrus. Der er to bevarede papyrus-skrifter fra ca. 1700 f.Kr., Rhind-papyrus i London og Moskva-papyrus i Moskva. Begge indeholder problemer og deres løsning, 85 på Rhind, og 25 på Moskva.
Æ1. En mangfoldighed søges så 2/3 af den, ½ af den, 1/7 af den og den selv tilsammen er 33.
Æ2. Af 2 tønder middelgod korn kan laves 5 flasker almindeligt øl. Af 3 tønder god korn kan laves 8 flasker almindeligt øl. 3 flasker god øl svarer til 2 flasker stærkt øl. Hvor meget korn skal bruges til at lave 20 flasker almindeligt øl? Og til at lave 30 flasker stærkt øl?
Æ3. En trekant har arealet A = ½*side*side. En cirkel har arealet A = (8d/9)^2, hvor d er diameteren. Arealet af en firkant med modsatte sider a og b, hhv. c og d er A = (a+b)/2*(c+d)/2, hvilket også gælder hvis d=0.
Æ4. Rumfanget af en afskåret kegle til vand er V = h/12 * (3*(D+d)/2)^2, hvor h er højden og (D+d)/2 er den gennemsnitlige omkreds. Rumfanget af en afskåret pyramide med kvadratisk grundfalde er V = h/3 * (a^2 + a*b + b^2), hvor h er højden og a og b er sidelængderne for oven og for neden.
Æ5. Året går fra den første dag, hvor Sirius er synlig i horisonten lige før solopgang. Dette giver en kalender med 365 dage, som opdeles i 12 måneder á 30 dage plus 5 dage til sidst. Der medtages ikke skuddag hver fjerde år. Denne kalender blev overtaget af Julius Cæsar, som dog tilføjede en skuddag.
Æ6. Byg en pyramide af kubiske sten, som skal løftes af en løftestang. 1 mand kan løfte en sten, hvis stangen er 30 meter lang. Hvor mange mænd skal løfte, hvis stangen kun er 12 meter lang?

Newton regner på Keplers love
Hvis Keplers love gælder for alle ellipser, gælder de også for cirkler. En cirkelbevægelse beskrives ved radius r, hastighed v, acceleration a, omløbstid T. Der gælder at
v = meter/sekund = (banecirklens omkreds)/omløbstid = (2*π*r) meter /T sekunder = (2*π*r)/T , og at
a = (meter/sekund)/sekund = (hastighedscirklens omkreds)/omløbstid (2*π*v) meter/sekund /T sekunder = (2*π*v)/T,
dvs. a = (2*π/T)*v = (2*π/T)*(2*π/T)*r = (2*π/T)^2*r.
Ifølge Keplers 3. lov kan vi skrive T^2 = c * r^3. Indsættes dette fås
a = (2*π)^2/(T)^2*r = (2*π)^2/(c*r^3)*r = (4*π^2/c)/r^2 = k/r^2.
Så hvis planetens bevægelse skyldes en trækkraft fra solen, og hvis en kraft viser sig som en acceleration, så må der findes en tyngdekraft fra solen som aftager med kvadratet på afstanden. Omvendt kan vi nu antage at solen trækker i alle planeter med en sådan tyngdekraft, og at denne kraft giver en planet en acceleration a = k/r^2. Da acceleration er ændring i hastighed v pr. sekund (a = dv/dt), og da hastighed er ændring i sted pr. sekund (v = dr/dt), giver dette anledning til løsning af to ændringsligninger: a = dv/dt = k/r^2, og v = dr/dt. Desværre findes ændringsregning ikke, så det måtte Newton først opfinde under navnet differentialregning. I dag kan vi bruge Excel til at udføre beregningerne.

Proportionalitet
Proportionalitetsopgaver forekommer overalt hvor der skal veksles om mellem to forskellige typer enheder, altså opgaver hvor der er et konstant pertal mellem to enheder. Dvs. situationer hvor en mangfoldighed kan optælles i to forskellige enheder.

	Ligefrem (indkøbsopgaver)	Omvendt (grøfteopgaver)
Spørgsmål	3 kg. = 4 kr. 5 kg. = ? kr. ? kg. = 10 kr.	5 mand graver en grøft på 7 dage 3 mand graver en grøft på ? dage ? mand graver en grøft på 4 dage.
Svar	T = 5 kg. = (5/3)*3 kg. = (5/3)*4 kr. = 6.67 kr. T = 10 kr. = (10/4)*4 kr = (10/4)*3 kg = 7.5 kg	Mand-dage = 5*7 = 35 = (35/3)*3 = 11.67*3 Mand-dage = 5*7 = (35/4)*4 = 8.75*4

Standardopgaver
Ved løsning af de klassiske standardopgaver benyttes følgende fremgangsmåde:
Lav en hurtig gennemlæsning for at se, hvilken type opgave det er.
Find spørgsmålstegnet, som viser hvad den ubekendte x er.
Hvis der er flere ubekendte, lad altid x være den mindste ubekendte. Den anden kan da enten udtrykkes ved x, eller kaldes y.
Omformuler teksten, så den begynder med 'Lad x = <f.eks. kilo-tallet>', og brug kun ordet 'er', som kan oversættes direkte til lighedstegnet '='.
Oversæt opgaven fra tekst til ligninger, løs ligningerne, og oversæt tilbage.

Styktals-opgaver

Type1.1 talproblemer

To tal har summen 72, og det ene er dobbelt så stor som det andet. Hvilke tal er det?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*
Tal1	x = ?	*24*	x + y = 72
Tal2	y = 2*x	*48*	x + 2*x = 72
			3*x = 72
			x = 72/3 = 24

Type1.2 møntopgaver

A betaler en regning på 210 kr. med tre typer mønter: 1ere, 2ere og 5ere. Der er 4 gange så mange 1ere som 2ere, og 20 færre 2ere end 5ere. Hvor mange mønter af hver type blev brugt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*
5ere	x = ?	*30*	x*5 + (x-20)*2 + 4*(x-20)*1 = 210
2ere	x-20	*10*	5*x + 2*x – 40 + 4*x – 80 = 210
1ere	4*(x-20)	*40*	11*x = 210 + 120
			x = 330/11
			x = 30

Type1.3 aldersopgaver

A er 4 gange så gammel som B. For 5 år siden var A 7 gange så gammel som B. Hvor gammel er A og B nu?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*
B's alder nu	x = ?	*10*	7*(x-5) = 4*x – 5
A's alder nu	4*x	*40*	7*x – 35 = 4*x – 5
B's alder da	x - 5		7*x – 4*x = – 5 + 35
A's alder da	4*x - 5		3*x = 30
			x = 30/3
			x = 10

Type1.4 geometriopgaver

Et rektangel har en omkreds på 224 meter. Længden er 4 meter kortere end 3 gange bredden. Hvad er længde og bredde?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*
Bredde	x = ? meter	*29*	2*x + 2*(3*x-4) = 224
Længde	3*x-4 meter	*83*	2*x + 6*x – 8 = 224
			8*x = 224 + 8
			x = 232/8
			x = 29

Type1.5 vægtstangsopgaver

A, B og C sætter sig på en vippe, B og C på samme side. De vejer hhv. 100kg, 80 kg og 40 kg. A og B sidder begge 3 meter fra omdrejningspunktet. Hvor skal C sidde for at der bliver ligevægt?

Tekst	*Tal*	*SVAR*	*Ligning*
C's meter-tal	x = ?	*1.5*	100*3 = 80*3 + 40*x
A's bidrag	100*3		300 = 240 + 40*x
B's bidrag	80*3		300 – 240 = 40*x
C's bidrag	40*x		60/40 = x
			1.5 = x

Opgaver.

1. To tal har summen 48, og det ene er dobbelt så stor som det andet. Hvilke tal er det?
2. To tal har summen 48, og det ene er tre gange så stor som det andet. Hvilke tal er det?
3. A betaler en regning på 290 kr. med tre typer mønter: 1ere, 2ere og 5ere. Der er 5 gange så mange 1ere som 2ere, og 10 færre 2ere end 5ere. Hvor mange mønter af hver type blev brugt?
4. A betaler en regning på 200 kr. med tre typer mønter: 1ere, 2ere og 5ere. Der er 3 gange så mange 1ere som 2ere, og 20 flere 2ere end 5ere. Hvor mange mønter af hver type blev brugt?
5. A er 5 gange så gammel som B. For 4 år siden var A 6 gange så gammel som B. Hvor gammel er A og B nu?
6. A er 8 gange så gammel som B. For 5 år siden var A 9 gange så gammel som B. Hvor gammel er A og B nu?
7. Et rektangels omkreds er 128 meter. Længden er 4 meter længere end 5 gange bredden. Hvad er længde og bredde?
8. Et rektangels omkreds er 110 meter. Længden er 5 meter kortere end 4 gange bredden. Hvad er længde og bredde?
9. A, B og C sætter sig på en vippe, B og C på samme side. De vejer hhv. 120kg, 60 kg og 50 kg. A og B sidder begge 4 meter fra omdrejningspunktet. Hvor skal C sidde for at der bliver ligevægt?
10. A, B og C sætter sig på en vippe, B og C på samme side. De vejer hhv. 90kg, 70 kg og 20 kg. A og B sidder begge 2 meter fra omdrejningspunktet. Hvor skal C sidde for at der bliver ligevægt?

PerTals-opgaver

I pertals opgaver skal pertal altid omregnes til styktal før ligningen kan opstilles.

Rejseproblemer

Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. To timer senere kører tog2 kører fra A til B med hastigheden 60 km/t. Hvornår overhaler tog2 tog 1?

Tekst Timetallet	*Pr.tal*	*Styk-tal* x = ?	*SVAR* *4*	*Ligning* 40*(x+2)	 = 60*x
Hastighed1	40 km/t			40*x + 80	= 60*x
Hastighed2	60 km/t			80	= 60*x – 40*x = 20*x
Km-tal1		40*(x+2) km	*240*	80/20	= x
Km-tal2		60*x km	*240*	4	= x

Tog1 kører fra A til B med hastigheden 40 km/t. Samtidig kører tog2 kører fra B til A med hastigheden 60 km/t. Hvornår mødes de to tog, når afstanden fra A til B er 300 km?

Tekst Timetallet	*Pr.tal*	*Styk-tal* x = ?	*SVAR* *4*	*Ligning* 40*x + 60*x	 = 300
Hastighed1	40 km/t			100*x	= 300*x
Hastighed2	60 km/t			x	= 300/100
Km-tal1		40*x km	*120*	x	= 3
Km-tal2		60*x km	*180*		

Samme afstand tager 3 timer modstrøms, og 2 timer medstrøms. Hvad er motorbådens fart, når strømmens fart er 5 km/t?

Tekst Fart	*Pr.tal* x = ? km/t	*Styk-tal*	*SVAR* *25*	*Ligning* km = km/t*t = (x-5)*3	 = (x+5)*2
Fart modstrøms	x – 5 km/t		*20*	3*x-15	= 2*x+10
Fart medstrøms	x + 5 km/t		*30*	3*x-2*x	= 10+15
Sejltid		3 timer		x	= 25

Blandingsopgaver

? Liter 40% alkohol + 3 liter 20% alkohol giver ? liter 32% alkohol

Tekst Liter-tallet	*Pr.tal*	*Styk-tal* x = ? liter	*SVAR* *4.5*	*Ligning* 0.4*x + 0.2*3	 = 0.32*(x+3)
Liter-tal3		x+3 liter	*7.5*	0.4*x + 0.6	= 0.32*x + 0.96
Alkohol1	40%	0.4*x liter		0.4*x - 0.32*x	= 0.96- 0.6
Alkohol2	20%	0.2*3 liter		0.08*x	= 0.36
Alkohol3	32%	0.32*(x+3)	liter	x	= 0.36/0.08
				x	= 4.5

Finansopgaver

A investerer en tipsgevinst på 400.000 kr. på følgende måde: Noget sættes til forrentning til 3% p.a., resten sættes i 8% obligationer. Hvor meget investerede han i hver når det årlige udbytte er 20.000 kr?

Tekst Bank i tusinde	*Pr.tal*	*Styk-tal* x = ? kr.	*SVAR* *240*	*Ligning* 3%*x + 8%*(400-x)	 = 20
Obligationer i tusinde		x+3 kr.	*160*	0.03*x + 32 – 0.08*x	= 20
Rente i bank	3%			32 - 20	= 0.08*x – 0.03*x
Rente på obligationer	8%			12	= 0.05*x
Bankens bidrag		3%*x kr.		12/0.05	= x
Obligationernes bidrag		8%*(400-x) kr.		240	= x

Arbejdsopgaver

A kan grave en grøft på 4 timer. B kan grave samme grøft på 3 timer. Hvor lang tid tager det at grave den sammen?

Tekst Tid	*Pr.tal*	*Styk-tal* x = ? timer	*SVAR* *12/7*	*Ligning* ¼*x + 1/3*x	 = 1
A's fart	1/4 grøft/t			(¼ + 1/3)*x	= 1
B's fart	1/3 grøft/t			7/12*x	= 1
A's bidrag		¼*x		x	= 12/7
B's bidrag		1/3*x			

Opgaver.

1. Tog1 kører fra A til B med hastigheden 50 km/t. Tre timer senere kører tog2 kører fra A til B med hastigheden 60 km/t. Hvornår overhaler tog2 tog 1?
2. Tog1 kører fra A til B med hastigheden 50 km/t. Samtidig kører tog2 kører fra B til A med hastigheden 60 km/t. Hvornår mødes de to tog, når afstanden fra A til B er 400 km?
3. Samme afstand 4 timer modstrøms, og 3 timer medstrøms. Hvad er motorbådens fart, når strømmens fart er 6 km/t?
4. A kan grave en grøft på 5 timer. B kan grave samme grøft på 4 timer. Hvor lang tid tager det at grave den sammen?
5. A kan grave en grøft på 6 timer. B kan grave samme grøft på 3 timer. Hvor lang tid tager det at grave den sammen?

Mekanikopgaver

M1. En bold falder fra toppen af en skyskraber (der ses bort fra luftmodstanden). Efter 0 sekunder er bolden i 300 meters højde. Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 0 meters højde. Hvad er nedslagshastigheden?.

Højde efter 5 sek.: *Nedslagstid:* *Nedslagshastighed:*

s = ? meter	s = ½*g*t^2		t = ? sek.	s = ½*g*t^2		v = ? m/s	v = g*t
t = 5 sek. g = 9.8 m/s^2 Højde = ?	s = ½*9.8*5^2 s = 123.7 meter H = 300-123.7 H = 177.3 m		s = 300 m g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*300/9.8g) = t 7.82 sekunder = t		t = 7.82 sek. g = 9.8 m/s^2	v = 9.8*7.82 v = 76.6 m/s

M2. En bold skydes lodret op med en begyndelseshastighed på 30 m/s (der ses bort fra luftmodstanden). Efter 5 sekunder er bolden i ? meters højde. Efter ? sekunder er bolden i 40 meters højde. Efter ? sekunder er bolden i maksimalhøjden?

Højde efter 5 sek.: *Tid til 40 m:*

s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t		t = ? sek.	s = ½*g*t^2+vo*t
t = 5 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*5^2+30*5 s = 27.5 meter		s = 40 m. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	40 = -4.9*t^2+30*t 4.9*t^2-30*t+40 = 0 t = 1.96 og 4.16 sekunder

Stigtid indtil hastighed = 0: *Stighøjde:*

t = ? sek.	v = g*t+vo		s = ? meter	s = ½*g*t^2+vo*t
v = 0 m/s g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	(v-vo)/g = t (0-30)/(-9.8) = t 3.1 sekunder = t		t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s	s = -½*9.8*3.1^2+30*3.1 s = 45.9 meter

Opgavens højde-del kan også regnes som en opgave i omsætning af energi fra bevægelsesenergi til beliggenhedsenergi:

Stighøjde	h = ? meter	Ep = Ek
Stigtid Acceleration Begyndelseshastighed Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi	t = 3.1 sek. g = -9.8 m/s^2 vo = 30 m/s Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h	m*g*h = ½*m*v^2 h = ½*v^2/g h = ½*30^2/9.82 h = 45.8 meter

M3. En person på 100 kg udfører et Bounty-spring fra en bro (der ses bort fra luftmodstanden). Der er 220 meter ned. Fødderne er fæstnet i et tov på 120 meter, som er fæstnet i en fjeder med fjederkonstant k = 100 N/m, svarende til at 10 kg kan forlænge fjederen 1 m. Hvor langt kommer personen ned? Hvad hvis personen vejede 150 kg?

Fjederudstrækning	x = ? meter	Ef = Eb
Falddistance Acceleration Bevægelsesenergi Beliggenhedsenergi Fjederenergi	d = 120+x g = -9.8 m/s^2 Ek = ½*m*v^2 Ep = m*g*h Ef = ½*k*x^2	½*k*x^2 = m*g*h x^2 = 2*m*g*h/k x =√(2*m*g*h/k) x = √(2*100*9.82*120/100) x = 48.5 d = 120+48.5 = 168.5 meter

M4. En person gynger i en gynge (der ses bort fra luftmodstanden). Gyngestativet er 4 m højt og snorelængde er 3 m. Hvad er svingningstiden? I yderstillingen er udsvinget 50 grader. Hvad er maksimalhastigheden? Hvor langt er springet hvis afsættet sker i nederste position?

Svingningstid	T = ? sekunder	T = 2*π* √(l/g)
Snorelængde Acceleration	l = 3 m g = -9.8 m/s^2	T = 2*π* √(3/9.82) T = 3.47 sekunder

Stig-højde ved 50 graders udsving: *Maksimalhastighed ved 0 graders udsving:*

s = ? meter	s = l – l*cos v		v = ? m/sek.	Ek = Ep
l = 3 meter v = 50 grader	s = 3 – 3*cos50 s = 1.07 meter		h = 1.07 m g = 9.8 m/s^2	½*m*v^2 = m*g*h v^2 = 2*g*h v =√(2*g*h) v = √(2*9.82*1.07) v = 4.58 meter/sekund

Faldtid ved 0 graders udsving: *Springlængde ved 0 graders udsving:*

t = ? sekunder	s = ½*g*t^2		s = ? meter	s = v*t
s = 4-3 = 1 meter g = 9.8 m/s^2	2*s/g = t^2 √(2*s/g) = t √(2*1/9.82) = t 0.45 sekunder = t		v = 4.58 m/s t = 0.45 s	s = 4.58*0.45 s = 2.06meter

Andre opgaver fra fysik og kemi

Mekanikopgaver

M5. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet?

M6. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 180 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet?

M7. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder elastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes hastighed efter sammenstødet? Hvad er vinklen mellem de udgående retninger?

M8. En kugle med massen 3 kg og hastighed 4 m/s støder uelastisk ind i en kugle på 2 kg og hastighed 5 m/s. Vinklen mellem de indgående retninger er 40 grader. Hvad er kuglernes fælles hastighed efter sammenstødet? Hvad er kuglernes fælles retning efter sammenstødet?

M9. En person på 100 kg sidder med en 20 kg tung bold på en glat flade. Pludselig smider han kuglen væk så kuglen får hastigheden 4 m/s. Hvilken hastighed får personen?

M10. En kugle på 5 kg slynges vandret rundt i en cirkel med radius 3 m. Svingningstiden er 1.3 sekunder. Hvilken trækkraft udøver kuglen? Hvilken hastighed har kuglen? Snoren springer, og kuglen falder 2 meter lodret før den rammer jorden? Hvor langt bevæger den sig i vandret retning? Med hvilken hastighed rammer den jorden?

M11. Hvor meget energi er der i en roterende stang med længde 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M12. Hvor meget energi er der i en roterende cirkulær skive med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

M13. Hvor meget energi er der i en roterende kugle med radius 2 m og massen 3 kg, når rotationstiden er 4 s?

Varmelæreopgaver

I en beholder befinder der sig 3.26 kg is ved temperaturen –25 grader celsius. Isen opvarmes med en dypkoger med effekten 500 watt. Hvor mange sekunder skal dypkogeren være tændt for at opvarme isen til 0 grader celsius? Herefter er dypkogeren tændt i 3 minutter. Hvor mange kg is smelter? 3.26 kg vand opvarmes fra 0 grader celsius til 80 grader celsius på 426 sekunder. Hvad er dypkogerens effekt nu? Hvor mange kg vand kan fordampes på 215 sekunder hvis dypkogerens effekt er 1500 watt?

Tryklæreopgaver

I en beholder på 30 liter findes 0.234 kg vanddamp ved en temperatur på 110 grader celsius. Hvad er trykket? Temperaturen stiger til 150 grader celsius. Hvor mange procent stiger trykket? Beholderen udvides til 40 liter. Hvor mange procent falder trykket? 0.1 kg vanddamp slippes ud. Hvor mange procent falder trykket? Temperaturen stiger nu indtil trykket er vokset med 30%. Hvad er sluttemperaturen?

Elopgaver

To apparater A og B er anbragt i serie i et kredsløb, som er forsynet med strøm af en joulekilde på 12 volt. A består af to apparater C og D anbragt parallelt. Hvor mange watt modtager apparaterne B, C og D, når de har følgende modstande, B: 10ohm, C: 15 ohm, D: 20 ohm.

Kemiopgaver

Ethan-gas forbrændes med ilt og producerer kuldioxid og vand. Hvor meget? (Støkiometri)

proces	Ethan C2H6	+	Oxygen O2	→	Kuldioxid CO2	+	Vand H2O	
symboler	2 C2H6	+	7 O2	→	4 CO2	+	6 H2O	
stofmængde	2		7		4		6	mol
Masse	2*30 = 60		7*32 = 224		4*44 = 176		6*18 = 108	gram
Volumen	2*24 = 48		7*24 = 168		4*24 = 96		0.108/1 = 0.108	liter

<u>40 gram ethan + ? gram ilt -> ? gram kuldioxid + ? gram vand</u>

40 gram ethan = (40/60)*60 gram ethan = (40/60)*224 gram oxygen = 149 gram oxygen
= (40/60)*176 gram kuldioxid = 117 gram kuldioxid
= (40/60)*108 gram vand = 72 gram vand

<u>40 liter ethan + ? gram ilt -> ? mol kuldioxid + ? gram vand</u>

40 liter ethan = (40/48)*48 liter ethan = (40/48)*224 gram oxygen = 187 gram oxygen
= (40/48)*4 mol kuldioxid = 3.33 mol kuldioxid
= (40/48)*108 gram vand = 90 gram vand

<u>3.6 mol ethan + ? gram ilt -> ? liter kuldioxid + ? mol vand</u>

3.6 mol ethan = (3.6/2)*2 mol ethan = (3.6/2)*224 gram oxygen = 403 gram oxygen
= (3.6/2)*96 liter kuldioxid = 173 liter kuldioxid
= (3.6/2)*6 mol vand = 10.8 mol vand

Spilopgaver

Uforudsigelige spil, hasard

S1. En tipskupon kan falde ud på 3^13 forskellige måder.

S2. Lotto er en klumpudtagning. Et udtag af 5 tal blandt 20 kan derfor falde ud på K(20,5) forskellige måder.

S3. I spillet '21' får man kort indtil man stopper eller passerer 21. Kortet tæller hvad der står, billedekort 10, es 1 eller 11. Hvis man får over 21 er man ude. Jeg har 16 skal jeg stoppe? Jeg kan bruge højst en femmer. Antallet af brugbare kort er 4*5 = 20 ud af 52 kort. Der er da 38% chance for få noget brugbart. Forudsat alle kort er i bunken hvad de naturligvis ikke er. Så denne beregning siger ikke meget med mindre jeg ved hvilke kort der er tilbage.

S4. Mini-poker. To spillere A og B indskyder hver a kr. i puljen. De får hver et kort, først A så B. De røde kort er H-kort (høje), de sorte er L-kort (lave). 1) A vælger 'SE': Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. 2) A vælger 'MER' ved igen at lægge b kr. i puljen. I så fald har B to muligheder: 'GÅ' eller 'SE' ved at lægge b kr. i puljen. Ved 'SE' gælder som før: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. Ved 'GÅ' får A puljen. Hvilke værdier for a og b gør spillet retfærdigt?

Forudsigelige spil, snydespil

S5. Snydespil er spil man altid kan vinde, hvis man kender den vindende strategi. Man kan vise at alle NIM-spil er snydespil. I et NIM-spil skiftes spillerne til at fjerne tændstikker. Den der sidst fjerner har vundet.

S6. På bordet anbringes fire rækker med hhv. 1, 3, 5 og 7 tændstikker i. Spillerne skiftes til at fjerne tændstikker, men kun i én række ad gangen. Andenspiller har en vindende strategi, dvs. andenspiller har vundet på forhånd blot han laver de rigtige træk. (Tip: Optæl i 2ere og se symmetrien. Førstespiller ødelægger symmetrien, andenspiller genopretter den).

S7. På bordet anbringes én række med 15 tændstikker. Spillerne skiftes til at fjerne 1 eller 2 tændstikker. Hvem har en vindende strategi?

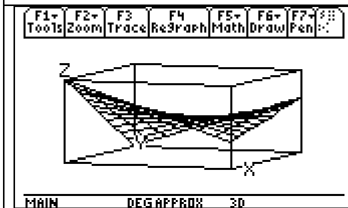
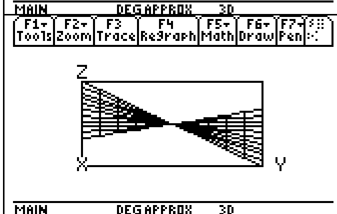
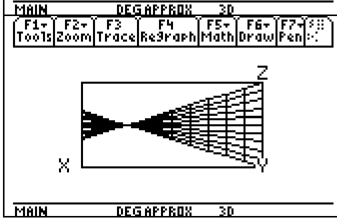
Spilteori

Spilteori giver svar på følgende spørgsmål: To spillere A og B skal vælge mellem forskellige strategier. Udbyttetavlen viser de beløb, B skal betale til A. Spillet kaldes et NulSum spil da A's udbytte + B's udgift = 0.

Eksempel

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>b1</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>A</td><td>a1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>a2</td><td>15</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>y b1</td><td>1-y b2</td></tr>
<tr><td>A x</td><td>a1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1-x</td><td>a2</td><td>-5</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte 10. For at maksimere mine minimumstal bør jeg vælge a2.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 15, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimumstal bør jeg vælge b2.

A: Var jeg B ville jeg vælge b2, derfor bør jeg vælge a2.
B: Var jeg A ville jeg vælge a2, derfor bør jeg vælge b2.
Strategiparret (a2,b2) kaldes spillets ligevægtspunkt. Ingen af spillerne har interesse i at fravælge ligevægtsstrategien. A risikerer at få udbyttet 0 i stedet for 10. B risikerer at få udgiften 15 i stedet for 10.
A fastholder sin maksimin-strategi, og
B fastholder sin minimaks-strategi,</td>
<td>A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte –5. For at maksimere mine minimumstal bør jeg vælge a1.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 5, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimumstal bør jeg vælge b1.

A: Var jeg B ville jeg vælge b1, derfor bør jeg vælge a1.
B: Var jeg A ville jeg vælge a1, derfor bør jeg vælge b2.
A: Og dog, for det har B regnet ud og vælger b2. Derfor vælger jeg a2.
B: Og dog, for det har A regnet ud og vælger a2. Derfor vælger jeg b1.
Osv. osv. osv.
Dette spil har intet ligevægtspunkt.</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>Hold piletasten nede 1 sekund for at se fladen dreje.</td></tr>
<tr><td></td><td>'Solve(-15*y+10 =5*y, y)'
giver y= 0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>'Solve(-10*x+10 = 10*x-5, x)'
giver x= 0.75</td></tr>
</table>
</td>
<td>For at optimere sit udbytte må B ikke kunne forudsige A's valg og omvendt. Spillerne bør derfor vælge en tilfældigt blandt strategi, A i blandingsforholdet x til 1-x, og B i blandingsforholdet y til 1-y. Herved bliver udbyttet:
U = 5*x*y + 0*x*(1-y) – 5*(1-x)*y + 10*(1-x)*(1-y)
U = -10*x – 15*y + 20*x*y + 10
Indtegnes u på formelregneren som box, ses at u-fladen har et saddelpunkt, hvor det går ned til begge sider den ene vej, og op til begge sider den anden vej.
Saddelpunktets x-koordinat findes som skæring mellem de to x-linier der fremkommer ved at sætte hhv. y=0 og y=1:
y=0 : U = -10*x + 10 og y=1: U = 10*x - 5.
Saddelpunktets y-koordinat findes som skæring mellem de to y-linier der fremkommer ved at sætte hhv. x=0 og x=1:
x=0 : U = -15*y + 10 og x=1: U = 5*y.
Løsning: x=.75, y=.5, U = 2.5
A bør vælge a2 når A trækker klør, ellers a1.
B bør vælge b2 når B trækker sort, ellers b1.
B vil i gennemsnit have en udgift på 2.5 per spil.
Test forudsigelsen ved at spille spillet 20 gange.</td>
</tr>
</table>

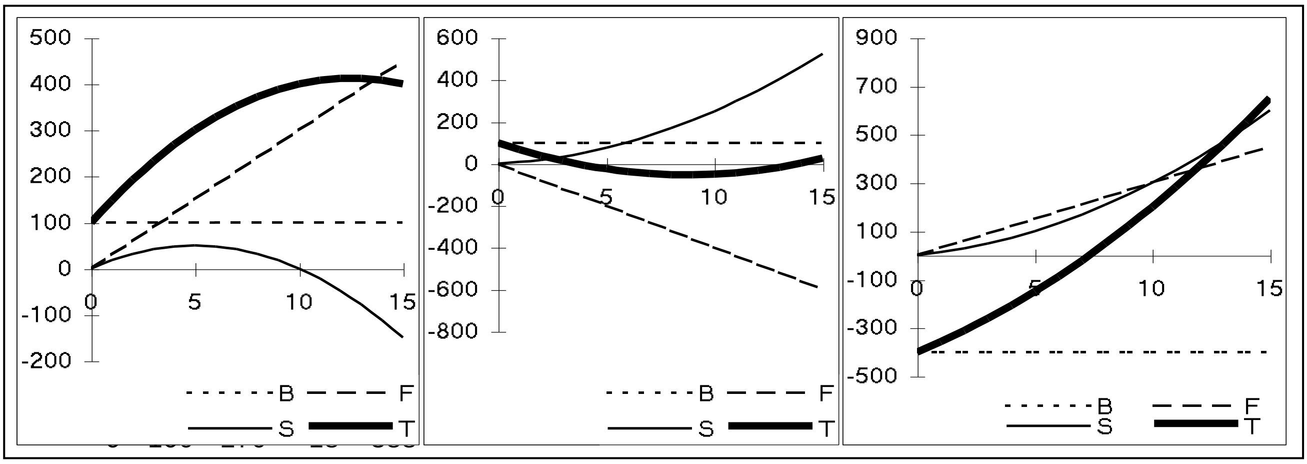
Projekt FamileFirmaet

Et familiefirma opbygger sin kapital gennem tilskud fra tre generationer. Bedstefaderen er gået på pension og har efterladt sig en formue på To$. Faderen har etableret en rutine som indbringer b$/dag. Sønnen er netop kommet tilbage fra universitetet, hvor han har lært ny teknologi, så han er derfor i stand til langsomt at hæve sin daglige indkomst på s$ med d$/dag, dvs. s = so + d*n. Den total familiekapital efter n dage kan da udregnes som en sum af polynomier:

Bedstefader	To	0. grads polynomium, en konstant
Fader	b*n	1. grads polynomium
Søn	s*n = (so + ½*d*n)* n = so*n + ½*d*n^2	2. grads polynomium
Total	To + (b+so)*n + d*n^2	2. grads polynomium

Samlere og spredere

I mange familier sker der det, at 'efter en samler kommer en spreder'.



Spredere: Sønnen Faderen Bedstefaderen

Prissætning af teen

I familiefirmaet mener man at en stigning i kg. prisen vil medføre et fald i kg. salget.

Bedstefaderen: Salget falder jævnt ved voksende stykpriser. Jeg foreslår derfor en lineær sammenhæng y = a + b*x bestemt ved tabellen:	Faderen: Salget falder langsommere ved højere kg. Priser. Jeg foreslår derfor et 2.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 bestemt ved tabellen:	Sønnen: salget falder mest ved lave og høje stykpriser. Jeg foreslår derfor et 3.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 + d*x^3 bestemt ved tabellen :

kg.pris x	kg.salg y
0	100
10	0

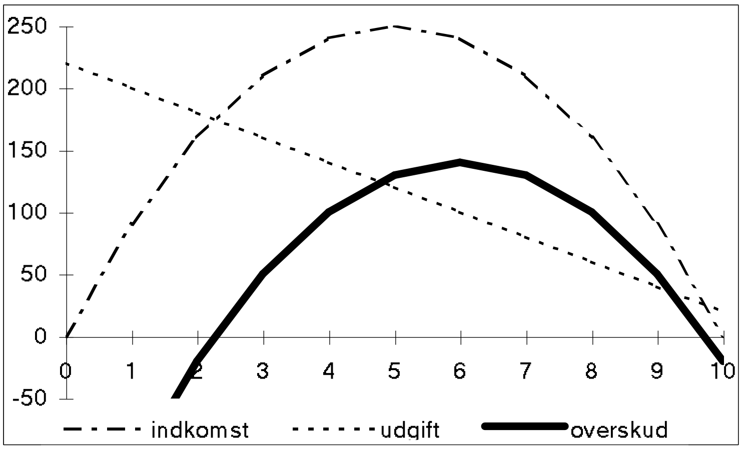
kg.pris x	kg.salg y
0	100
5	80
10	0

kg.pris x	kg.salg y
0	100
2	60
8	40
10	0

Bedstefaderens scenarium

Salget bliver y = 100 - 10x bestemt ved regression. Den totale indkomst T er T = stykpris*salg = x*y = x*(100 - 10x) = 100*x - 10*x^2, altså et 2.grads polynomium. Udgiften U til at producere y enheder består af en fast udgift uo= 20 og en variabel stykudgift m= 2. Dvs. U = uo + m*y = 20 + 2*y = 20 + 2*(100–10*x) = 20 + 200–20*x = 220–20*x. Overskuddet P bliver da P= T–U = (100*x–10*x^2)–(220–20*x) = – 220 + 80x – 10*x^2, dvs. igen et 2.grads polynom.

pris	salg	indkomst	udgift	overskud
0	100	0	220	-220
1	90	90	200	-110
2	80	160	180	-20
3	70	210	160	50
4	60	240	140	100
5	50	250	120	130
6	40	240	100	140
7	30	210	80	130
8	20	160	60	100
9	10	90	40	50
10	0	0	20	-20



Dobbeltklik og rediger

Opgaver.

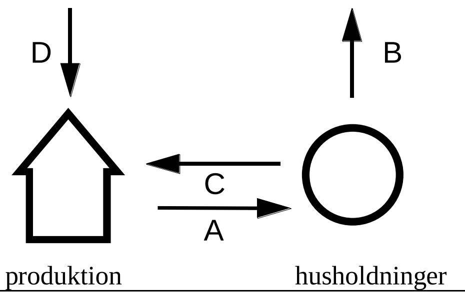
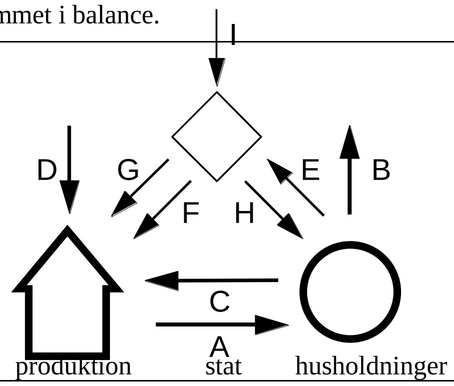
1. Opstil faderens scenarium 2. Opstil sønnens scenarium

Det økonomiske kredsløb

Det grundlæggende økonomiske kredsløb består af to sektorer, produktionen og de private husholdninger. Vi har en række behov som vi dækker ved at producere varer og tjenesteydelser til andre. Til gengæld modtager vi så en indkomst som vi kan bruge til at dække vore egne behov med. Herved skabes det grundlæggende økonomiske kredsløb bestående af de to penge-strømme: Produktionen skaber en indkomst A (løn), som bruges til forbrug C (mad, klæder, mm.), som igen medfører en ny produktion, som igen skaber nyt forbrug osv. Hvis indkomsten og forbruget er i balance er det økonomiske kredsløb stabilt. Der er der dog et dræn og en kilde i kredsløbet: Opsparingerne B og investeringerne D. Opsparing er penge som ikke bruges på forbrug. Investering er penge der bruges til køb af varer som ikke kan forbruges, f.eks. bygninger og maskiner osv.
Kredsløbet er stabilt hvis opsparing og investering er I balance. Hvis opsparingen er større end investeringen vil kredsløbet svinde ind med massearbejdsløshed til følge.
Dette var tilfældet efter den første verdenskrig hvor Tyskland blev tvunget til at sende penge til Frankrig som krigsskadeerstatning uden at Frankrig var forpligtet til at købe tyske varer for pengene. Dette fik den engelske økonom J. M. Keynes til at trække sig ud af fredsforhandlingerne.
Og det var tilfældet i USA under den store depression i 1930'erne, hvor investeringerne i aktier faldt dramatisk efter det stor Wall Street krak i 1929, og hvor opsparingen steg for at kunne tilbagebetale de store lån der var optaget for at deltage i spekulationen på aktiemarkedet.

Et økonomisk kredsløb med en statslig sektor.

Keynes viste hvordan en tredje offentlig sektor kan skabe balance i et to-sektor kredsløb. Den offentlige sektor trækker skatter E ud af kredsløbet, og bruger disse penge til at pumpe penge tilbage i kredsløbet gennem overførselsindkomster H til de ledige, offentligt forbrug F (flere offentligt ansatte mm.) samt offentlig investering G (flere veje mm.). Det offentlige kan optage lån, som tilbagebetales når kredsløbet igen er kommet i balance.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>En model for det grundlæggende økonomiske kredsløb kunne indeholde fire ligninger:
Første tur:
1 Begyndelses forbrug Co = 100
2 Begyndelses opsparing Bo = 20
3 Investeringen antages at være en konstant procentdelen af forbruget Do = d*Co
4 Indkomst er forbrug plus investering Ao = Co+Do
Næste tur:
1 Forbruget antages at være en konstant procentdelen af indkomsten C1 = c*Ao
2 Opsparingen er den indkomst som ikke forbruges B1 = Ao–C1
osv.
2 og 4 er fakta-ligninger, 1 og 3 er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.
Feks. Kunne proportionalitets-ligningerne 1 og 3 erstattes af linearitets-ligninger:
1 C1 = c*Ao -> C1 = c*Ao + K
4 D = d*C -> D = d*C + L
Endelig kan man foretage et indgreb i, der ændrer investeringsprocenten d fra d til d+i
D = d*C -> D = (d+i)*C
Dette begrunder indførsel af en statslig sektor i kredsløbet.

I begge tilfælde kan ligningssystemerne løses på et Excel-regneark:</td>
<td>En model for dette 3-sektor økonomiske kredsløb kunne indeholde ni ligninger:
Første tur:
1 Begyndelses forbrug Co = 100
2 Begyndelses opsparing Bo = 20
3 Begyndelses investering Do = 20
4 Indkomst er forbrug plus investering Ao = Co+Do
5 Begyndelses overførsler Ho = 4
Næste tur:
1 Skatterne antages at være en konstant procentdelen af indkomst og overførsler E1 = e*(Ao+Ho)
2 Privatforbruget antages at være en konstant procentdel af rådighedsbeløbet C1 = c*(Ao+Ho–E1)
3 Opsparingen er det rådighedsbeløb som ikke forbruges B1 = Ao+Ho–E1–C1
4 Offentligt forbrug antages at være konstant F1= konstant
5 Offentlig investering antages at være en konstant procentdel af investeringsgabet G1 = g*(B1–Do)
6 Privatinvesteringen antages at være en konstant procentdel af forbruget D1 = d*(C1+F1)
7 Den næste indkomst er det som produceres til forbrug og investering A1 = Co+Do+Fo+Go
8 Overførslerne antages at være en konstant procentdel af beskæftigelsesgabet H1 = h*(Ao-A1)
9 Låntagning er forskellen mellem skatter og offentlige udgifter I1 = E1-F1-G1-H1
10 Gæld er den opsummerede låntagning
3, 7 og 9 er fakta-ligninger, resten er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.</td>
</tr>
</table>

Simulering af det økonomiske kredsløb med og uden en offentlig sektor

Rediger satserne i cellerne C5-C10
Rediger ikke ligningerne

Satser

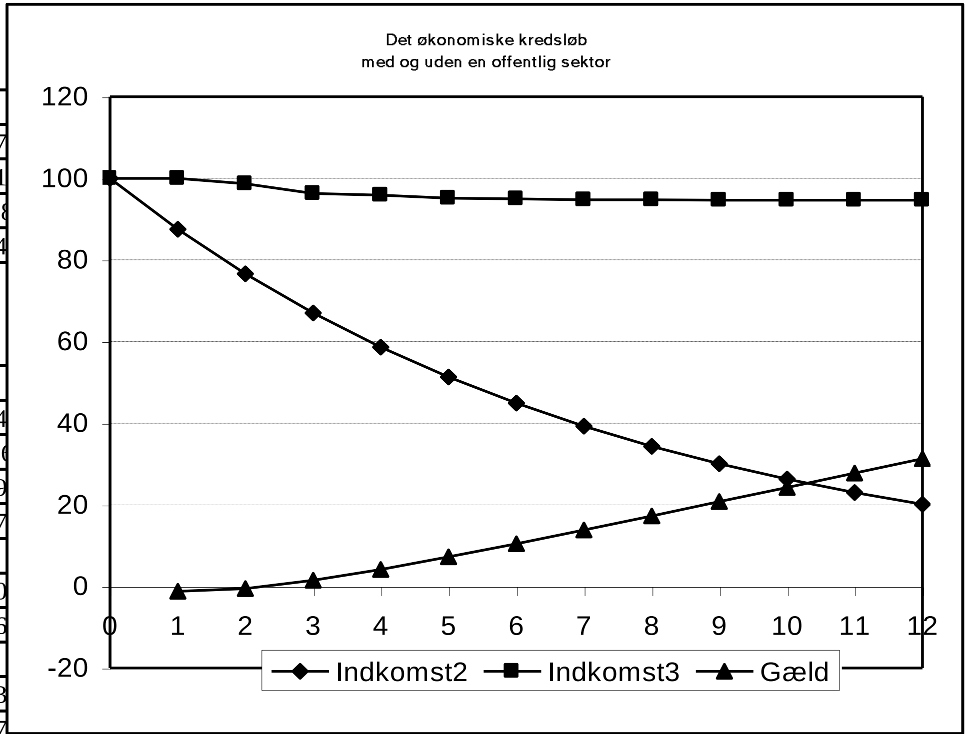
Tid	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PrivatForbrug	c	**70%**	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
PrivatInvestering	d	**25%**	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%
Skat	e	**30%**	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
Offentlig investering	g	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Indkomstoverførsel	h	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Offentligt forbrug	F	**20**	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

2sektor-model

Tid	*n*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	[illegible]
Forbrug	C	80	70	61,25	53,594	46,895	41,033	35,904	31,416	27[illegible]
Opsparing	B	20	30	26,25	22,969	20,098	17,585	15,387	13,464	11[illegible]
Investering	D	20	17,5	15,313	13,398	11,724	10,258	8,9759	7,8539	6,8[illegible]
Indkomst2	A	100	87,5	76,563	66,992	58,618	51,291	44,88	39,27	34[illegible]

3sektor-model

Tid	*n*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Indkomst3	A	100	100	98,7	96,25	95,852	95,102	94,98	94,75	94[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Overførsler	H	4	0	0,65	1,875	2,0741	2,4492	2,5102	2,6251	2,[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Skat	E		31,2	30	29,805	29,438	29,378	29,265	29,247	29[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
PrivatForbrug	C	80	50,96	49	48,682	48,081	47,984	47,8	47,77	47[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
OffentligtForbrug	F		20	20	20	20	20	20	20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Opsparing	B	20	21,84	21	20,864	20,606	20,564	20,486	20,473	20[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
PrivatInvestering	D	20	17,74	17,25	17,17	17,02	16,996	16,95	16,943	16[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
OffentligInvestering	G		10	10	10	10	10	10	10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Låntagning	I		1,2	-0,65	-2,07	-2,637	-3,071	-3,245	-3,378	-3[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Gæld			-1,2	-0,55	1,52	4,1566	7,228	10,473	13,851	17[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



Dobbeltklik og rediger