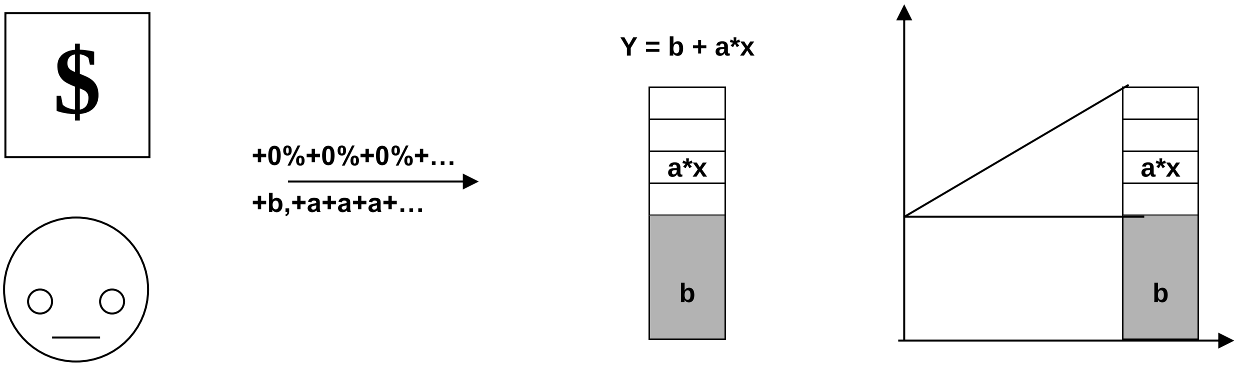
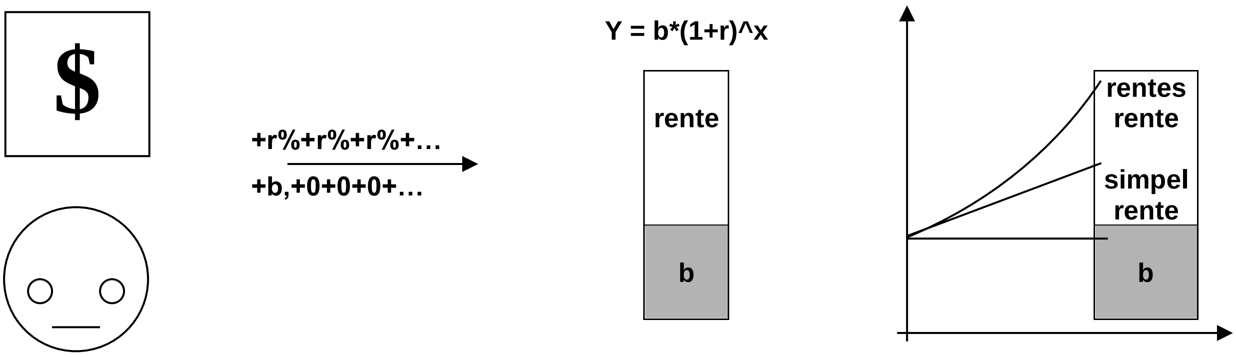
De fire opsparingsformer

I programmet PowerPoint eller Excel kan man vise de fire opsparingsformer:

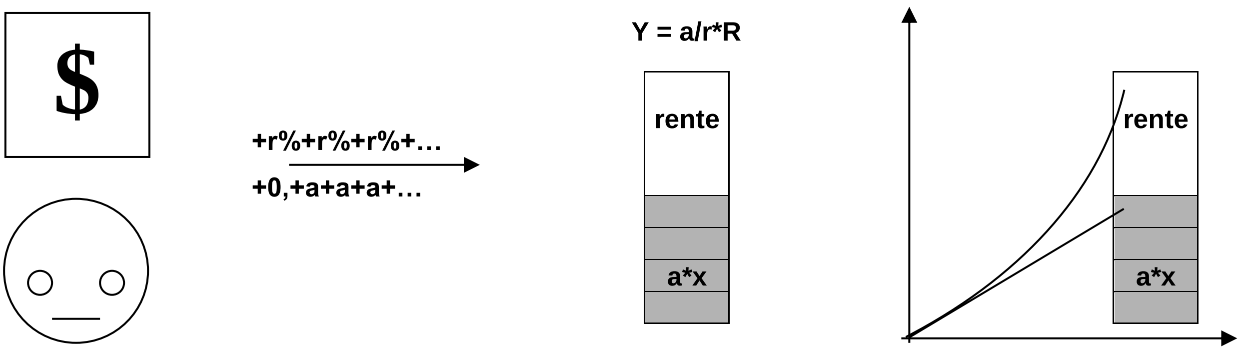
1. Rentefri opsparing: Lineær vækst, PLUS-vækst



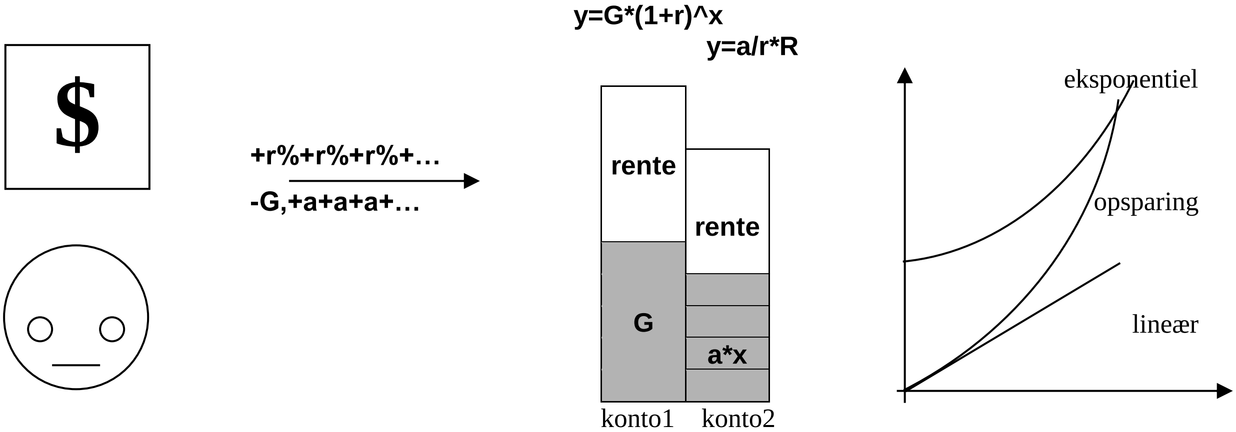
2. Indskudsfri opsparing: Eksponentiel vækst, GANGE-vækst



3. Opsparing uden startbeløb: Opsparings-vækst, PLUS&GANGE-vækst

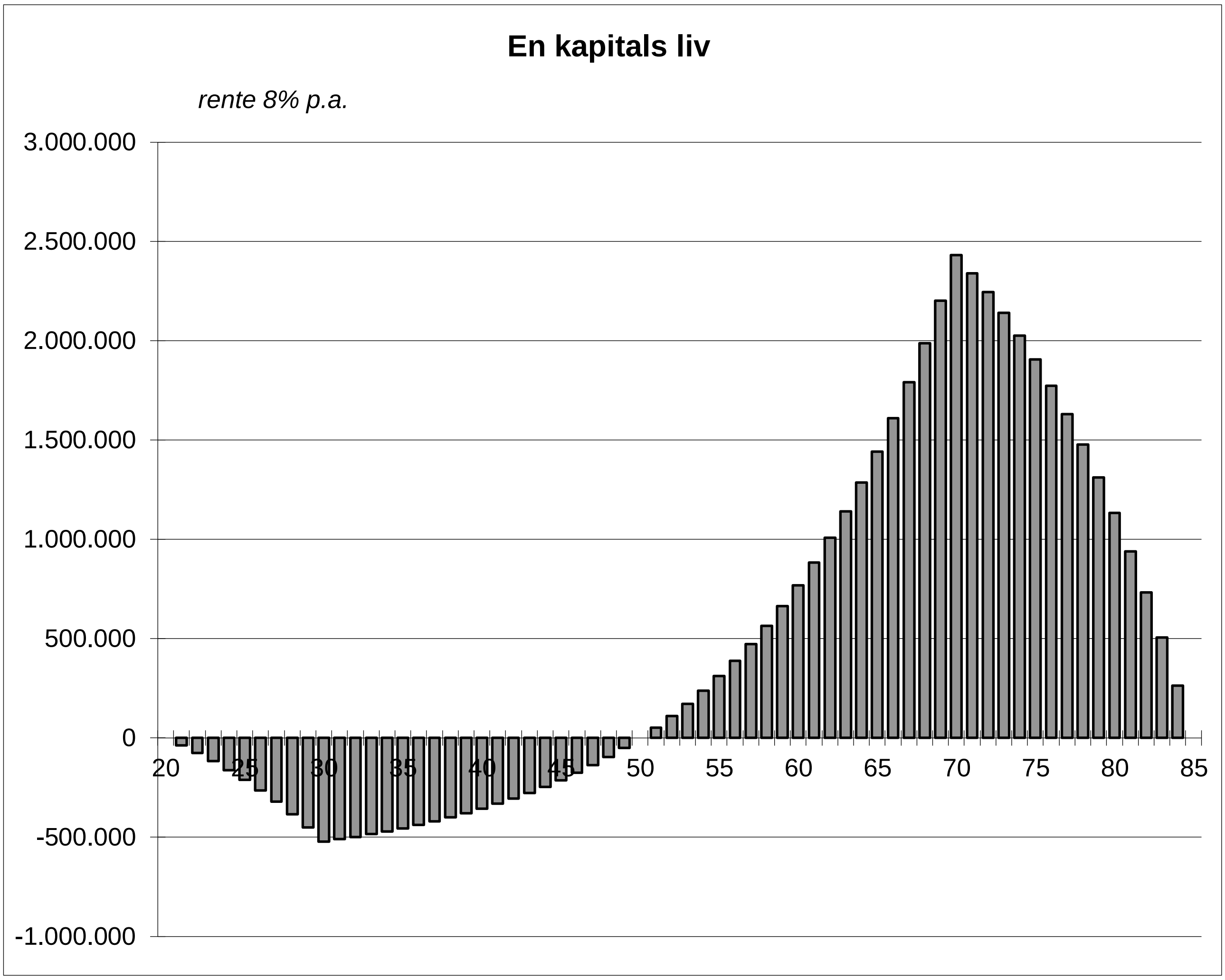


4. Opsparing med negativt startbeløb: Gældsafvikling, PLUS&GANGE-vækst



En kapitals liv

I løbet af sin levetid vil en persons kapitalforhold ofte ændre sig.
I det nedenstående eksemple er livet opdelt i fire epoker:
1. 20-30 år: Studielån, hvor der lånes kr. 36.000 per år i 10 år.
2. 30-50: Gældsafvikling, hvor studiegælden afvikles ved at betale kr. 53.000 per år i 20 år.
3. 50-70: Formueopbygning, hvor en formue opbygges ved at vedblive med at indbetale kr. 53.000 per år i 20 år
4. 70-85: Pension, hvor formue afvikles ved at udbetale kr. 284.000 per år i 15 år.
I eksemplet er regnet med en rente på 8% per år.
Dobbeltklik på figuren og rediger renten.



Rentes rente tabel

På måned0 indsættes kr.1 på konto0. På måned1 bliver kontoens beløb stående, og dens rente overføres til den næste konto i rækken. I måned 4 har k0 indestående, k1: indestående + rente af k0m3, k2: indestående + rente af k1m3, osv.
Eksemplet viser de forskellige konti i tilfældet rente = 100%. Hvad hedder den fremkomne tabel?
Lav en tilsvarende eksempel med rente = 50%.

	m0	m1	m2	m3	m4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
K0	1	1	1	1	1						
K1		1	1+1 = 2	2+1 = 3	3+1 = 4						
K2			1	1+2 = 3	3+3 = 6						
K3				1	1+3 = 4						
K4					1						
K5											
K6											
K7											
K8											
K9											
K10											

Spilopgaver

Uforudsigelige spil, hasard

S1. En tipskupon kan falde ud på 3^13 forskellige måder.
S2. Lotto er en klumpudtagning. Et udtag af 5 tal blandt 20 kan derfor falde ud på K(20,5) forskellige måder.
S3. I spillet '21' får man kort indtil man stopper eller passerer 21. Kortet tæller hvad der står, billedekort 10, es 1 eller 11. Hvis man får over 21 er man ude. Jeg har 16 skal jeg stoppe? Jeg kan bruge højst en femmer. Antallet af brugbare kort er 4*5 = 20 ud af 52 kort. Der er da 38% chance for få noget brugbart. Forudsat alle kort er i bunken hvad de naturligvis ikke er. Så denne beregning siger ikke meget med mindre jeg ved hvilke kort der er tilbage.
S4. Mini-poker. To spillere A og B indskyder hver a kr. i puljen. De får hver et kort, først A så B. De røde kort er H-kort (høje), de sorte er L-kort (lave). 1) A vælger 'SE': Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. 2) A vælger 'MER' ved igen at lægge b kr. i puljen. I så fald har B to muligheder: 'GÅ' eller 'SE' ved at lægge b kr. i puljen. Ved 'SE' gælder som før: Det højeste kort vinder puljen, ellers deles puljen. Ved 'GÅ' får A puljen. Hvilke værdier for a og b gør spillet retfærdigt?

Forudsigelige spil, snydespil

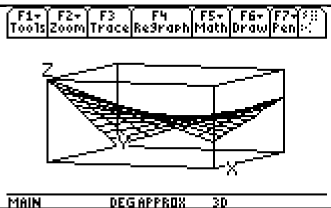
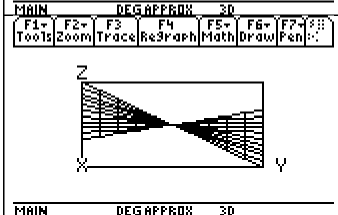
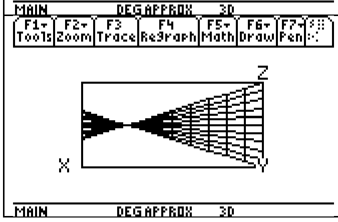
S5. Snydespil er spil man altid kan vinde, hvis man kender den vindende strategi. Man kan vise at alle NIM-spil er snydespil. I et NIM-spil skiftes spillerne til at fjerne tændstikker. Den der sidst fjerner har vundet.
S6. På bordet anbringes fire rækker med hhv. 1, 3, 5 og 7 tændstikker i. Spillerne skiftes til at fjerne tændstikker, men kun i én række ad gangen. Andenspiller har en vindende strategi, dvs. andenspiller har vundet på forhånd blot han laver de rigtige træk. (Tip: Optæl i 2ere og se symmetrien. Førstespiller ødelægger symmetrien, andenspiller genopretter den).
S7. På bordet anbringes én række med 15 tændstikker. Spillerne skiftes til at fjerne 1 eller 2 tændstikker. Hvem har en vindende strategi?

Spilteori

Spilteori giver svar på følgende spørgsmål: To spillere A og B skal vælge mellem forskellige strategier. Udbyttetavlen viser de beløb, B skal betale til A. Spillet kaldes et NulSum spil da A's udbytte + B's udgift = 0.
Eksempel

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>b1</td><td>b2</td></tr>
<tr><td>A</td><td>a1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>a2</td><td>15</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>y b1</td><td>1-y b2</td></tr>
<tr><td>A</td><td>x</td><td>a1</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>1-x</td><td>a2</td><td>-5</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte 10. For at maksimere mine minimumstal bør jeg vælge a2.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 15, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimumstal bør jeg vælge b2.

A: Var jeg B ville jeg vælge b2, derfor bør jeg vælge a2.
B: Var jeg A ville jeg vælge a2, derfor bør jeg vælge b2.
Strategiparret (a2,b2) kaldes spillets ligevægtspunkt. Ingen af spillerne har interesse i at fravælge ligevægtsstrategien. A risikerer at få udbyttet 0 i stedet for 10. B risikerer at få udgiften 15 i stedet for 10.
A fastholder sin minimaks-strategi, og
B fastholder sin maksimin-strategi,</td>
<td>A: Ved a1 risikerer jeg udbytte 0, ved a2 udbytte –5. For at maksimere mine minimumstal bør jeg vælge a1.
B: Ved b1 risikerer jeg udgiften 5, ved b2 udgiften 10. For at minimere mine maksimumstal bør jeg vælge b1.

A: Var jeg B ville jeg vælge b1, derfor bør jeg vælge a1.
B: Var jeg A ville jeg vælge a1, derfor bør jeg vælge b2.
A: Og dog, for det har B regnet ud og vælger b2. Derfor vælger jeg a2.
B: Og dog, for det har A regnet ud og vælger a2. Derfor vælger jeg b1.
Osv. osv. osv.
Dette spil har intet ligevægtspunkt.</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>
</td><td>Hold piletasten nede 1 sekund for at se fladen dreje.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>'Solve(-15*y+10 =5*y, y)'
giver y= 0.5</td></tr>
<tr><td>
</td><td>'Solve(-10*x+10 = 10*x-5, x)'
giver x= 0.75</td></tr>
</table>
</td>
<td>For at optimere sit udbytte må B ikke kunne forudsige A's valg og omvendt. Spillerne bør derfor vælge en tilfældigt blandt strategi, A i blandingsforholdet x til 1-x, og B i blandingsforholdet y til 1-y. Herved bliver udbyttet:
U = 5*x*y + 0*x*(1-y) – 5*(1-x)*y + 10*(1-x)*(1-y)
U = -10*x – 15*y + 20*x*y + 10
Indtegnes u på formelregneren som box, ses at u-fladen har et saddelpunkt, hvor det går ned til begge sider den ene vej, og op til begge sider den anden vej.
Saddelpunktets x-koordinat findes som skæring mellem de to x-linier der fremkommer ved at sætte hhv. y=0 og y=1:
y=0 : U = -10*x + 10 og y=1: U = 10*x - 5.
Saddelpunktets y-koordinat findes som skæring mellem de to y-linier der fremkommer ved at sætte hhv. x=0 og x=1:
x=0 : U = -15*y + 10 og x=1: U = 5*y.
Løsning: x=.75, y=.5, U = 2.5
A bør vælge a2 når A trækker klør, ellers a1.
B bør vælge b2 når B trækker sort, ellers b1.
B vil i gennemsnit have en udgift på 2.5 per spil.
Test forudsigelsen ved at spille spillet 20 gange.</td>
</tr>
</table>

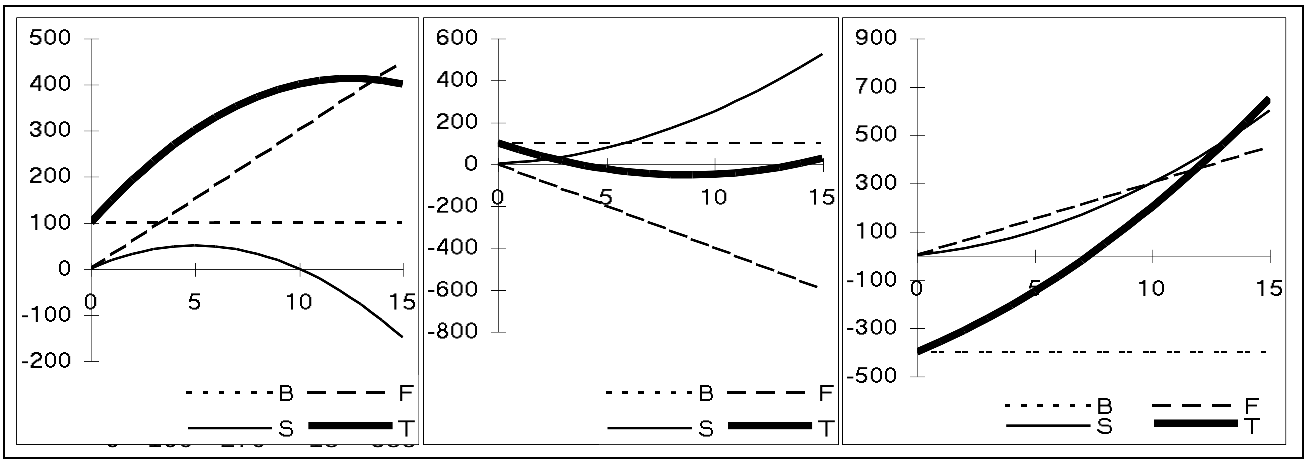
Projekt FamileFirmaet

Et familiefirma opbygger sin kapital gennem tilskud fra tre generationer. Bedstefaderen er gået på pension og har efterladt sig en formue på To$. Faderen har etableret en rutine som indbringer b$/dag. Sønnen er netop kommet tilbage fra universitetet, hvor han har lært ny teknologi, så han er derfor i stand til langsomt at hæve sin daglige indkomst på s$ med d$/dag, dvs. s = so + d*n. Den total familiekapital efter n dage kan da udregnes som en sum af polynomier:

Bedstefader	To	0. grads polynomium, en konstant
Fader	b*n	1. grads polynomium
Søn	s*n = (so + ½*d*n)* n = so*n + ½*d*n^2	2. grads polynomium
Total	To + (b+so)*n + d*n^2	2. grads polynomium

Samlere og spredere

I mange familier sker der det, at 'efter en samler kommer en spreder'.



Spredere: Sønnen Faderen Bedstefaderen

Prissætning af teen

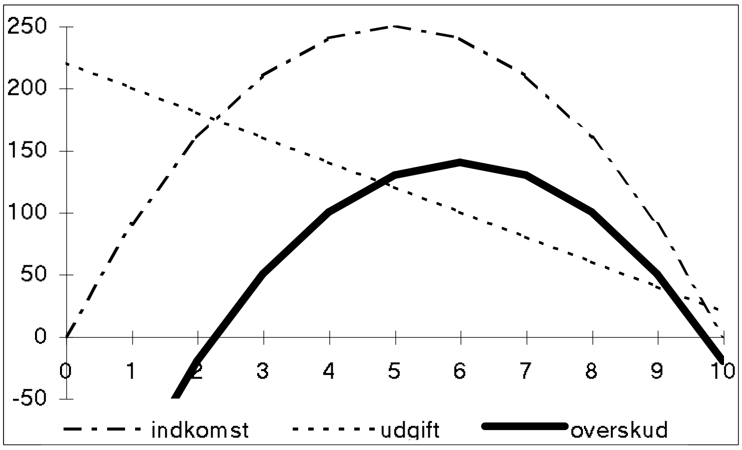
I familiefirmaet mener man at en stigning i kg. prisen vil medføre et fald i kg. salget.

Bedstefaderen: Salget falder jævnt ved voksende stykpriser. Jeg foreslår derfor en lineær sammenhæng y = a + b*x bestemt ved tabellen:	Faderen: Salget falder langsommere ved højere kg. Priser. Jeg foreslår derfor et 2.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 bestemt ved tabellen:	Sønnen: salget falder mest ved lave og høje stykpriser. Jeg foreslår derfor et 3.grads polynomium y = a + b*x + c*x^2 + d*x^3 bestemt ved tabellen :
kg.pris x | kg.salg y 0 | 100 10 | 0	kg.pris x | kg.salg y 0 | 100 5 | 80 10 | 0	kg.pris x | kg.salg y 0 | 100 2 | 60 8 | 40 10 | 0

Bedstefaderens scenarium

Salget bliver y = 100 - 10x bestemt ved regression. Den totale indkomst T er T = stykpris*salg = x*y = x*(100 - 10x) = 100*x - 10*x^2, altså et 2.grads polynomium. Udgiften U til at producere y enheder består af en fast udgift uo= 20 og en variabel stykudgift m= 2. Dvs. U = uo + m*y = 20 + 2*y = 20 + 2*(100–10*x) = 20 + 200–20*x = 220–20*x. Overskuddet P bliver da P= T–U = (100*x–10*x^2)–(220–20*x) = – 220 + 80x – 10*x^2, dvs. igen et 2.grads polynom.

pris	salg	indkomst	udgift	overskud
0	100	0	220	-220
1	90	90	200	-110
2	80	160	180	-20
3	70	210	160	50
4	60	240	140	100
5	50	250	120	130
6	40	240	100	140
7	30	210	80	130
8	20	160	60	100
9	10	90	40	50
10	0	0	20	-20



Dobbeltklik og rediger

Opgaver.

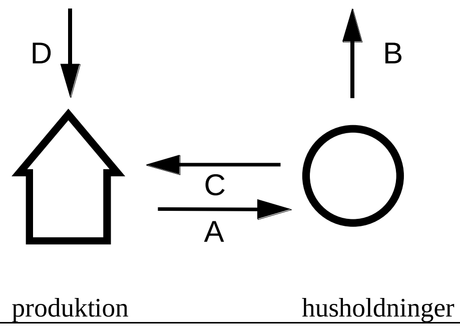
1. Opstil faderens scenarium 2. Opstil sønnens scenarium

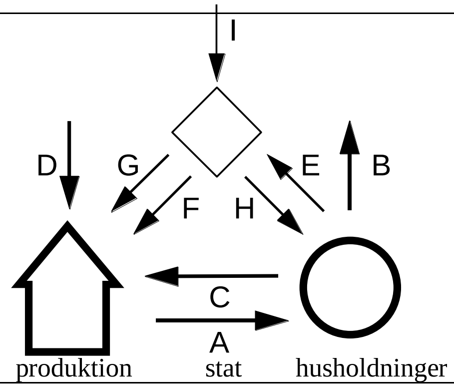
Det økonomiske kredsløb

Det grundlæggende økonomiske kredsløb består af to sektorer, produktionen og de private husholdninger. Vi har en række behov som vi dækker ved at producere varer og tjenesteydelser til andre. Til gengæld modtager vi så en indkomst som vi kan bruge til at dække vore egne behov med. Herved skabes det grundlæggende økonomiske kredsløb bestående af de to penge-strømme: Produktionen skaber en indkomst A (løn), som bruges til forbrug C (mad, klæder, mm.), som igen medfører en ny produktion, som igen skaber nyt forbrug osv. Hvis indkomsten og forbruget er i balance er det økonomiske kredsløb stabilt. Der er der dog et dræn og en kilde i kredsløbet: Opsparingerne B og investeringerne D. Opsparing er penge som ikke bruges på forbrug. Investering er penge der bruges til køb af varer som ikke kan forbruges, f.eks. bygninger og maskiner osv.
Kredsløbet er stabilt hvis opsparing og investering er I balance. Hvis opsparingen er større end investeringen vil kredsløbet svinde ind med massearbejdsløshed til følge.
Dette var tilfældet efter den første verdenskrig hvor Tyskland blev tvunget til at sende penge til Frankrig som krigsskadeerstatning uden at Frankrig var forpligtet til at købe tyske varer for pengene. Dette fik den engelske økonom J. M. Keynes til at trække sig ud af fredsforhandlingerne.
Og det var tilfældet i USA under den store depression i 1930'erne, hvor investeringerne i aktier faldt dramatisk efter det stor Wall Street krak i 1929, og hvor opsparingen steg for at kunne tilbagebetale de store lån der var optaget for at deltage i spekulationen på aktiemarkedet.

Et økonomisk kredsløb med en statslig sektor.

Keynes viste hvordan en tredje offentlig sektor kan skabe balance i et to-sektor kredsløb. Den offentlige sektor trækker skatter E ud af kredsløbet, og bruger disse penge til at pumpe penge tilbage i kredsløbet gennem overførselsindkomster H til de ledige, offentligt forbrug F (flere offentligt ansatte mm.) samt offentlig investering G (flere veje mm.). Det offentlige kan optage lån, som tilbagebetales når kredsløbet igen er kommet i balance.





En model for det grundlæggende økonomiske kredsløb kunne indeholde fire ligninger:
Første tur:
1 Begyndelses forbrug $Co = 100$
2 Begyndelses opsparing $Bo = 20$
3 Investeringen antages at være en konstant procentdelen af forbruget $Do = d*Co$
4 Indkomst er forbrug plus investering $Ao = Co+Do$
Næste tur:
1 Forbruget antages at være en konstant procentdelen af indkomsten $C1 = c*Ao$
2 Opsparingen er den indkomst som ikke forbruges $B1 = Ao–C1$
osv.
2 og 4 er fakta-ligninger, 1 og 3 er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.
Feks. Kunne proportionalitets-ligningerne 1 og 3 erstattes af linearitets-ligninger:
1 $C1 = c*Ao$ -> $C1 = c*Ao + K$
4 $D = d*C$ -> $D = d*C + L$
Endelig kan man foretage et indgreb i, der ændrer investeringsprocenten d fra d til d+i
$D = d*C$ -> $D = (d+i)*C$
Dette begrunder indførsel af en statslig sektor i kredsløbet.

I begge tilfælde kan ligningssystemerne løses på et Excel-regneark:

En model for dette 3-sektor økonomiske kredsløb kunne indeholde ni ligninger:
Første tur:
1 Begyndelses forbrug $Co = 100$
2 Begyndelses opsparing $Bo = 20$
3 Begyndelses investering $Do = 20$
4 Indkomst er forbrug plus investering $Ao = Co+Do$
5 Begyndelses overførsler $Ho = 4$
Næste tur:
1 Skatterne antages at være en konstant procentdelen af indkomst og overførsler $E1 = e*(Ao+Ho)$
2 Privatforbruget antages at være en konstant procentdel af rådighedsbeløbet $C1 = c*(Ao+Ho–E1)$
3 Opsparingen er det rådighedsbeløb som ikke forbruges $B1 = Ao+Ho–E1–C1$
4 Offentligt forbrug antages at være konstant F1= konstant
5 Offentlig investering antages at være en konstant procentdel af investeringsgabet $G1 = g*(B1–Do)$
6 Privatinvesteringen antages at være en konstant procentdel af forbruget $D1 = d*(C1+F1)$
7 Den næste indkomst er det som produceres til forbrug og investering $A1 = Co+Do+Fo+Go$
8 Overførslerne antages at være en konstant procentdel af beskæftigelsesgabet $H1 = h*(Ao-A1)$
9 Låntagning er forskellen mellem skatter og offentlige udgifter $I1 = E1-F1-G1-H1$
10 Gæld er den opsummerede låntagning
3, 7 og 9 er fakta-ligninger, resten er fiktions-ligninger. Dvs. modellen som sådan er en fiktion som bør suppleres med alternative modeller og scenarier.

Simulering af det økonomiske kredsløb med og uden en offentlig sektor

Rediger satserne i cellerne C5-C10
Rediger ikke ligningerne

Satser

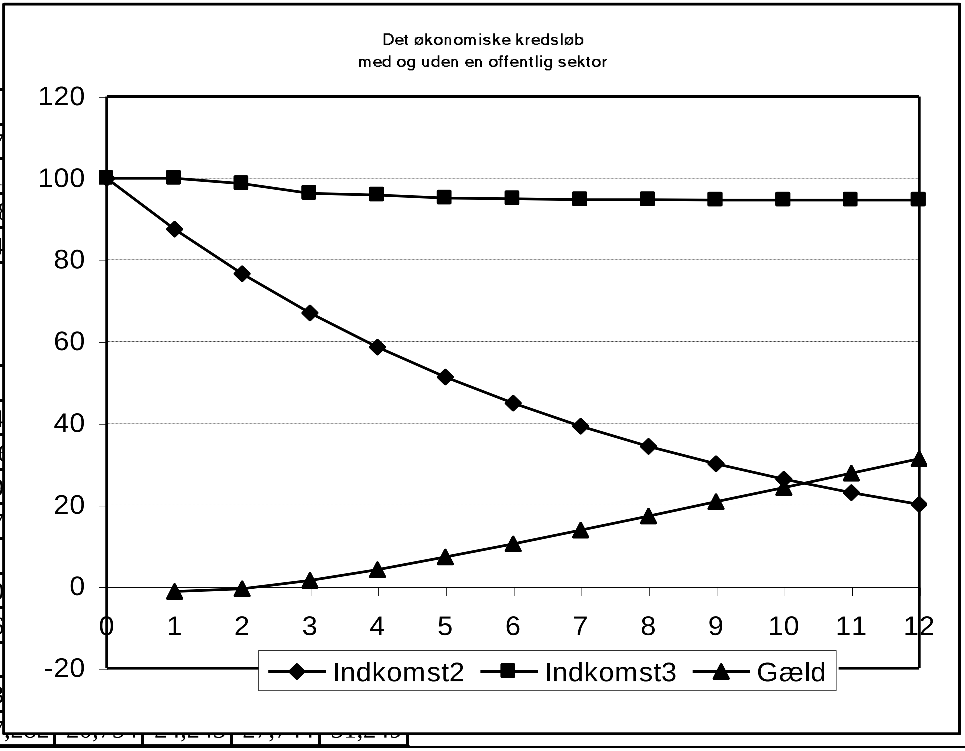
Tid	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PrivatForbrug	c	**70%**	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
PrivatInvestering	d	**25%**	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%	25%
Skat	e	**30%**	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
Offentlig investering	g	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Indkomstoverførsel	h	**50%**	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%
Offentligt forbrug	F	**20**	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

2sektor-model

Tid	*n*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	
Forbrug	C	80	70	61,25	53,594	46,895	41,033	35,904	31,416	27
Opsparing	B	20	30	26,25	22,969	20,098	17,585	15,387	13,464	11
Investering	D	20	17,5	15,313	13,398	11,724	10,258	8,9759	7,8539	6,8
Indkomst2	A	100	87,5	76,563	66,992	58,618	51,291	44,88	39,27	34

3sektor-model

Tid	*n*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	
Indkomst3	A	100	100	98,7	96,25	95,852	95,102	94,98	94,75	94
Overførsler	H	4	0	0,65	1,875	2,0741	2,4492	2,5102	2,6251	2,6
Skat	E		31,2	30	29,805	29,438	29,378	29,265	29,247	29
PrivatForbrug	C	80	50,96	49	48,682	48,081	47,984	47,8	47,77	47
OffentligtForbrug	F		20	20	20	20	20	20	20	
Opsparing	B	20	21,84	21	20,864	20,606	20,564	20,486	20,473	20
PrivatInvestering	D	20	17,74	17,25	17,17	17,02	16,996	16,95	16,943	16
OffentligInvestering	G		10	10	10	10	10	10	10	
Låntagning	I		1,2	-0,65	-2,07	-2,637	-3,071	-3,245	-3,378	-3
Gæld			-1,2	-0,55	1,52	4,1566	7,228	10,473	13,851	17



Dobbeltklik og rediger